

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S4/C

Filippo Cesi – 2022/11/16

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

- (1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.
- (2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.
- (3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.
- (4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi.

(1) (8 pt). Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{2n} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (1-3i)^n z^n.$$

Risp: (a) $1/2$. (b) $1/\sqrt{10}$.

(2) (9 pt). Calcolare

$$\int_{|z-2i|=3} \frac{dz}{z(e^z+1)^2}$$

Soluzione. Le singolarità dell'integrando sono

$$z=0, \text{ polo di ordine } 1 \qquad z=i\pi(1+2k), \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \text{ polo di ordine } 2$$

Le uniche singolarità che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$z=0 \qquad \text{e} \qquad z=i\pi,$$

quindi, denotando con f l'integrando, si ha

$$I := \int_{|z-2i|=3} \frac{dz}{z(e^z+1)^2} = 2\pi i \left[\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, i\pi) \right].$$

Calcolo dunque i residui

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(e^0+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Per calcolare il residuo in $i\pi$ trovo la parte singolare della serie di Laurent di f in questo punto. Cambio variabile ponendo $z = i\pi + w$ e ottengo

$$f(z) = \frac{1}{i\pi} \frac{1}{w^2} + \frac{1+i\pi}{\pi^2} \frac{1}{w} + \mathcal{O}(1),$$

che implica

$$\text{Res}(f, i\pi) = \frac{1+i\pi}{\pi^2}.$$

Di conseguenza ottengo

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{i}{\pi} \right) = i \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \right) - 2.$$

(3) (9 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+6x+12} dx.$$

Risp: $\frac{2^{4/3}}{3^{5/6}} \pi \sin\left(\frac{\pi}{18}\right).$

(4) (10 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sul residuo all'infinito.