12.3.3 Shankar

Una particella è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(\rho,\varphi) = A\, e^{-\rho^2/2\Delta^2} \cos^2\varphi$$

Quali sono, e che probabilità hanno, i possibili risultati di una misura di L_z

Si ricorda che le funzioni $\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$ soddisfano

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, \Phi_m^*(\varphi)\, \Phi_n(\varphi) = \delta_{mn} \qquad m = \frac{\ell_z}{\hbar} = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Osserviamo che $\cos^2\varphi = \frac{1}{4}\left[e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi} + 2\right]$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\left[\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\Phi_0(\varphi)\right]$$

$$\Rightarrow \psi(\rho,\varphi) = \tilde{A}\, e^{-\rho^2/2\Delta^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi} + 2\right]$$

$$\equiv \tilde{A}\, R(\rho)\left[\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\Phi_0(\varphi)\right]$$

con $\tilde{A} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} A$, $R(\rho) = e^{-\rho^2/2\Delta^2}$ o

anche

$$\psi(\rho,\varphi) = N_\rho\, R(\rho)\, N_\varphi\left[\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\Phi_0(\varphi)\right]$$

con $N_\rho N_\varphi = \tilde{A}$

$$\underset{\text{costante}}{N_\rho}\ \underset{\text{costante}}{N_\varphi}$$

questa scrittura è funzionale all'interpretazione di $\psi(\rho,\varphi)$ come "ampiezza di probabilità" delle variabili indipendenti ρ e φ o (il che è lo stesso visto che l'indice m è associato univocamente alla sola φ nella funzione d'onda) anche ρ ed m. Consideriamo infatti

$$|\psi(\rho,\varphi)|^2 = |N_\rho\, R(\rho)|^2 \, |N_\varphi \, [\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\Phi_0(\varphi)]|^2$$

dove N_ρ e N_φ sono due costanti che garantiscono la normalizzazione di $\psi(\rho,\varphi)$, i.e.

$$1 = |N_\rho N_\varphi|^2 \underbrace{\int_0^\infty d\rho\, \rho\, |R(\rho)|^2 \int_0^\infty d\varphi\, |\Phi_2(\varphi) + \Phi_2(\varphi) + 2\Phi_0(\varphi)|^2}_{\int_0^\infty d\rho\, \rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, |R(\rho)|^2 |\Phi_2(\varphi)+\ldots|^2}$$

Dato che

$$|\psi(\rho,\varphi)|^2 = p(\rho)\, \mathcal{P}_m(\varphi)$$

posso anche interpretare $p(\rho) = |N_\rho|^2 |R(\rho)|^2$ come la densità di probabilità di trovare il sistema in $\rho, \rho+d\rho$ e $\mathcal{P}_m(\varphi)$ come la

$\hookrightarrow = |N_\varphi|^2 |\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\Phi_0|^2$

densità di probabilità di trovare il sistema in $\varphi, \varphi + d\varphi$ e con un certo valore di m. In altre parole, $\rho_m(\varphi)$ è la densità di probabilità marginale per il sistema di essere nello stato di momento angolare m e in $\varphi, \varphi + d\varphi$.

Per avere l'espressione esplicita di questa densità di probabilità bisogna calcolare N_φ, cosa che si può fare dalla condizione di normalizzazione

$$1 = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho_m(\varphi) = N_\varphi^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \Big\{ \left(\Phi_2^*(\varphi) + \Phi_{-2}^*(\varphi) + 2\,\Phi_0^*(\varphi) \right) \times \left(\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\,\Phi_0^*(\varphi) \right) \Big\}$$

Ricordando che $\int_0^{2\pi} d\varphi\, \Phi_m^*(\varphi)\, \Phi_n(\phi) = \delta_{nm}$, gli unici termini non nulli nel prodotto in parentesi graffe sono quelli "uniti" dalle linee.

$$\Rightarrow \quad 1 = |N_\varphi|^2 \left[1 + 1 + 4 \right]$$

$$\Rightarrow \quad N_\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Ricapitolando

$$\psi(\rho, \varphi) = N_\rho\, R(\rho)\, \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\, \Phi_0(\varphi) \right]$$

Ora posso "leggere" questa espressione e dire che la probabilità di ogni valore di m è il coefficiente (modulo quadro) della corrispondente autofunzione di l_z

$$\Rightarrow \quad P(l_z = 2\hbar) = 1/6$$

$$P(l_z = 0) = 2/3$$

$$P(l_z = -2\hbar) = 1/6$$

Soluzione alternativa (più standard)

$$\psi(\rho,\varphi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} A \, e^{-\rho^2/2\Delta^2} \left[\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\,\Phi_0(\varphi) \right]$$

1/ Normalizzo lo stato per determinare A:

$$1 = \int_0^\infty d\rho \, \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \, |\psi(\rho,\varphi)|^2$$

$$= \frac{2\pi}{16} |A|^2 \int_0^\infty d\rho\, \rho\, e^{-\rho^2/\Delta^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \, [\underbrace{\Phi_2^*(\varphi)}_{1} + \underbrace{\Phi_{-2}^*(\varphi)}_{1} + \underbrace{\Phi_0^*(\varphi)\,2}_{4}] \times [\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\,\Phi_0(\varphi)]}_{6}$$

$$= \frac{2\pi}{16} \times 6\,|A|^2 \frac{\Delta^2}{2} \int_0^\infty dy \, e^{-y} \qquad (y = \rho^2)$$

$$= |A|^2 \pi \frac{3}{4} \Delta^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \frac{1}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \psi(\rho,\varphi) = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \, e^{-\rho^2/2\Delta^2} \left[\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\Phi_0(\varphi) \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}\,\Delta} e^{-\rho^2/2\Delta^2} \left[\Phi_2(\varphi) + \Phi_{-2}(\varphi) + 2\,\Phi_0(\varphi) \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[|l_z = 2\rangle + |l_z = -2\rangle + 2\, |l_z = 0\rangle \right]$$

con $$\langle \rho\, \varphi \,|\, l_z = m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\Delta} e^{-\rho^2/2\Delta^2}\, \Phi_m(\varphi)$$

$$= R(\rho)\, \Phi_m(\varphi)$$

con $$\int_0^\infty d\rho\, \rho\, |R(\rho)|^2 = \frac{1}{2\Delta^2} \int_0^\infty d\rho\, \rho\, e^{-\rho^2/\Delta^2}$$

$$= 1$$

$\Rightarrow$ le probabilità sono il modulo quadro di coefficienti

12.3.4 Shankar.

$$\psi(\rho,\varphi) = A e^{-\rho^2/2\Delta^2}\left[\frac{\rho}{\Delta}\cos\varphi + \sin\varphi\right]$$

1/ Le vogliamo scrivere nella forma

$$\psi(\rho,\varphi) = \sum_m c_m R_m(\rho)\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad \left[\int_0^\infty d\rho\, \rho\, |R_m(\rho)|^2 = 1\right.$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \sum_m c_m\, |m (= \hbar\, l_z)\rangle$$

Ora $\psi(\rho,\varphi) = \frac{A}{2} e^{-\rho^2/2\Delta^2}\left[\left(\frac{\rho}{\Delta} - i\right)e^{i\varphi} + \left(\frac{\rho}{\Delta}+i\right)e^{-i\varphi}\right]$

$$= \sqrt{2\pi}\,\frac{A}{2}\, e^{-\rho^2/2\Delta^2}\left[\left(\frac{\rho}{\Delta}-i\right)\Phi_1(\varphi) + \left(\frac{\rho}{\Delta}+i\right)\Phi_{-1}(\varphi)\right]$$

$$= \tilde{A}\, F_1(\rho)\,\Phi_1(\varphi) + \tilde{A}\, F_2(\rho)\,\Phi_{-1}(\varphi)$$

$$\equiv c_1 a_1 F_1(\rho)\Phi_1(\varphi) + c_2 a_2 F_2(\rho)\Phi_{-1}(\varphi)$$

dove a_i: $\int_0^{+\infty} d\rho\, \rho\, |a_i|^2 |F_i(\rho)|^2 = 1 \quad i = 1, 2 \quad (*)$

Ora: $1 = \int_0^\infty d\rho\, \rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, |\psi(\rho,\varphi)|^2$

$$= \int_0^\infty d\rho\, \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[c_1^* a_1^* F_1^*(\rho)\Phi_1^*(\varphi) + c_2^* a_2^* F_2^*(\rho)\Phi_{-1}^*(\varphi)\right]$$

$$\times\left[c_1 a_1 F_1(\rho)\Phi_1(\varphi) + c_2 a_2 F_2(\rho)\Phi_{-1}(\varphi)\right]$$

Poiché $\int_0^{2\pi} d\varphi\, \Phi_n^*(\varphi)\, \Phi_m(\varphi) = \delta_{mn}$, gli unici termini non nulli negli integrali qui sopra sono

$$\int_0^{\infty} d\rho\, \rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, |c_1|^2 |a_1|^2 |F_1(\rho)|^2 \Phi_1^*(\varphi)\, \Phi_1(\varphi)$$

$$+ \int_0^{\infty} d\rho\, \rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, |c_2|^2 |a_2|^2 |F_2(\rho)|^2 \Phi_2^*(\varphi)\, \Phi_2(\varphi)$$

$$= |c_1|^2 + |c_2|^2$$, avendo utilizzato (*)

$$\Rightarrow |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \rightarrow |c_1|^2 = |c_2|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}} |m=1\rangle + \frac{e^{i\delta_2}}{\sqrt{2}} |m=-1\rangle$$

$$\Rightarrow P(m=1 \ (\Leftrightarrow \ell_z = \hbar)) = P(m=-1 \ (\Leftrightarrow \ell_z = -\hbar)) = \frac{1}{2}.$$