

Laboratorio di Calcolo X:

Il circo delle pulci

Prologo:

Il 9 Gennaio 1912 Ebenezer Plympton morì a Cambridge, Massachusett, dopo una lunga vita passata a girare il mondo con il suo circo. Attrazione principale dello spettacolo erano le celebri pulci unidimensionali di Plympton, animaletti in grado di compiere sorprendenti evoluzioni obbedendo ai comandi che Ebenezer impartiva a colpi di fischietto. Alla fine di ogni spettacolo, Plympton si prendeva buona cura delle pulci: le nutriva e poi le riponeva al caldo in un cappello per farle riposare in attesa dello spettacolo successivo. Le pulci, però, tentavano di evadere saltando a destra e a manca. Alcune riuscivano nell'intento, altre fallivano e non restava loro che valutare lo sforzo compiuto per poi rassegnarsi a lavorare nello spettacolo successivo.

In questa esercitazione, si propone un modello che descrive le vicende delle pulci fra uno spettacolo e l'altro e si chiede di scrivere un programma per valutare il successo delle operazioni di fuga. Le unità di misura del modello sono irrilevanti e, naturalmente, Plympton il domatore di pulci non è mai esistito.

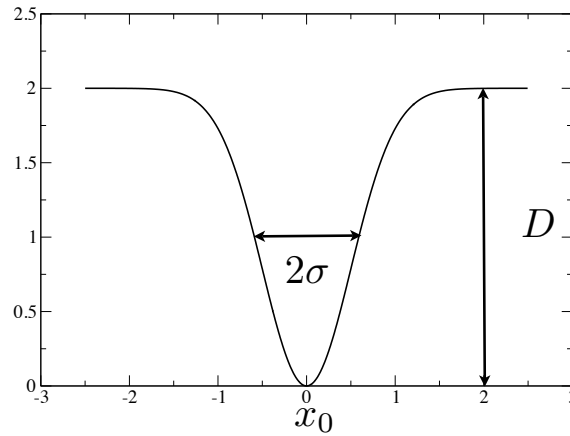


Figura 1: Il cappello del signor Plympton

Modello:

Sia N_PULCI il numero totale di pulci alla fine dello spettacolo.

Ogni pulce tenta di scappare compiendo un numero totale $MAX_JUMP=10^4$ di salti, ad intervalli di tempo pari a $dt = 10^{-4}$. La posizione iniziale della pulce è un numero casuale uniformemente distribuito in $(-0.5, 0.5)$.

Il salto viene modellizzato come effetto di due contributi. Il primo è uno spostamento di ampiezza estratta da una probabilità Gaussiana. L'ampiezza dello spostamento è moltiplicata per un fattore che dipende dalla quantità di cibo, $\alpha \in [0, 5]$, che è stata distribuita (tanto più le pulci mangiano - entro certi limiti - tanto più hanno energia per saltare). Il secondo contributo ha origine dal cappello di Mr. Plympton che esercita sulla pulce una forza di richiamo. Questa forza si può esprimere come la derivata della forma del cappello,

forma che è ben descritta dalla funzione

$$h(x) = D * \left[1. - e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \right] \quad (1)$$

con $D = 2.$, $x_0 = 0.$, $\sigma = 0.5$ (vedi figura 1). In queste condizioni, la posizione di una pulce al salto $k + 1$ è legata alla posizione della pulce al salto k dall'espressione:

$$x_{k+1} = x_k - dt * \left(\frac{dh(x)}{dx} \right)_{x=x_k} + \left(\sqrt{2 * dt * \alpha} \right) * g_{k+1} \quad (2)$$

dove $k=1,...,MAX_JUMP$ e g_{k+1} è un numero pseudo-aleatorio con distribuzione Gaussiana a media nulla e varianza pari a uno.

Una pulce riesce ad evadere se, di salto in salto, raggiunge o supera le posizioni $x_1^\dagger = -5 * \sigma$ o $x_2^\dagger = 5 * \sigma$. Una volta raggiunta o superata questa soglia, la pulce è libera e smette di saltare anche se ha fatto meno di MAX_JUMP salti.

Quando tutte le pulci hanno completato i loro salti, si valuta il successo del tentativo di evasione di massa calcolando la frazione Φ di pulci che sono riuscite a fuggire

$$\Phi = \frac{N_OUT}{N_PULCI} \quad (3)$$

dove N_OUT è il numero di pulci che ha raggiunto o superato le soglie indicate in precedenza.

Si valuta poi il tentativo delle pulci che non sono riuscite ad evadere stimando di quanto si sono allontanate in media dalla loro posizione iniziale. La stima si effettua calcolando

$$\Delta^2 = \frac{1}{N_IN} \sum_{j=1}^{N_IN} (XF_j - X0_j)^2 \quad (4)$$

dove N_IN è il numero di pulci rimaste dentro il cappello e XF_j è la posizione raggiunta alla fine dei suoi salti dalla j -esima pulce prigioniera partendo da $X0_j$.

Il programma deve:

1. Utilizzare direttive al precompilatore per definire i parametri del modello.
2. Chiedere all'utente di inserire il numero di pulci $0 < N_PULCI \leq N_MAX = 100$ e α . Se i valori inseriti non rispettano le condizioni definite, devono essere chiesti di nuovo finchè non sono validi.
3. Ottenere un valore iniziale per la posizione della pulce e conservarlo in una variabile d'appoggio.
4. Usare un ciclo **do while** per calcolare la posizione della pulce ai successivi salti utilizzando la formula (2). Il ciclo deve proseguire fino a che la pulce non compie il numero massimo di salti possibili o non evade. All'interno del ciclo si dovrà:

- calcolare numericamente il valore della derivata della forma del cappello, eq. (1), valutata alla posizione corrente, x , della pulce. **Il calcolo della derivata deve essere effettuato mediante una funzione che restituisce un double ed ha per argomenti la funzione h e x . h deve a sua volta essere calcolata in una funzione che restituisce un double ed ha per argomento x . All'interno della funzione, la derivata si ottiene come**

$$der = \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \quad (5)$$

con $\epsilon = 10^{-10}$;

- calcolare l'ampiezza Gaussiana del salto, g_{k+1} e moltiplicarla per $\sqrt{2 * dt * \alpha}$. **Il valore di g_{k+1} deve essere ottenuto mediante una funzione che restituisce un double. Per generare g_{k+1} con distribuzione Gaussiana usare la seguente procedura:**
 - a) **Generare (usando `rand48()`) due variabili casuali reali r_1 e r_2 con distribuzione uniforme nell'intervallo aperto $[0,1)$.**
 - b) **Per $r_2 \neq 0$, calcolare la variabile $g = \sin(2\pi r_1) \sqrt{-2\ln(r_2)}$. Se $r_2 = 0$, ripetere l'estrazione. La variabile g costruita in questo modo, ha una distribuzione Gaussiana di media 0 e varianza 1.**
- calcolare la posizione della pulce dopo il salto via la (2);
- valutare dopo ogni salto se la pulce è riuscita ad evadere confrontando la sua posizione con le soglie definite nel testo. Se la pulce è evasa il `do while` si deve interrompere, se la pulce è prigioniera il ciclo si deve ripetere.
- se, dopo MAX_JUMP salti, la pulce è ancora nel cappello, incrementare un contatore che registra il numero di evasioni fallite e salvare la posizione iniziale e quella finale della pulce in due array unidimensionali;

5. Ripetere le operazioni 3. e 4. per tutte le pulci.
6. Calcolare e stampare sullo schermo (con un messaggio chiaro) la frazione di pulci fuggite.
7. Valutare gli sforzi delle pulci ancora prigioniere calcolando e stampando sullo schermo (con un messaggio chiaro) il valore di Δ^2 . **Il calcolo di Δ^2 deve avvenire mediante un'apposita funzione che restituisce un double ed ha per argomenti gli arrays con le posizioni iniziale e finale della prigioniera ed il loro numero.**

Se avete ancora energie, o a casa, può essere interessante provare a capire come vanno le fughe in funzione dei parametri α e D ...ovvero cosa può fare Ebenezer Plympton per ridurre il numero di evasioni? Provate a spiegare l'andamento osservato sulla base della figura e dell'equazione (2).