

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1/C

Filippo Cesi – 2022/06/21

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

- (1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.
- (2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.
- (3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.
- (4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi.

(1) (8 pt) Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (2-i)^{\sqrt{n}} z^n \qquad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

Risp: (a) 1. (b) $1/4$.

(2) (7 pt). Determinare tutte le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$f(z) = \frac{\sin(z^2)(z^2+1)}{z^3(e^{\pi z}+1)^2}$$

Schema di soluzione. Il denominatore ha i seguenti zeri

$$\begin{array}{ll} z = 0 & \text{molteplicità 3} \\ z = i(1+2k) & \text{molteplicità 2.} \end{array}$$

Il numeratore ha i seguenti zeri

$$\begin{array}{ll} z = 0 & \text{molteplicità 2} \\ z = \pm i & \text{molteplicità 1.} \end{array}$$

Combinando queste informazioni otteniamo che le singolarità di f sono

$$\begin{array}{ll} z = 0 & \text{polo di ordine 1} \\ z = i(1+2k), \quad k \notin \{-1, 0\} & \text{polo di ordine 2} \\ z = \pm i & \text{polo di ordine 1.} \end{array}$$

(3) (7 pt). Calcolare

$$\int_{|z-6i|=4} \frac{dz}{(z^2+\pi^2)(e^z+1)}$$

Schema di soluzione. (a) Sia

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+\pi^2)(e^z+1)}.$$

La funzione f ha le seguenti singolarità isolate

$$\begin{array}{ll} z_k = i(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \notin \{0, -1\} & \text{polo di ordine 1} \\ z_0 = \pm i\pi & \text{polo di ordine 2} \end{array}$$

Le singolarità interne al cammino di integrazione sono $z_1 = i\pi$ e $z_2 = 3i\pi$. Si calcola facilmente

$$\text{Res}(f, i\pi) = -\frac{1+i\pi}{4\pi^2} \qquad \text{Res}(f, 3i\pi) = \frac{1}{8\pi^2}.$$

Quindi

$$\int_{|z-6i|=4} \frac{dz}{(z^2+\pi^2)(e^z+1)} = 2\pi i [\text{Res}(f, i\pi) + \text{Res}(f, 3i\pi)] = \frac{1}{2} - \frac{i}{4\pi}.$$

- (4) (7 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x \, dx}{x^2 - 2x + 5}$$

Risp: $\frac{\pi}{2e^2} \sin(1)$.

- (5) (7 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sulla cosiddetta “Stima di Cauchy” sulle derivate di una funzione analitica.