

|                |  |
|----------------|--|
| Cognome e Nome |  |
|----------------|--|

(1) (3 pt). Calcolare usando (a) il ramo principale, (b) il ramo “più”

(a)  $\sqrt[3]{1-i} =$

(b)  $\sqrt[3]{1-i}^{(+)} =$

(2) (2 pt). Scrivere le relazioni che legano le funzioni trigonometriche sin, cos alle rispettive funzioni iperboliche.

(3) (3 pt). Sapendo che l'equazione  $\sin z = w$  ha come soluzione  $z = \pi/6 + i$ , scrivere tutte le soluzioni.

(4) (3 pt). Enunciare il teorema della cosiddetta “stima di Cauchy” sulle derivate di una funzione analitica.

(5) (3 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=1} z e^{2/z} dz =$$

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+i)(z+3)} =$$

- (6) (3 pt). Sia  $\hat{f}(\lambda)$  la trasformata di Fourier della funzione  $f$ . Esprimere le quantità seguenti in termini di  $\hat{f}$

$$\mathcal{F}[e^{2ix}f(x)](\lambda) =$$

$$\mathcal{F}[f(-3x)](\lambda) =$$

- (7) (3 pt). Sia  $f(x) := 1/(x^3 + i)$ . Calcolare  $g := (\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)$ .

- (8) (3 pt). Sia  $f(x) := 2 + i \cos(x) - 4 \cos(2x) + 3i \sin(4x)$ . Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx =$$

- (9) (3 pt). Sia  $S_n(x)$  la somma parziale  $n$ -sima dello sviluppo in serie di Fourier in  $[-\pi, \pi]$  della funzione  $f(x) = (1+x)^5$ . Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\pi) =$$

- (10) (4 pt). Semplificare le seguenti espressioni, nel senso delle distribuzioni

$$D^2|x| =$$

$$D(\operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(x+1)) =$$

|                |  |
|----------------|--|
| Cognome e Nome |  |
|----------------|--|

- (1) (3 pt). Calcolare usando (a) il ramo principale, (b) il ramo “più”

(a)  $\sqrt[3]{-1-i} =$

(b)  $\sqrt[3]{-1-i}^{(+)} =$

- (2) (2 pt). Trovare un valore di  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $\log(e^z) \neq z$ . Se non esiste dire semplicemente che non esiste (log è il ramo principale del logaritmo).

- (3) (3 pt). Quante sono le singolarità isolate della funzione  $f(z) = e^{z^2}/(\cos(z) + 2)$ ? Nel caso fossero dei poli, di che ordine sono?

- (4) (4 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{ze^{\cos z}} dz =$$

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz =$$

- (5) (3 pt). Sia  $\hat{f}$  la trasformata di Fourier della funzione  $f$ . Esprimere le quantità seguenti in termini di  $\hat{f}$

$$\mathcal{F}[e^{2ix}f(x)](\lambda) =$$

$$\mathcal{F}[f''(x)](\lambda) =$$

(6) (2 pt). Sia  $f(x) := ixe^{-x^4}$ . Calcolare  $g := (\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)$ .

(7) (3 pt). Sia  $f(x) := 2 - \sin(x) + i \cos(2x) + 3i \sin(3x)$ . Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx =$$

(8) (3 pt). Sia  $S_n(x)$  la somma parziale  $n$ -sima dello sviluppo in serie di Fourier in  $[-\pi, \pi]$  della funzione  $f(x) = e^x$ . Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\pi) =$$

(9) (4 pt). Semplificare le seguenti espressioni, nel senso delle distribuzioni

$$D(e^x \operatorname{sgn}(x)) =$$

$$\sin x \delta'_0 =$$

(10) (3 pt). Enunciare il teorema dei residui.

|                |  |
|----------------|--|
| Cognome e Nome |  |
|----------------|--|

(1) (4 pt). Calcolare usando (a) il ramo principale, (b) il ramo “più”

(a)  $\sqrt[3]{-1-i} =$

(b)  $\sqrt[3]{-1-i}^{(+)} =$

(2) (2 pt). Sapendo che l'equazione  $\sin z = w$  ha come soluzione  $z = \pi/3 + i$ , scrivere tutte le soluzioni.

(3) (3 pt). Enunciare il teorema della cosiddetta “stima di Cauchy” sulle derivate di una funzione analitica.

(4) (3 pt). Supponendo di sviluppare la funzione  $f(z) = e^z/(1+z^2)$  in serie di potenze con centro in  $z = 1$ , qual è il raggio di convergenza della serie che si ottiene?

(5) (2 pt). Si considera la spezzata (aperta)  $\gamma = [0, 1, i, 1+i, 2]$ . Calcolare

$$\int_{\gamma} e^z dz.$$

(6) (4 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin(2/z) dz =$$

$$\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2 - 4} =$$

(7) (2 pt). Trovare e classificare tutte le singolarità isolate di  $f$  (per i poli determinare l'ordine)

$$f(z) := \frac{\sin z}{z^4(z^2 + 4)}$$

(8) (3 pt). Enunciare il teorema sulla convergenza *puntuale* della serie di Fourier di una funzione  $2\pi$ -periodica

(9) (4 pt). Semplificare le seguenti espressioni, nel senso delle distribuzioni

$$\sin x \delta'_0 =$$

$$D(\operatorname{sgn}(x+1) \operatorname{sgn}(x+2)) =$$

(10) (3 pt). Sapendo che la trasformata di Fourier della funzione  $f(x)$  è data da

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{1 + i\lambda^3},$$

Determinare la trasformata di Fourier della funzione  $h(x) = 1/(1 + ix^3)$ , esprimendo il risultato in termini di  $f$ .

|                |  |
|----------------|--|
| Cognome e Nome |  |
|----------------|--|

(1) (4 pt). Calcolare (Arg è l'argomento principale)

(a)  $\text{Arg}(ie^{i3\pi/4}) =$

(b)  $\arg_+(-ie^{i\pi/4}) =$

(2) (4 pt). Enunciare il teorema che fornisce la formula integrale di Cauchy (nella forma più generale).

(3) (3 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z-2)} dx =$$

(4) (3 pt). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  continua e sia  $\gamma : [a, b] \mapsto G$  un cammino RAT. Si definisce *integrale di  $f$  lungo  $\gamma$*  la quantità

$$\int_{\gamma} f :=$$

(5) (4 pt). Determinare l'ordine di grandezza  $\mathcal{O}(z^n)$  nel limite  $z \rightarrow 0$

(a)  $\exp[\sin z - z] - 1$

(b)  $\log(\cos(z^2))$

(6) (3 pt). Scrivere lo sviluppo in serie nell'origine (sia lo sviluppo completo che i primi 3 termini non nulli. Es:  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$ )

$\sinh z =$

(7) (3 pt). Calcolare

$|(-i)^i| =$

(8) (3 pt). Se  $w \neq 0$ , le soluzioni dell'equazione  $\exp z = w$  sono date da

$z =$

Il numero delle soluzioni è uguale a: \_\_\_\_\_. Le soluzioni si trovano su (dare una descrizione geometrica dell'insieme delle soluzioni) ...

(9) (3 pt). Sia  $f$  una funzione analitica sul quadrato  $R$  di vertici  $0, 5, 5 + 5i, 5i$ . Supponendo che valga  $|f(z)| \leq 2$  per ogni  $z \in R$ , come posso migliorare la quantità  $|f''(z_0)|$  in cui  $z_0 = 4 + 3i$ ?

|                |  |
|----------------|--|
| Cognome e Nome |  |
|----------------|--|

(1) (4 pt). Enunciare il teorema dei residui.

(2) (4 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^5} dz =$$

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{\cos z}} dz =$$

(3) (3 pt). Per calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^5}$$

si può trovare una relazione fra  $I$  e un integrale  $J$  sul piano complesso

$$J = \int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^5}$$

in cui  $\gamma$  è un opportuno cammino chiuso. Disegnare accuratamente  $\gamma$ .

- (4) (4 pt). Sia  $\hat{f}(\lambda)$  la trasformata di Fourier della funzione  $f$ . Esprimere le quantità seguenti in termini di  $\hat{f}$

$$\mathcal{F}[f(3x+2)](\lambda) =$$

$$\mathcal{F}[x^3 f(x)](\lambda) =$$

- (5) (4 pt). Sia

$$f(x) = \frac{x e^{ix}}{1+x^4}.$$

Cosa posso affermare sul grado di derivabilità della trasformata di Fourier  $\hat{f}$  di  $f$ ?

- (6) (3 pt). Sia  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e sia  $g := \mathcal{F}(\mathcal{F}f)$  (vale a dire  $g$  si ottiene applicando due volte la trasformata di Fourier alla funzione  $f$ ). Quale relazione esiste fra  $f$  e  $g$ ?

- (7) (4 pt). Sia  $f \in L_2[-\pi, \pi]$  e sia

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)].$$

lo sviluppo in serie di Fourier di  $f$ . L'uguaglianza di Parseval lega una opportuna norma di  $f$  ai coefficienti della serie di Fourier. Cosa afferma di preciso?

- (8) (4 pt). (a) Quante sono le singolarità isolate della funzione  $f(z) = z^3/(z^5+3)^2$ ? (b) Nel caso fossero dei poli, di che ordine sono?

|                |  |
|----------------|--|
| Cognome e Nome |  |
|----------------|--|

- (1) (3 pt). Scrivere lo sviluppo in serie nell'origine (sia lo sviluppo completo che i primi 3 termini non nulli. Es:  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$ )

$$\log(1 - z) =$$

- (2) (3 pt). Enunciare il teorema della cosiddetta “stima di Cauchy” sulle derivate di una funzione analitica.

- (3) (4 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=1} \sin(e^{-z}) dz =$$

$$\int_{|z|=1} \sinh(3/z) dz =$$

- (4) (2 pt). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  analitica e sia  $z_0 \in G$  tale che  $f(z_0) = 0$ . Il punto  $z_0$  è detto uno *zero di molteplicità*  $m$ , con  $m$  intero positivo, se ...

- (5) (3 pt). Calcolare

$$\text{Res} \left( \frac{\cos z}{z^5}, 0 \right) =$$

(6) (3 pt). Enunciare il teorema di Liouville

(7) (3 pt). Sia  $f \in L_2[-\pi, \pi]$ . L'uguaglianza di Parseval lega una opportuna norma di  $f$  ai coefficienti della serie di Fourier di  $f$ . Cosa afferma di preciso?

(8) (4 pt). Sia  $\hat{f}(\lambda)$  la trasformata di Fourier della funzione  $f$ . Esprimere le quantità seguenti in termini di  $\hat{f}$

$$\mathcal{F}[f(2x+1)](\lambda) =$$

$$\mathcal{F}[x^2 f](\lambda) =$$

(9) (2 pt). Sia

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2+x^6}.$$

Cosa posso affermare sul grado di derivabilità della trasformata di Fourier  $\hat{f}$  di  $f$ ?

(10) (3 pt). Sia  $b \in C^1$  e supponiamo che  $b$  abbia zeri semplici e isolati nei punti  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , allora la “funzione composta” della delta di Dirac è definita come

$$\delta[b(x)] :=$$

|                |  |
|----------------|--|
| Cognome e Nome |  |
|----------------|--|

- (1) (3 pt). Scrivere lo sviluppo in serie nell'origine (sia lo sviluppo completo che i primi 3 termini non nulli. Es:  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$ )

$$\log(1 - z) =$$

- (2) (3 pt). Le soluzioni dell'equazione  $z^n = w$  sono date dalla formula

$$z =$$

Le soluzioni si trovano (descrivere geometricamente l'insieme delle soluzioni) ...

- (3) (4 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=1} z \exp(1/z) dz =$$

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos(3z)}{z} dz =$$

- (4) (3 pt). Enunciare il teorema che fornisce la formula integrale di Cauchy (nella forma più generale).

- (5) (3 pt). Quante sono le singolarità isolate della funzione  $f(z) = z^2/(\cos(z) - 2)$ ? Nel caso fossero dei poli, di che ordine sono?

(6) (2 pt). Sia  $G$  aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \mapsto \mathbb{C}$  analitica e sia  $z_0 \in G$  tale che  $f(z_0) = 0$ . Il punto  $z_0$  è detto uno *zero di molteplicità*  $m$ , con  $m$  intero positivo, se ...

(7) (3 pt). Calcolare

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\cos(z^2)}{z^5}, 0 \right) =$$

(8) (3 pt). Sia  $f \in L_2[-\pi, \pi]$ . L'uguaglianza di Parseval lega una opportuna norma di  $f$  ai coefficienti della serie di Fourier di  $f$ . Cosa afferma di preciso?

(9) (3 pt). Enunciare il teorema sulla convergenza *puntuale* della serie di Fourier di una funzione  $2\pi$ -periodica

(10) (3 pt). Sia

$$f(x) = \frac{4 + x + x^2}{1 + x^2 + x^6}.$$

Cosa posso affermare sul grado di derivabilità della trasformata di Fourier  $\hat{f}$  di  $f$ ?