Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2/F

Filippo Cesi – 2022/07/05

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi.

(1) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = xe^{-4x^2+7ix}$.

Risp: $-\frac{i\sqrt{\pi}}{16}(\lambda - 7)\exp\left[-(\lambda-7)^2/16\right]$.

(2) (12 pt). Calcolare la seguente distribuzione, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\ \ D^3\left((1+e^x)^2\ \delta_0''\right) \qquad\qquad (b)\ \ D^2\left[e^{|x|}D^2\left(x^2e^{-|x|}\right)\right]$$

Soluzione. (a) $6\delta_0^{(3)} - 8\delta_0^{(4)} + 4\delta_0^{(5)}$.

(b) Si ha

$$\begin{aligned} D^2\left(x^2\,e^{-|x|}\right) &= D\left(e^{-|x|}(-\operatorname{sgn}(x)x^2 + 2x)\right) \\ &= e^{-|x|}\left(-\operatorname{sgn}(x)(-\operatorname{sgn}(x)x^2+2x) - 2x^2\delta_0 - 2x\operatorname{sgn}(x) + 2\right) \\ &= e^{-|x|}\left(-\operatorname{sgn}(x)(-\operatorname{sgn}(x)x^2+2x) - 2|x| + 2\right) \\ &= e^{-|x|}\left((\operatorname{sgn}(x))^2x^2 - 2x\operatorname{sgn}(x) - 2|x| + 2\right) \\ &= e^{-|x|}(x^2 - 4|x| + 2)\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$D^2\left[e^{|x|}D^2\left(x^2e^{-|x|}\right)\right] = D^2(x^2 - 4|x| + 2) = D(2x - 4\operatorname{sgn}(x)) = 2 - 8\delta_0\,.$$

(3) (8 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (il risultato è un numero reale).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\pi/2)\,\delta(2x^2 - 5x + 2)\,dx\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := 2x^2 - 5x + 2$ si annulla nei punti

$$x_1 = 1/2 \qquad x_2 = 2\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 4x - 5 \qquad\qquad |b'(1/2)| = 3 \qquad\qquad |b'(2)| = 3$$

da cui si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\pi/2)\,\delta(x^2 - 5x + 4)\,dx = \ = \frac{1}{3}\left(\cos(\pi/4) + \cos(\pi)\right) = \frac{\sqrt{2}-2}{6}\,.$$

(4) (8 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = |x|$. Calcolare $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Soluzione. Poichè f è pari i coefficienti b_k sono nulli.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\,\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\,\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx \\
&= \frac{2}{k^2\pi}\big[\cos(kx)\big]_0^{\pi} = \frac{2}{k^2\pi}\big[\cos(k\pi)-1\big] = \frac{2}{k^2\pi}\big[(-1)^k-1\big]\,.
\end{aligned}
$$

Conviene distinguere i k pari dai dispari. Si ottiene

$$
a_{2k} = 0 \qquad\qquad a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\,.
$$

Quindi

$$
|x| \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}
$$

Sfruttando la convergenza puntuale in $x=0$ si ottiene

$$
0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}
$$

da cui

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.
$$