Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S4

Filippo Cesi – 2024/01/15

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt). Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n!\, z^{n^2} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2+3i)^n z^n \,.$$

Risp: (a) 1. (b) $1/\sqrt{13}$.

(2) (4 pt). Calcolare $I = \displaystyle\int_{|z-i|=3} \frac{e^{\pi z}\, dz}{z\,(z^2+9)}$.

Schema di soluzione.

$$I = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,3i)\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18}\right) = \frac{i\pi}{3}\,.$$

(3) (5 pt). Calcolare $I = \displaystyle\int_{|z|=5} \frac{dz}{(z^5+1)\,(z+10)}$.

Soluzione. Poiché c'è una sola singolarità all'esterno del cammino di integrazione (e 5 all'interno), conviene usare il metodo del residuo all'infinito, tenendo conto della singolarità esterna. Quindi

$$I = -2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,\infty) + \mathrm{Res}(f,10)\right)\,.$$

Siccome $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$, si ha $\mathrm{Res}(f,\infty) = 0$, per cui

$$I = -2\pi i\, \mathrm{Res}(f,10) = -2\pi i \frac{1}{(-10)^5+1} = \frac{2\pi i}{99999}\,.$$

(4) (4 pt). Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}\, dx}{(x^2+4)^2}\, dx\,.$$

Soluzione. Chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano superiore, otteniamo

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}\, dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{z e^{iz}\, dz}{(z^2+4)^2} = 2\pi i\ \mathrm{Res}\big(\, g(z), 2i\big)\,,$$

in cui

$$g(z) = \frac{z e^{iz}}{(z^2+4)^2}\,.$$

La parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent di g nel punto $z = 2i$ è data da

$$g(z) = -\frac{i}{8e^2(z-2i)^2} + \frac{1}{8e^2(z-2i)} + \underline{\mathcal{O}}(1)\,.$$

Otteniamo dunque

$$I = 2\pi i\, \frac{1}{8e^2} = \frac{i\pi}{4e^2}\,.$$

(5) (4 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = xe^{-4x^2+5ix}$.

Soluzione. Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-s^2/4} \\
[x \to 2x] & e^{-4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\frac{\pi}{4}}e^{-s^2/16} \\
[f(x) \to xf(x)] & x\,e^{-4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iD\left[\sqrt{\frac{\pi}{4}}e^{-s^2/16}\right] = -\frac{i\sqrt{\pi}}{8}se^{-s^2/16} \\
[f(x) \to e^{i5x}f(x)] & x\,e^{-4x^2+i5x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\frac{i\sqrt{\pi}}{16}(s-5)e^{-(s-5)^2/16}
\end{array}$$

(6) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato (n è un intero).

$$(a)\quad D^2(|\cos x|) \qquad\qquad (b)\quad D^3\left((n+x)^2\,\delta_0^{(3)}\right).$$

Risp: (a) $-|\cos x| + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{\pi/2+k\pi}$. (b) $n^2\delta_0^{(6)} - 6n\delta_0^{(5)} + 6\delta_0^{(4)}$.

(7) (4 pt). Sia n un intero positivo pari, $n = 2, 4, 6, \ldots$. Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\,\delta(x^n - x)\,dx$$

Soluzione. Quando n è pari la funzione $b(x) := x^n - x$ si annulla nei punti

$$x^n - x = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 0, 1\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = nx^{n-1} - 1 \qquad\qquad |b'(0)| = 1 \qquad\qquad |b'(1)| = n-1$$

da cui si ottiene

$$\delta(x^n - x) = \delta_0 + \frac{\delta_1}{n-1}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\,\delta(x^n - x)\,dx &= \cos(0) + \frac{\cos(\pi)}{n-1} \\ &= 1 + \frac{-1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}\,.\end{aligned}$$

(8) (5 pt). Calcolare la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) di $f(x) = 1/(1-x^2)$. [Sugg: espandere f in fratti semplici come $f(x) = A/(x-x_1) + B/(x-x_2)$ e interpretare ciascun addendo come "parte principale"].

Soluzione. Posso scrivere

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{1}{x+1}\right) - P\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)$$

A questo punto, sapendo che $\mathcal{F}[P(1/x)](\lambda) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\lambda)$, ottengo

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\left[P\left(\frac{1}{x+1}\right)\right](\lambda) - \mathcal{F}\left[P\left(\frac{1}{x-1}\right)\right](\lambda)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i\lambda}\,\mathcal{F}\left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right](\lambda) - e^{-i\lambda}\,\mathcal{F}\left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right](\lambda)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}\right)\mathcal{F}\left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right](\lambda) \\
&= i\sin(\lambda)\,(-i\pi\,\mathrm{sgn}(\lambda)) = \pi\,\sin(|\lambda|)\,.
\end{aligned}$$