Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2/F

Filippo Cesi – 2020-21

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (7 pt). Calcolare la trasformata di Fourier, riconducendosi se possibile a casi noti, della funzione

$$f(x) = x \cos x \, e^{-4x^2}$$

Soluzione. Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi} e^{-s^2/4} \\
[x \to 2x] & e^{-4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-s^2/16} \\
[f(x) \to x f(x)] & x \, e^{-4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iD \left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-s^2/16} \right] = -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{16} \, s \, e^{-s^2/16} \\
[f(x) \to \cos x \, f(x)] & x \, \cos x \, e^{-4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{32} \left[(s+1) e^{-(s+1)^2/16} + (s-1) e^{-(s-1)^2/16} \right]
\end{array}$$

(2) (7 pt). Sia $F(x) = H(x) \, e^{-x^2/2}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside e sia $G = F'' + (1-x^2)F$, nel senso delle distribuzioni.

(a) Calcolare G.

(b) Calcolare $D^n G$ per n intero positivo arbitrario.

Risp: (a) δ_0'. (b) $\delta_0^{(n+1)}$.

(3) (7 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\cos(\pi x/2))}{x^2} \, dx$$

Soluzione. La funzione $b(x) := \cos(\pi x/2)$ si annulla nei punti

$$\cos(\pi x/2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_k := 2k+1 \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \, .$$

Poiché

$$|b'(x_k)| = \left| -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x_k}{2}\right) \right| = \left| \frac{\pi}{2} \sin(k\pi + \pi/2) \right| = \frac{\pi}{2} \, ,$$

si ottiene

$$\delta(\cos(\pi x/2)) = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{x_k} = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2\kappa+1} \, .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\cos(\pi x/2))}{x^2} \, dx &= \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x - x_k)}{x^2} \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x_k^2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} \, ,
\end{aligned}$$

in cui, nell'ultima uguaglianza, ho usato il fatto noto che la somma dei quadrati degli interi positivi dispari è uguale a $\pi^2/8$.

(4) (8 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = |x|$. Usando *l'uguaglianza di Parseval* si ottiene il valore della somma di una particolare serie numerica. Scrivere questa identità.

Risp:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

(5) (7 pt). Dimostrare che la derivata di $|x|$, nel senso delle distribuzioni, è data da $\operatorname{sgn}(x)$.