Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1/F

Filippo Cesi – 2022/06/21

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi.

(1) (9 pt). Calcolare la seguente distribuzione, semplificando il più possibile il risultato: $D^3(e^{x-x^2}\delta_0'')$.

Soluzione. Dall'identità

$$h(x)\,\delta_0'' = h(0)\,\delta_0'' - 2h'(0)\,\delta_0' + h''(0)\,\delta_0\,,$$

con

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{x-x^2} & \qquad h(0) &= 1 \\ h'(x) &= h(x)(1-2x) & \qquad h'(0) &= 1 \\ h''(x) &= h'(x)(1-2x) - 2h(x) & \qquad h''(0) &= -1 \end{aligned}$$

si ottiene

$$e^{x-x^2}\,\delta_0'' = \delta_0'' - 2\delta_0' - \delta_0\,.$$

Dunque

$$D^3(e^{x-x^2}\delta_0'') = \delta_0^{(5)} - 2\delta_0^{(4)} - \delta_0^{(3)}\,.$$

(2) (9 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = xH(x-4)e^{-3x}$.

Risp: $\frac{e^{-4(3+it)}(13+4it)}{(3+it)^2}$.

(3) (9 pt). Calcolare la seguente espressione in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\,\delta(x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$ si annulla nei punti $0, 1, 2$. Inoltre si ha

$$b'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \qquad |b'(0)| = 2 \qquad |b'(1)| = 1 \qquad |b'(2)| = 2$$

da cui si ottiene

$$\delta(b(x)) = \frac{1}{2}\delta_0 + \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2\,.$$

Quindi, ponendo $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, ottengo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\delta(x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx &= \frac{1}{\delta}_0(g) + \delta_1(g) + \frac{1}{\delta}_2(g) \\ &= \frac{\cos(0)}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{4}\,. \end{aligned}$$

(4) (9 pt). Risolvere la seguente equazione del calore nell'intervallo $[0, \ell]$, in cui $\lambda > 0$, $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ e $f(x)$ è la condizione iniziale nota:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \lambda\,u_{xx}(x,t) & \qquad & x \in [0,\ell]\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) & & x \in [0,\ell] \\ u(0,t) = T_1, &\quad u(\ell,t) = T_2 & & t > 0\,. \end{aligned}$$

Soluzione. Trattata a lezione.