

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S3/C

Filippo Cesi – 2020–21

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

- (1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.
- (2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.
- (3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.
- (4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi

- (1) (6 pt). Descrivere a parole e graficamente la regione del piano complesso $1 \leq |z + i| \leq 2$.

Risp: Corona circolare chiusa di centro $z = -i$, raggio interno 1 e raggio esterno 2.

- (2) (8 pt). Calcolare il raggio di convergenza: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (4-i)^{2n} z^n$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^{2n}$.

Risp: (a) $1/17$. (b) $e^{-1/2}$.

- (3) (6 pt). Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di

$$f(z) = \frac{3z^2 + 2z}{(e^z - 1)^2 \sin(z)}.$$

Risp: $\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z}$.

- (4) (8 pt). Calcolare $\int_{|z-1/2|=1} \frac{z+z^2}{\sin^2(\pi z)} dz$.

Schema di soluzione. All'interno del cammino di integrazione c'è un polo semplice in 0 e un polo di ordine 2 in 1.

$$\int_{|z-1/2|=1} \frac{z+z^2}{\sin^2(\pi z)} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 1)) = 2\pi i \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{3}{\pi^2} \right) = \frac{8i}{\pi}.$$

- (5) (8 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x) dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Soluzione.

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x) dx}{(x^2 + 1)^2} = \text{Re } J,$$

in cui, ponendo

$$f(z) = \frac{e^{i3z} dz}{(z^2 + 1)^2},$$

ho definito

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x} dx}{(x^2 + 1)^2} = \int \underbrace{f(z) dz}_{\text{contorno}} = 2\pi i \text{Res}(f, i) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} D((z-i)^2 f(z)) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} D\left(\frac{e^{i3z}}{(z+i)^2}\right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{3ie^{i3z}}{(z+i)^2} - 2 \frac{e^{i3z}}{(z+i)^3} \right) = 2\pi i e^{-3} \left(\frac{3i}{(2i)^2} - \frac{2}{(2i)^3} \right) = 2\pi i e^{-3} \left(-\frac{3i}{4} - \frac{2i}{8} \right) = 2\pi e^{-3}. \end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} \text{Re } J = \pi e^{-3}.$$