Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2/C

Filippo Cesi – 2022/07/05

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi.

(1) (6 pt). Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}(2-4i)^n z^{2n}$.

(2) (7 pt). Sia G una regione in $\mathbb{C}$ e sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Dimostrare che se $|f|$ è costante allora f è costante. (Sugg: porre $f = u + iv$ ed usare ...).

Soluzione. Sia $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ e supponiamo che sia $|f(z)| = c$. Se $c = 0$ si ha $|f(z)| = 0$, quindi $f(z) = 0$ e l'affermazione è dimostrata. Se $c > 0$, pongo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e dunque

$$|f(z)|^2 = u^2(x, y) + v^2(x, y) = c^2 .$$

Derivando rispetto a x e a y ottengo

$$2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad\qquad 2uu_y + 2vv_y = 0 ,$$

che, utilizzando le condizioni di Cauchy–Riemann, implica

$$uu_x - vu_y = 0 \qquad\qquad uu_y + vu_x = 0 .$$

Considerando u_x e u_y come incognite, risolvo il sistema di due equazioni e ottengo che l'unica soluzione è la soluzione nulla $u_x = u_y = 0$. Dalle condizioni di Cauchy–Riemann segue allora che $v_x = v_y = 0$. Quindi le funzioni u e v sono entrambe costanti. Di conseguenza $f = u + iv$ è anch'essa costante. $\square$

(3) (7 pt). Determinare le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$f(z) = \frac{z^2(z^2-9)\, e^{1/z}}{1 + \sin(\pi z/2)}$$

Soluzione. Trovo gli zeri del denominatore:

$$\sin(\pi z/2) = -1 \iff \frac{\pi z}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff z_k = -1 + 4k,\ k \in \mathbb{Z} .$$

Questi zeri hanno molteplicità 2. Il caso $k = 1$ ($z_k = 3$) coincide con uno zero semplice del numeratore. Possiamo quindi concludere che le singolarità della funzione sono

$$\begin{array}{lll} z_k = -1 + 4k & k \in \mathbb{Z},\ k \neq 1 & \text{polo di ordine 2} \\ z_1 = 3 & & \text{polo di ordine 1} \\ z = 0 & & \text{singolarità essenziale.} \end{array}$$

(4) (8 pt). Calcolare $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{z^2}{z^4+1}\, dz$.

Soluzione. L'equazione $z^4 + 1 = 0$ ha 4 radici semplici nei punti

$$z_k = e^{i(\pi/4 + k\pi/2)} \qquad k = 0, 1, 2, 3 ,$$

quindi l'integrando ha 4 poli semplici in z_0, z_1, z_2, z_3. Gli unici poli che si trovano all'interno della circonferenza percorsa da γ sono

$$z_0 = e^{i\pi/4} \qquad\qquad z_3 = e^{-i\pi/4} = \overline{z_0} ,$$

quindi

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z^4+1}\, dz = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_3)\big) .$$

Si ottiene

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{z_0^2}{4z_0^3}=\frac{1}{4z_0} \qquad\qquad \operatorname{Res}(f,z_3)=\frac{z_3^2}{4z_3^3}=\frac{1}{4z_3}\,.$$

da cui

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,z_0)+\operatorname{Res}(f,z_3)&=\frac{1}{4z_0}+\frac{1}{4z_3}=\frac{1}{4z_0}+\frac{1}{4\overline{z_0}}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\big(\frac{1}{z_0}\big)\\&=\frac{1}{2}\operatorname{Re}e^{-i\pi/4}=\frac{1}{2}\cos(\pi/4)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z^4+1}\,dz=\frac{\pi i}{\sqrt{2}}\,.$$

(5) (8 pt). Calcolare

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{z(z+1)\,\exp(1/z)}{3z^3+1}\,dz\,.$$

Soluzione. Sia

$$f(z):=\frac{z(z+1)\,\exp(1/z)}{3z^3+1}\,.$$

La funzione integranda f ha una singolarità essenziale in $z=0$ e tre poli semplici che si trovano sulla circonferenza di raggio $1/\sqrt[3]{3}$ centrata nell'origine. Poiché non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito.

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz=-2\pi i\operatorname{Res}(f,\infty)=2\pi i\operatorname{Res}\Big[\frac{1}{z^2}f\Big(\frac{1}{z}\Big),0\Big]\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2}f\Big(\frac{1}{z}\Big)&=\frac{1}{z^2}\frac{1/z\,(1/z+1)\,\exp(z)}{3/z^3+1}\\&=\frac{1}{z}\,\frac{(z+1)\,\exp(z)}{3+z^3}\,.\end{aligned}$$

Questa funzione ha un polo semplice nell'origine e il residuo associato è

$$\operatorname{Res}\Big[\frac{1}{z^2}f\Big(\frac{1}{z}\Big),0\Big]=\lim_{z\to 0}\frac{(z+1)\,\exp(z)}{3+z^3}=\frac{1}{3}\,.$$

Quindi

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz=\frac{2\pi i}{3}\,.$$