

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S3/C

Filippo Cesi – 2022/09/09

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

- (1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.
- (2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.
- (3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.
- (4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi.

(1) (8 pt) Calcolare il raggio di convergenza

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (1-i)^n z^{3n}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} z^n$$

Risp: (a) $1/\sqrt[6]{2}$. (b) 1.

(2) (6 pt). Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calcolare (usando il ramo principale)

$$(a) \log(z^8)$$

$$(b) |i^z|$$

Risp: (a) $8 \log 2 + i2\pi/3$. (b) $e^{-\sqrt{3}\pi/2}$.

(3) (14 pt). Calcolare

$$(a) \int_{|z-1|=3} \frac{z(z+2)}{\sin^2 z} dz$$

$$(b) \int_{|z|=2} \frac{z^3(1-z)}{1+z^5} dz$$

Schema di soluzione. (a) Le singolarità che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$z = 0 \quad (\text{polo di ordine 1})$$

$$z = \pi \quad (\text{polo di ordine 2}).$$

Si ha quindi

$$\int_{|z-1|=3} \frac{z(z+2)}{\sin^2 z} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, \pi)) = 2\pi i (2 + (2 + 2\pi)) = 4\pi i (2 + \pi).$$

(b) Poiché l'integrando è analitico nella regione all'esterno del cammino di integrazione, posso usare il teorema sul residuo all'infinito. Ottengo:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3(1-z)}{1+z^5} dz = -2\pi i \text{Res}(f, \infty) = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f(1/z), 0\right) = -2\pi i.$$

(4) (8 pt). Enunciare e dimostrare il teorema di Morera.