Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S3/F

Filippo Cesi – 2022/09/09

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi.

(1) (7 pt). Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D^4\big[e^{-(x-1)^2}\,\delta_0^{(2)}\big]$$

Risp: $e^{-1}\big(2\delta_0^{(4)} - 4\delta_0^{(5)} + \delta_0^{(6)}\big)$.

(2) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = xe^{-x}H(x-2)$ (H è la funzione a gradino di Heaviside).

Soluzione. Partendo ad una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & H(x)\,e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{1+i\lambda} \\
[x \to x-2] & H(x-2)\,e^{-x+2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{e^{-2i\lambda}}{1+i\lambda} \\
[f(x) \to xf(x)] & H(x-2)\,x\,e^{-x+2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & ie^{-2i\lambda}\,\dfrac{2\lambda-3i}{(1+i\lambda)^2} \\
[f(x) \to e^{-2}\,f(x)] & H(x-2)\,x\,e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-2i\lambda-2}\,\dfrac{3+2i\lambda}{(1+i\lambda)^2}
\end{array}$$

(3) (7 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi,\pi]$ la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 2-|x| & \text{se } |x| \le 2 \\ 0 & \text{se } 2 < |x| \le \pi \end{cases}$$

Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k)}{k^2}$ (ricorda che $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$).

Risp: $f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(2k)}{k^2}\cos(kx)$. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k)}{k^2} = \pi^2/6 - \pi + 1$.

(4) (7 pt). Sia $F(x) = H(x)\sin(\omega x)$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside e $\omega > 0$. Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $F'' + \omega^2 F$.

Soluzione. Si ha

$$F'(x) = \sin(\omega x)\delta_0 + \omega H(x)\cos(\omega x) = \omega H(x)\cos(\omega x)\,,$$

quindi

$$F''(x) = \omega\cos(\omega x)\delta_0 - \omega^2 H(x)\sin(\omega x) = \omega\delta_0 - \omega^2 H(x)\sin(\omega x)\,.$$

Otteniamo così

$$F''(x) + \omega^2 F(x) = \omega\delta_0\,.$$

(5) (7 pt). Sia $h : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione analitica in un anello aperto che contiene la circonferenza unitaria e sia $f(\vartheta) := h(e^{i\vartheta})$. Dimostrare che lo sviluppo in serie di Fourier per f può essere derivato direttamente dalla serie di Laurent per h.

Soluzione. Fatto a lezione.