Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S4/F

Filippo Cesi – 2022–01-17

problema	voto
1	
2	
3	
4	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi

(1) (9 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+4x^2)^2}\,.$$

Soluzione. Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & \dfrac{1}{1+x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \pi e^{-|\lambda|} \\
[x \to 2x] & \dfrac{1}{1+4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{2} e^{-|\lambda/2|} = \dfrac{\pi}{2} e^{-|\lambda|/2} \\
[f(x) \to f'(x)] & -\dfrac{8x}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{i\pi\lambda}{2} e^{-|\lambda|/2} \\
[f(x) \to -\frac{x}{8} f(x)] & \dfrac{x^2}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{1}{8} iD\Big(\dfrac{i\pi\lambda}{2} e^{-|\lambda|/2}\Big) \\
 & \dfrac{x^2}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{16} e^{-|\lambda|/2}\Big(1 - \dfrac{|\lambda|}{2}\Big)\,.
\end{array}$$

Nell'ultimo passaggio ho usato l'identità: $\lambda\,\mathrm{sgn}(\lambda) = |\lambda|$.

(2) (9 pt). Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D^3\big(|4 - x^2|\big)$$

Soluzione. Si ha

$$|4 - x^2| = (4 - x^2)\ \mathrm{sgn}(4 - x^2)\,.$$

Poichè $D\,\mathrm{sgn}(4 - x^2) = 2(\delta_{-2} - \delta_2)$, ottengo

$$\begin{aligned}
D^3\left(|4 - x^2|\right) &= D^2\left[-2x\ \mathrm{sgn}(4 - x^2) + (4 - x^2)\,2(\delta_{-2} - \delta_2)\right] \\
&= 2\,D^2\left[-x\ \mathrm{sgn}(4 - x^2) + (4 - x^2)\,(\delta_{-2} - \delta_2)\right] \\
&= -2\,D^2\left[x\ \mathrm{sgn}(4 - x^2)\right] \\
&= -2\,D\left[\mathrm{sgn}(4 - x^2) + 2x\,(\delta_{-2} - \delta_2)\right] \\
&= -2\,D\left[\mathrm{sgn}(4 - x^2) - 4(\delta_{-2} + \delta_2)\right] \\
&= 4\,(\delta_2 - \delta_{-2}) + 8(\delta'_{-2} + \delta'_2)\,.
\end{aligned}$$

(3) (9 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi x/6}\,\delta(x^5 - x)\,dx\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := x^5 - x$ si annulla nei punti

$$x^5 - x = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 0, \pm 1\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 5x^4 - 1 \qquad\qquad |b'(0)| = 1 \qquad\qquad |b'(\pm 1)| = 4$$

da cui si ottiene

$$\delta(x^5 - x) = \delta_0 + (\delta_1 + \delta_{-1})/4\,.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\pi/6}\,\delta(x^5 - x)\,dx = \delta_0(e^{ix\pi/6}) + \frac{1}{4}\big[\delta_1(e^{ix\pi/6}) + \delta_{-1}(e^{ix\pi/6})\big]$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\big(e^{i\pi/6} + e^{-i\pi/6}\big) = 1 + \frac{1}{2}\cos(\pi/6) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

(4) (9 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di $P(1/x)$ (parte principale di $1/x$).

Soluzione. Vedi sulle "Lezioni di MMMF".