Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1

Filippo Cesi – 2023/06/20

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, e^{2n}}\, z^n$.

Risp: e.

(2) (5 pt). Calcolare la seguente distribuzione, semplificando il più possibile il risultato:

$$D^3\left[e^{|x|} D^2\big((1+x)\, e^{-|x|}\big)\right].$$

Risp: $-2\left(2\delta_0'' + \delta_0^{(3)}\right)$.

(3) (5 pt). Calcolare

$$\int_{|z-1|=2} \frac{z+1}{z \sin(\pi z/2)}\, dz$$

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{1+z}{z\, \sin(\pi z/2)}\,.$$

Le singolarità di f che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$\begin{array}{ll} z = 0 & \text{polo di ordine 2} \\ z = 2 & \text{polo di ordine 1}\,. \end{array}$$

Quindi

$$\int_{|z-1|=2} f(z)\, dz = 2\pi i\, \big[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,2)\big] = 2\pi i \left(\frac{2}{\pi} - \frac{3}{\pi}\right) = -2i\,.$$

(4) (5 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2/3}}{x^2+6x+18}\, dx$$

Soluzione. Applicando la formula

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha}\, g(x)\, dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \sum_{z\neq 0} \mathrm{Res}\left(g(-z)\, z^{\alpha},\ z\right)$$

ottengo

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2/3}\, dx}{x^2+6x+18} = \frac{\pi}{\sin(2\pi/3)} \sum_k \mathrm{Res}(f, z_k)\,,$$

in cui (ricorda di cambiare segno a z nella funzione g!)

$$f(z) = g(-z)\, z^{2/3} = \frac{z^{2/3}}{z^2 - 6z + 18}$$

e z_k sono le singolarità isolate di f. In questo caso ci sono due singolarità isolate che rappresento in forma polare, usando l'argomento principale

$$\begin{aligned} z_+ &= 3+3i = 3\sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \\ z_- &= 3-3i = 3\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}\,. \end{aligned}$$

Sono entrambi poli semplici. Quindi, ponendo

$$z^2 - 6z + 18 = (z - z_+)\,(z - z_-)$$

ottengo

$$\mathrm{Res}(f, z_+) = \left.\frac{z^{2/3}}{z - z_-}\right|_{z=z_+} = \frac{z_+^{2/3}}{6i} = \frac{1}{6i}\,\left(3\sqrt{2}\right)^{2/3}\; e^{i\pi/6} = \frac{1}{6i}\,3^{2/3}\,2^{1/3}\; e^{i\pi/6} = \frac{1}{2i}\,\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,e^{i\pi/6}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_-) = \mathrm{Res}(f, \overline{z_+}) = \overline{\mathrm{Res}(f, z_+)} = -\frac{1}{2i}\,\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,e^{-i\pi/6}\,.$$

Quindi

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}\,dx}{x^2 + 6x + 18} = \frac{\pi}{\sin(2\pi/3)}\,\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2i}\left(e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6}\right)$$
$$= \pi\,\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,\frac{\sin(\pi/6)}{\sin(2\pi/3)} = \pi\,\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi\,\frac{\sqrt[3]{2}}{3^{5/6}}\,.$$

(5) (5 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = xe^{-x^2+2x}$.

Soluzione.

$$\begin{array}{llcl}
 & e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4} \\
[x \to x - 1] & e^{-x^2+2x-1} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4 - i\lambda} \\
[f \to e\,f] & e^{-x^2+2x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4 - i\lambda + 1} \\
[f \to x\,f] & e^{-x^2+2x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4 - i\lambda + 1}\left(1 - \dfrac{i\lambda}{2}\right)
\end{array}$$

(6) (5 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ della funzione $f(x) = H(x)\,e^{-x}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside

$$H(x)\,e^{-x} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right] \qquad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$; (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$; (c) $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right]$.

Soluzione. (a) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = 0$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}\,.$$

(b) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = \pi$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(\kappa\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi)) = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi} + 0\right) = \frac{e^{-\pi}}{2}\,.$$

(c) Dall'uguaglianza di Parseval segue

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-2x}\,dx = \left.\frac{e^{-2x}}{2\pi}\right|_{\pi}^{0} = \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-2\pi}\right)\,.$$

(7) (5 pt). Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $I(a) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+iax}\, \delta\big((x^4-1)\, e^{-x^2}\big)\, dx$. Calcolare il massimo della funzione $f(a) := |I(a)|$ per $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione. La funzione $b(x) := (x^4-1)\, e^{-x^2}$ si annulla nei punti $x = \pm 1$. Inoltre si ha

$$b'(x) = e^{-x^2}\big(4x^{2n-1} - 2x(x^4-1)\big) \qquad\qquad |b'(\pm 1)| = \frac{4}{e}\,,$$

da cui si ottiene

$$\delta(b(x)) = \frac{e}{4}\,(\delta_1 + \delta_{-1})\ .$$

Quindi

$$I(a) = \frac{e}{4}\left(\Big[e^{-x^2+iax}\Big]_{x=1} + \Big[e^{-x^2+iax}\Big]_{x=-1}\right) = \frac{e}{4}\left(e^{-1+ia} + e^{-1-ia}\right) = \frac{\cos a}{2}\,.$$

Otteniamo così che la funzione $f(a) = |I(a)| = |\cos(a)/2|$ ha come valore massimo $1/2$.

(8) (4 pt). Fare un esempio di una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ intera, non identicamente nulla, tale che $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Alternativamente, se una tale funzione non esiste, dimostrare che non esiste.

Soluzione. Suggerimento: riallacciarsi alla dimostrazione del teorema fondamantale dell'algebra e dimostrare nello stesso modo che il fatto che la funzione tende a zero all'infinito implica, poichè la funzione è analitica, quindi continua, che la funzione è limitata.