Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2

Filippo Cesi – 2023/07/04

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (4 - i^n)^n \, z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \, e^{\sqrt{n}} \, z^n$$

Soluzione. (a) Si ha

$$|a_n|^{1/n} = |4 - i^n| = (3, \sqrt{17}, 5, \sqrt{17}, 3, \sqrt{17}, 5, \sqrt{17}, \ldots)$$

quindi

$$R = \Big(\limsup |a_n|^{1/n}\Big)^{-1} = \frac{1}{5} \, .$$

(b) $R = 1$.

(2) (4 pt). Sia $F(x) = \sin(|x|)$, Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $F'' + F$.

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} &D(\sin|x|) = \cos(|x|)\operatorname{sgn}(x) = \cos(x)\operatorname{sgn}(x) \\ &D^2(\sin|x|) = -\sin x \operatorname{sgn}(x) + 2\cos x \delta_0 = -\sin(|x|) + 2\delta_0 \, . \end{aligned}$$

Quindi

$$F'' + F = 2\delta_0 \, .$$

(3) (4 pt). Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calcolare (usare il ramo principale)

$$(a) \quad \log(z^8) \qquad\qquad (b) \quad |i^z|$$

Risp: (a) $8\log 2 + i2\pi/3$. (b) $e^{-\sqrt{3}\pi/2}$.

(4) (4 pt). Calcolare $I = \displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z^5 + 3z^4 + 1}{z^5 - 2} \, dz$.

Soluzione. Poiché non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito. In questo modo si ottiene facilmente

$$I = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 2\pi i \operatorname{Res}\Big[\frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big), 0\Big] = 6\pi i \, .$$

(5) (4 pt). Sia $f(z) = \dfrac{1 + 2z + z^3}{z\,(e^z - 1)}$. Calcolare $\operatorname{Res}(f, 0)$.

Soluzione. Trattandosi di un polo di ordine 2, per calcolare la parte singolare della serie di Laurent in $z = 0$ devo sviluppare il fattore moltiplicativo $e^z - 1$ calcolando *i primi due termini a partire dal primo non nullo*, quindi

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} \, .$$

In questo modo si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{2z} + \mathcal{O}(1) \, ,$$

quindi

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{3}{2} \, .$$

(6) (5 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sull'esistenza di una primitiva di una funzione analitica.

(7) (4 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\cos(\pi x))}{x^2}\, dx$$

Soluzione. La funzione $b(x) := \cos(\pi x)$ si annulla nei punti

$$\cos(\pi x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_k := k + \frac{1}{2} \;\; \text{con } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poiché

$$|b'(x_k)| = |-\pi\, \sin(\pi x_k)| = |\pi \sin(k\pi + \pi/2)| = \pi\,,$$

si ottiene

$$\delta(\cos(\pi x)) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{x_k} = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{\kappa+1/2}\,.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\cos(\pi x))}{x^2}\, dx = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-x_k)}{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x_k^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(k+1/2)^2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1/2)^2} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{8}{\pi}\frac{\pi^2}{8} = \pi\,.$$

(8) (4 pt). Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$f(x) = xe^{-x^2+5ix}\,.$$

Soluzione. Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{lllll}
 & e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}\, e^{-s^2/4} & \\
[f \to xf] & x\, e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iD\left[\sqrt{\pi} e^{-s^2/4}\right] = -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{2}\, s\, e^{-s^2/4} & \\
[f \to e^{5ix} f] & x\, e^{-x^2+5ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{2}(s-5)\, e^{-(s-5)^2/4}\,. &
\end{array}$$

(9) (5 pt). Risolvere la seguente equazione del calore nell'intervallo $[0, \ell]$, in cui $\lambda > 0$, $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ e $f(x)$ è la condizione iniziale nota:

$$\begin{cases}
u_t(x,t) = \lambda\, u_{xx}(x,t) & x \in [0,\ell]\,, \quad t > 0 \\
u(x,0) = f(x) & x \in [0,\ell] \\
u(0,t) = T_1, \quad u(\ell,t) = T_2 & t > 0\,.
\end{cases}$$

Soluzione. Vedi sulle "Lezioni".