

Dipartimento di Fisica
Universita' "La Sapienza"

CIRCUITI ELETTRICI

Appunti del Corso di Esecitazione
di Fisica Sperimentale per Chimica

Prof. G. D'Agostini

A.A. 1993/94

€ 1.29
139 / 2500

1	Generalità sui circuiti in corrente continua	3
2	Circuito RC	4
2.1	Carica e scarica di un condensatore	4
2.2	Regime sinusoidale	11
2.2.1	Tensione ai capi del condensatore	11
2.2.2	Tensione ai capi del resistore	15
2.2.3	Impedenza complessa	20
2.2.4	Circuito RC con il metodo simbolico	22
2.3	Circuito derivatore e circuito integratore	23
3	Circuito CL	26
4	Circuito RLC	31
4.1	Scarica di un condensatore in un circuito RLC	31
4.2	RLC serie in regime sinusoidale	34
4.3	Soluzione del circuito <i>RLC</i> serie mediante il metodo simbolico	37
4.4	Risonanza	39
5	Potenza erogata da un circuito in regime sinusoidale	44
6	Oscilloscopio a raggi catodici	44
7	Appendice: richiami sulle operazioni con numeri complessi	45

1 Generalità sui circuiti in corrente continua

Per questa parte si rimanda ad altri testi:

1. Legge di Ohm, forza elettromotrice, circuito elettrico
 - ABP¹: par. 5.3, 5.5, 5.8;
 - AI²: par. 1, 2.1.
2. Leggi di Kirchhoff, partitore di tensione, metodo di Maxwell
 - ABP: par. 5.10;
 - AI: par. 2.2;
 - Sv³: par. VI-7.
3. Teorema di sovrapposizione, teorema di reciprocità
 - AI: par. 2.3, 2.4;
 - Sv: par. VI-6.
4. Teorema di Thévenin
 - AI: par. 2.6.
5. Ponte di Wheatstone
 - AI: par. 2.6.
6. Effetto Joule, trasferimento di potenza
 - ABP: par. 5.9;
 - Sv: par. VI-11.
7. Misure di corrente, tensione, resistenza
 - AI: par. 4.2.1, 4.2.2, 4.3.1, 4.3.2, (4.4.1), 4.4.2, 4.4.3.

¹ABP: E. Amaldi, R. Bizzarri e G. Pizzella, "Fisica Generale - Elettromagnetismo, relatività, ottica", Zanichelli, Bologna, 1986.

²AI: M. Alessio e S. Improta: "Appunti delle lezioni di Esperimentazione Fisica II - Misurazioni in corrente continua", Dispensa del Dipartimento di Fisica, A.A. 1983/84

³Sv: M. Severi, "Introduzione alla Esperimentazione Fisica", Zanichelli, Bologna, 1982.

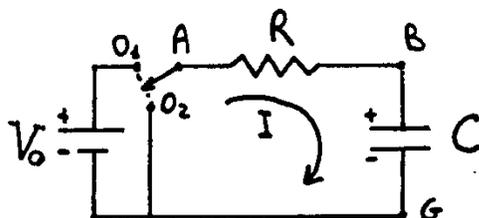


Fig. 1

2 Circuito RC

2.1 Carica e scarica di un condensatore

Analizziamo il circuito in Fig. 1, composto da un generatore di tensione continua, un resistore di resistenza R e un condensatore di capacità C . Attraverso il commutatore posto in A è possibile includere o escludere il generatore nel circuito.

1. Circuito chiuso su O_1 : supponiamo che il commutatore sia stato nella posizione O_2 per un tempo abbastanza lungo che il condensatore sia completamente scarico. All'istante $t = 0$ si commuta su O_1 . Per risolvere il circuito, scegliamo (arbitrariamente) il verso positivo della corrente quello orario (come in figura). Dovendo essere pari a zero la somma delle cadute di potenziale lungo un circuito chiuso, otteniamo:

$$V_0 - IR - V_C = 0, \quad (1)$$

ovvero

$$V_0 - \frac{dQ}{dt}R - \frac{Q}{C} = 0. \quad (2)$$

Con questa scelta del verso della corrente, una corrente positiva carica il condensatore⁴: $I = \frac{dQ}{dt}$.

⁴E' da notare che se si fosse scelto come positivo il verso antiorario, l'equazione 1) sarebbe diventata $-V_0 - IR + V_C = 0$. L'apparente contraddizione si risolve osservando che in questo caso il verso positivo della corrente è quello che scarica il condensatore: $I = -\frac{dQ}{dt}$, riottenendo così la 2).

Dalla 2) otteniamo:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC} \quad (3)$$

$$RC \frac{dQ}{dt} = CV_0 - Q \quad (4)$$

$$\frac{dQ}{CV_0 - Q} = \frac{dt}{RC} \quad (5)$$

La soluzione è :

$$-\ln \frac{CV_0 - Q}{CV_0 - Q_0} = \frac{t}{RC}, \quad (6)$$

dove $Q_0 = Q(t = 0) = 0$, date le condizioni iniziali. Otteniamo per la carica elettrica sulle armature e per la tensione ai capi i seguenti andamenti in funzione del tempo.

$$Q(t) = CV_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (7)$$

$$V_C(t) = V_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (8)$$

$\tau = RC$ ha quindi il significato di costante di tempo di carica. E' da notare che, per la convenzione adottata, con Q si intende la carica sull'armatura connessa al punto B (quella sull'altra armatura ha segno opposto), mentre V_C è pari alla differenza di potenziale fra il punto B e il punto G .

Per la corrente che fluisce nel circuito e la tensione ai capi del resistore otteniamo:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{dQ}{dt} \\ &= \frac{CV_0}{\tau} e^{-t/\tau} \\ &= \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V_R(t) &= I(t)R \\ &= V_0 e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (10)$$

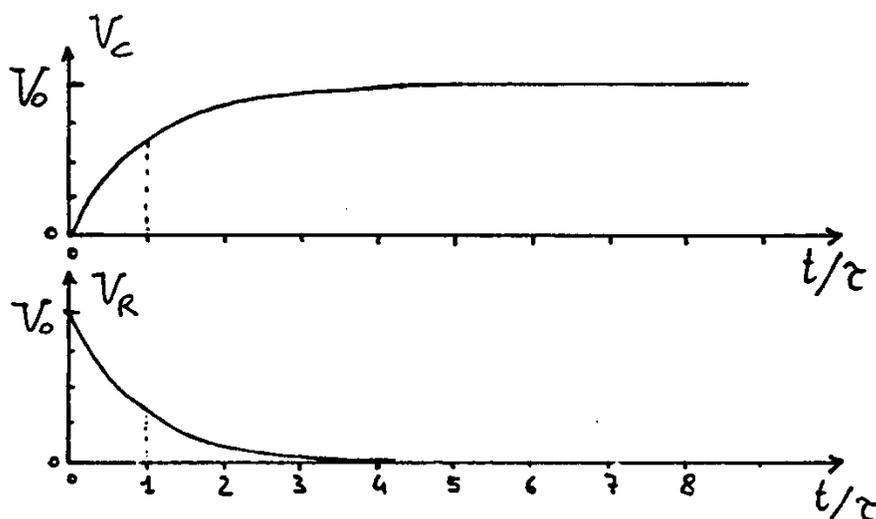


Fig. 2

Gli andamenti delle grandezze fisiche sono riportati in Fig. 2.

2. Circuito chiuso su O_2 : supponiamo di portare il commutatore A , dopo che il condensatore si è caricato completamente, nella posizione O_2 . Il condensatore si scaricherà attraverso il resistore, facendo fluire una corrente tale da annullare le cariche sulle sue armature. Analizziamo il circuito utilizzando la stessa convenzione per il verso della corrente del circuito precedente. Otteniamo:

$$\begin{aligned} -IR - V_C &= 0 \\ -\frac{dQ}{dt}R - \frac{Q}{C} &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{t}{\tau} \quad (11)$$

Risolvendo l'equazione e ricordando che la condizione iniziale della carica del condensatore è $Q_0 = CV_0$, otteniamo:

$$Q(t) = CV_0 e^{-t/\tau} \quad (12)$$

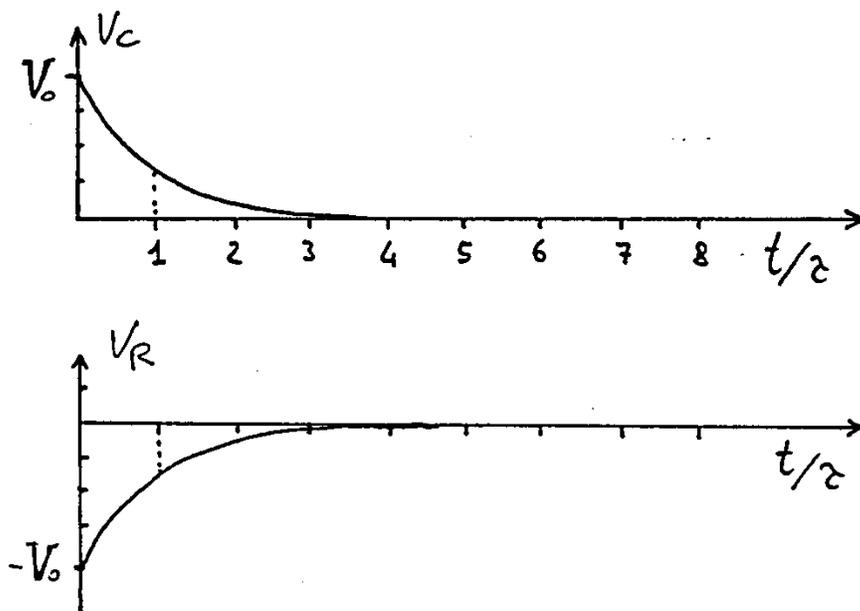


Fig. 3

$$V_C(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad (13)$$

$$I(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \quad (14)$$

$$V_R(t) = -V_0 e^{-t/\tau} \quad (15)$$

In Fig. 3 sono riportati gli andamenti delle grandezze fisiche.

3. Commutazione periodica fra O_1 e O_2 : se il periodo di commutazione è molto più grande della costante di tempo del circuito ($T \gg \tau$), il condensatore ha tempo di caricarsi e scaricarsi completamente ogni volta. Si può ottenere una commutazione con frequenza variabile utilizzando un segnale a *onda quadra*. Si ottengono quindi ai capi del condensatore e della resistenza gli andamenti riportati in Fig. 4.

Se $\tau \approx T$ il condensatore comincia a scaricarsi prima che abbia raggiunto la tensione del generatore e, successivamente, riprende a cari-

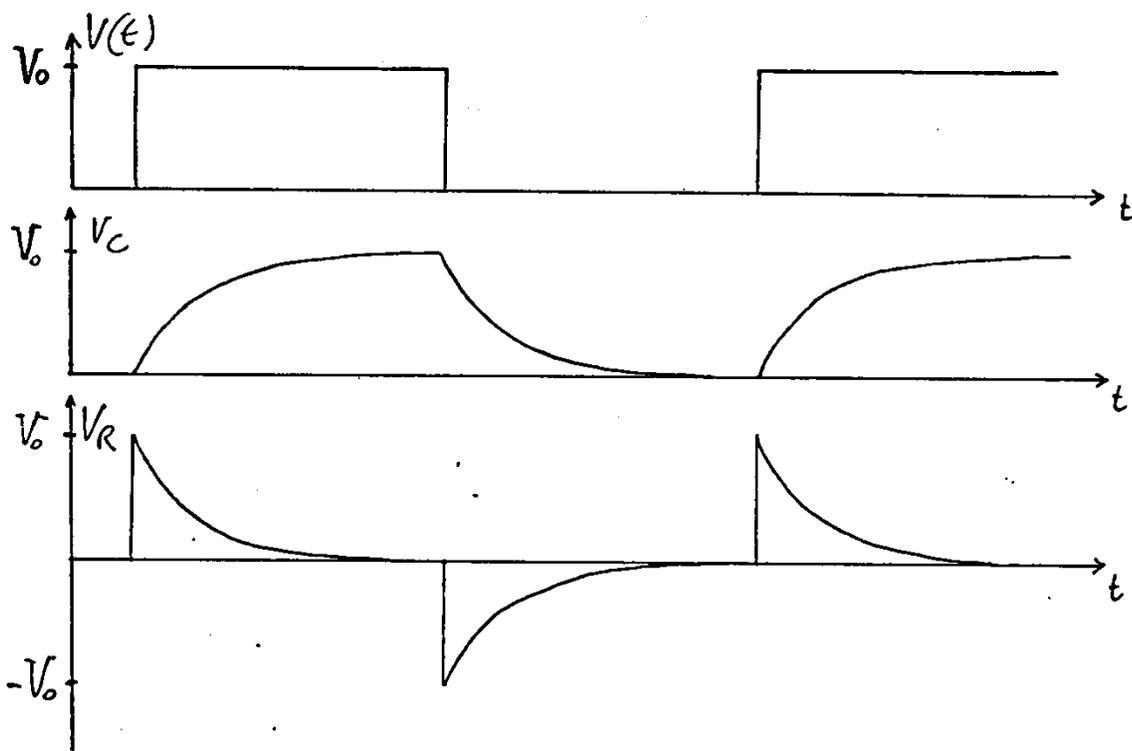


Fig. 4.

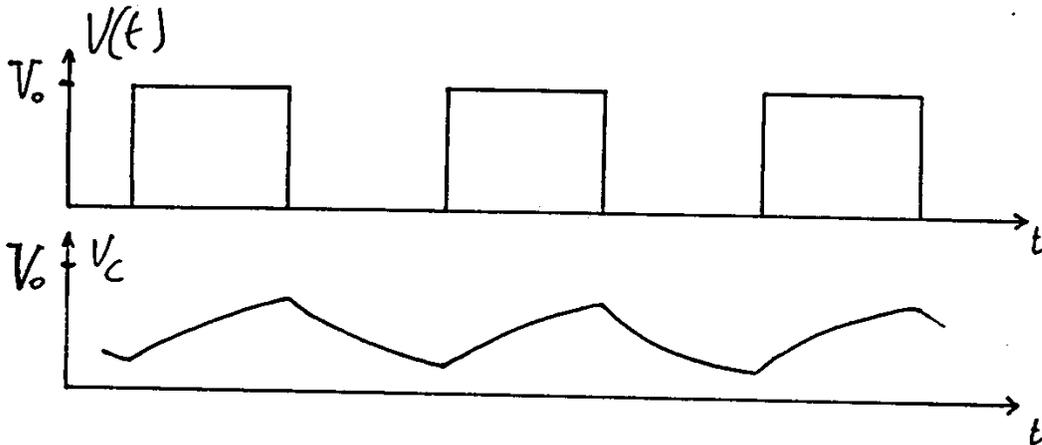


Fig. 5

carsi prima che si sia scaricato completamente. Si ottengono quindi andamenti del tipo di quello mostrato in Fig. 5.

4. Commutazione periodica fra due tensioni: il circuito di Fig. 1 può essere modificato aggiungendo una forza elettromotrice posta in serie al ramo che termina in O_2 . Chiamiamo V_1 la tensione cui è sottoposto il circuito quando è chiuso sul punto O_1 e V_2 la seconda (vedi Fig. 6).

Supponiamo, come nel caso precedente, che la commutazione fra O_1 e O_2 avvenga con un periodo molto più grande di τ , in modo tale che il condensatore abbia il tempo di raggiungere il valore di tensione del generatore a cui è connesso. Modificando opportunamente le formule 3-6) si arriva alla seguente equazione per l'andamento della carica sulle armature del condensatore in funzione del tempo, essendo il tempo t preso dall'istante della commutazione:

$$-\ln \frac{CV_{new} - Q}{CV_{new} - Q_0} = \frac{t}{\tau} \quad (16)$$

$$-\ln \frac{CV_{new} - Q}{C(V_{new} - V_{old})} = \frac{t}{\tau} \quad (17)$$

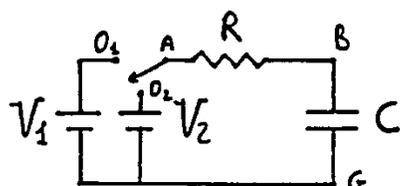


Fig. 6

dove si è preferito chiamare V_{old} e V_{new} la tensione prima e dopo la commutazione in quanto esse valgono alternativamente V_1 e V_2 . La tensione ai capi del condensatore ha quindi l'andamento

$$V_C = V_{new} - (V_{new} - V_{old})e^{-t/\tau}. \quad (18)$$

per $V_{new} = V_1$ e $V_{old} = 0$ si riottiene la formula 5) della carica di un condensatore e nel caso opposto la formula della scarica. Per la tensione ai capi del resistore - e quindi, a meno di un fattore, per la corrente - otteniamo

$$V_R = RI = R \frac{dQ}{dt} = (V_{new} - V_{old})e^{-t/\tau}. \quad (19)$$

Mentre la tensione ai capi del condensatore varia con andamento esponenziale fra V_1 e V_2 , V_R è compresa fra $\pm|V_1 - V_2|$ e il suo valor medio su un periodo è nullo.

E' interessante pensare l'onda quadra che varia fra V_1 e V_2 come la somma di un segnale continuo V_0 pari a $(V_1 + V_2)/2$ sommato ad un'onda quadra che varia fra $\pm|V_2 - V_1|/2$:

$$V = V_0 \pm \frac{|V_2 - V_1|}{2}.$$

L'andamento di V_R non dipende quindi dal livello di tensione costante. Vedremo successivamente altri modi che mostrano la funzione dei condensatori nei circuiti come *blocco* della tensione continua.

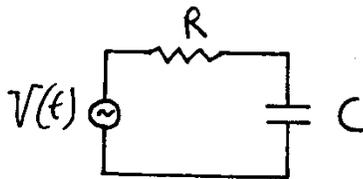


Fig. 7

2.2 Regime sinusoidale

2.2.1 Tensione ai capi del condensatore

Consideriamo adesso il circuito di Fig. 7:

La tensione applicata al circuito è dovuta a una forza elettromotrice alternata⁵:

$$V(t) = V_0 \cos \omega t. \quad (20)$$

L'equazione che descrive il circuito è:

$$V(t) - R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0. \quad (21)$$

Come noto, la soluzione generale è data dalla somma della soluzione dell'equazione omogenea associata e della soluzione particolare. Dopo un intervallo di tempo molto maggiore della costante di tempo del circuito il fenomeno di transiente successivo alla chiusura del circuito si è esaurito e quindi, volendo studiare il comportamento del circuito in regime sinusoidale, lo ignoriamo. Asintoticamente (in pratica dopo qualche τ) resta soltanto l'oscillazione forzata dal generatore, alla frequenza del generatore stesso. La soluzione particolare è data da

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (22)$$

⁵Vedi ABP, par. 8.9 fino alla (8.54). Per evitare confusione con le grandezze complesse utilizziamo d'ora in avanti le lettere maiuscole per le grandezze fisiche.

dove ϕ è la differenza di fase relativa all'oscillazione di $V(t)$ e Q_0 indica il modulo della carica massima che il condensatore acquista durante l'oscillazione (e non la carica all'istante $t = 0$, come nel paragrafo precedente). In genere si è interessati, più che alle cariche, alle tensioni. L'equazione (21) diventa quindi

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V(t) \quad (23)$$

la cui soluzione asintotica, per $t \gg \tau = RC$, è del tipo

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_{0c} \cos(\omega t + \phi) \quad (24)$$

Sostituendo la (24) nella (23) otteniamo l'equazione

$$-V_{0c}\omega\tau \sin(\omega t + \phi) + V_{0c} \cos(\omega t + \phi) = V_0 \cos \omega t \quad (25)$$

Risolvendo questa equazione si possono trovare i valori di V_{0c} e di ϕ in funzione di ω e τ . Come si vede, la presenza di funzioni trigonometriche rende la soluzione laboriosa. Si preferisce cambiare metodo e introdurre la notazione complessa per le variabili sinusoidali. Ricordando che

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (26)$$

possiamo pensare che l'equazione (25) sia parte reale dell'equazione a variabili complesse⁶.

$$\tau \frac{dv_C}{dt} + v_C = v, \quad (27)$$

dove $v = v_0 e^{j\omega t}$, ovvero $v = V_0 e^{j\omega t}$, essendo la fase di $V(t)$ posta uguale a zero. L'equazione (27) dà luogo, considerando la parte reale e la parte

⁶Nel seguito utilizziamo le lettere minuscole per le variabili complesse, con la seguente convenzione: i e v comprendono la dipendenza dal tempo; i_0 e v_0 contengono soltanto il modulo e la fase relativa alla tensione del generatore; $|i| = |i_0|$ e $|v| = |v_0|$ indicano il modulo. Quindi, per esempio, $v = v_0 e^{j\omega t} = |v_0| e^{j\phi} e^{j\omega t}$, e analoga espressione per i . La soluzione fisica si ottiene prendendo la parte reale della grandezza complessa: $V(t) (\equiv V_0 \cos \omega t) = \text{Re}\{v\} = \text{Re}\{|v_0| e^{j(\omega t + \phi)}\} = |v_0| \cos(\omega t + \phi)$, da cui segue che $V_0 = |v_0|$. Successivamente, quando avremo introdotto il metodo simbolico, la parte non dipendente dal tempo delle grandezze complesse (v_0 e i_0) verranno indicate con lettere maiuscole e simbolo di vettore (\vec{I} , \vec{V}). Per evitare confusione fra la corrente i e il numero immaginario $\sqrt{-1}$, utilizziamo il simbolo j per quest'ultimo.

immaginaria, a due equazioni differenziali disaccoppiate, :

$$\tau \frac{d}{dt} |v_C| \cos(\omega t + \phi) + |v_C| \cos(\omega t + \phi) = V_o \cos \omega t \quad (28)$$

$$\tau \frac{d}{dt} |v_C| \sin(\omega t + \phi) + |v_C| \sin(\omega t + \phi) = V_o \sin \omega t. \quad (29)$$

La soluzione fisica è data dalla parte reale⁷: $V_C = \text{Re}\{v_C\}$. E' importante notare che la parte reale e la parte immaginaria danno luogo a due equazioni differenziali disaccoppiate in quanto non compaiono potenze di grado superiore al primo in v_C .

La tensione sinusoidale $V(t)$ può essere vista come la proiezione sull'asse reale di un vettore v giacente sul piano complesso, di modulo $|v_o| = V_o$ ruotante in senso antiorario con velocità angolare ω . Anche v_C può essere visto come un vettore ruotante con la stessa velocità angolare ω . L'angolo fra i due vettori è pari alla differenza di fase ϕ (la fase di v , essendo arbitraria è stata posta pari a 0). La Fig. 8 mostra i vettori v e v_C sul piano complesso. Per $t = 0$ il vettore v è parallelo all'asse reale, mentre v_C forma con esso un angolo ϕ .

Siccome v_C deve ruotare alla stessa velocità angolare di v (la soluzione dell'equazione (23) oscilla alla stessa frequenza di $V(t)$), possiamo esplicitare la dipendenza temporale di v_C riscrivendolo come

$$v_C = v_{oC} e^{j\omega t}, \quad (30)$$

dove, ricordiamo, v_{oC} è ancora un numero complesso che contiene la fase ϕ :

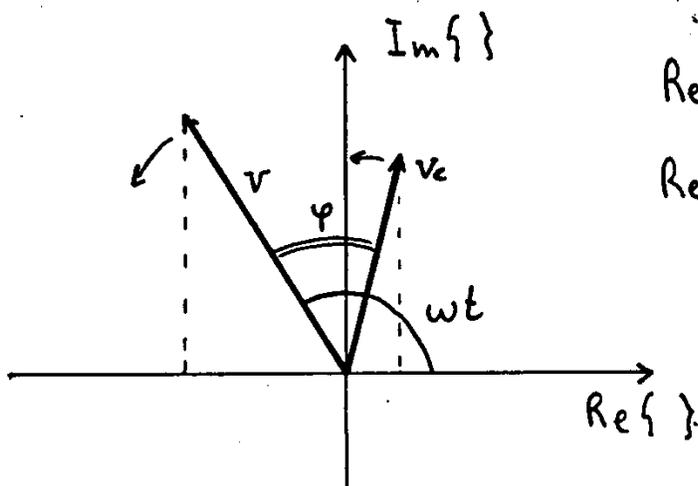
$$v_{oC} = |v_{oC}| e^{j\phi} \quad (31)$$

Sostituendo nella (27) e derivando si ottiene:

$$j\omega\tau v_{oC} e^{j\omega t} + v_{oC} e^{j\omega t} = v_o e^{j\omega t} \quad (32)$$

$$j\omega\tau v_{oC} + v_{oC} = v_o \quad (33)$$

⁷Ciò non significa che la parte reale sia più "reale" di quella immaginaria. Entrambe le equazioni sono valide. Se si fosse scelta per $v(t)$ la funzione $v_o \sin \omega t$, la soluzione fisica sarebbe stata la parte immaginaria, come si può verificare immediatamente. L'importante è di essere consistenti con la convenzione adottata. Riguardo l'uso dei numeri complessi nella fisica si raccomanda la lettura dei paragrafi 22-6 e 22-7 "del Feynman" (R.P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands, "The Feynman lectures on Physics", Addison-Wesley, 1963, Vol 1, che esiste anche in edizione bilingue ed è disponibile in biblioteca). I capitoli 23 e 24, che trattano di risonanze e transienti in sistemi meccanici ed elettrici, sono molto interessanti e la loro influenza in questi appunti è facilmente riconoscibile.



$$\operatorname{Re}\{v\} = V_0 \cos \omega t$$

$$\operatorname{Re}\{v_c\} = V_{0c} \cos(\omega t + \varphi)$$

Fig. 8

da cui

$$v_{0c} = \frac{v_0}{1 + j\omega\tau} \quad (34)$$

$$= \frac{v_0(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (35)$$

Da questa equazione otteniamo finalmente il modulo e la fase dell'andamento temporale della tensione ai capi del condensatore $V_C = V_{0c} \cos \omega t$:

$$V_{0c} = |v_{0c}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} V_0 \quad (36)$$

$$\tan \phi_{V_C} = -\omega\tau \quad (37)$$

Queste ultime relazioni sono state ricavate ricordando alcune proprietà dei numeri complessi (vedi Appendice).

Gli andamenti di V_{0c} e di ϕ_{V_C} in funzione di ω sono mostrati in Fig 9. E' da notare che per la pulsazione $\omega_T = 1/\tau$ valgono le seguenti relazioni:

$$V_{0c}(\omega_T) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad (38)$$

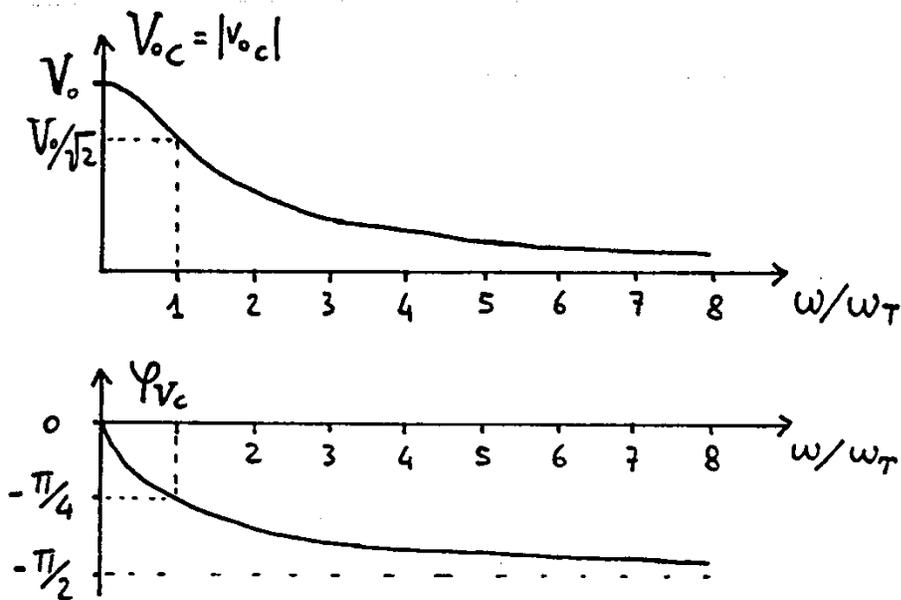


Fig. 9

$$\phi = -\frac{\pi}{4}. \quad (39)$$

La frequenza $\nu_T = \omega_T/(2\pi) = 1/(2\pi RC)$ è chiamata *frequenza di taglio* ed è un parametro tipico del circuito in regime sinusoidale, come lo era la costante di tempo $\tau = RC$ per la carica e la scarica del condensatore attraverso un resistore.

2.2.2 Tensione ai capi del resistore

Dalla soluzione $v_C(t)$ otteniamo la dipendenza dal tempo della corrente che circola nel circuito e quindi della tensione ai capi del resistore:

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = C \frac{dv_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (v_{oC} e^{j\omega t}) \\ &= j\omega C v_{oC} e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (40)$$

Essendo

$$i = i_o e^{j\omega t},$$

otteniamo la relazione fra i_{oC} e v_{oC} :

$$i_o = j\omega C v_{oC}, \quad (41)$$

da cui

$$i_o = \frac{j\omega C}{1 + j\omega\tau} v_o. \quad (42)$$

Quindi anche la corrente segue un andamento sinusoidale $I = I_o \cos(\omega t + \phi_I)$.
Da i_o calcoliamo il modulo della corrente e il suo sfasamento rispetto a $v(t)$:

$$I_o = |i_o| = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} V_o \quad (43)$$

$$\tan \phi_I = \frac{1}{\omega\tau} \quad (44)$$

La tensione ai capi di R si ottiene da $v_R = Ri$. Il valore del modulo e della fase sono:

$$\begin{aligned} V_{oR} &= |v_{oR}| = \frac{\omega R C V_o}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} V_o \\ &= \frac{V_o}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\tan \phi_{V_R} = \frac{1}{\omega\tau}. \quad (46)$$

La corrente e la tensione ai capi del resistore sono in fase fra di loro e *in anticipo* rispetto a $V(t)$. Gli andamenti di V_{oR} e ϕ_{V_R} in funzione di ω sono mostrati in Fig. 10. E' da notare che il concetto di anticipo non implica che l'effetto (tensione ai capi di R) preceda la causa (tensione del generatore). E' soltanto una condizione che si verifica "a regime" fra i picchi di due sinusoidi di lunghezza infinita.

Confrontando il segnale di differenza di potenziale misurato ai capi di C e di R , si osserva che:

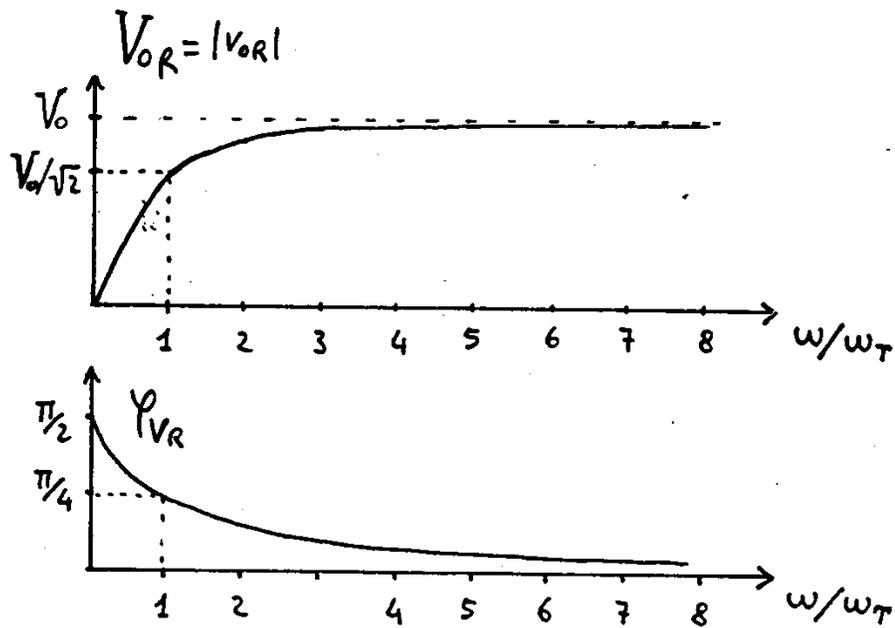


Fig. 10

- per $\omega \rightarrow 0$ la tensione ai capi di C tende a quella del generatore e quella ai capi di R si annulla; per $\omega \rightarrow \infty$ succede l'opposto. Il caso limite per $\omega \rightarrow 0$ è quello più semplice da capire: dopo che il condensatore si è caricato alla tensione costante del generatore non circola più corrente nel circuito e la caduta di tensione ai capi del resistore è nulla.

Se la frequenza è diversa da zero, ma il periodo di oscillazione del generatore è molto più grande della costante di tempo del circuito τ ($T \gg \tau$, cioè $\nu \ll \nu_T = 1/(2\pi\tau)$) il condensatore riesce a seguire le variazioni di tensione del generatore e, istante per istante, a portarsi alla sua tensione. All'aumentare della frequenza il condensatore "ha difficoltà" a seguire la tensione del generatore. In particolare, quando il periodo diventa molto più piccolo di τ ($\nu \gg \nu_T$), la tensione effettua soltanto delle piccolissime oscillazioni intorno allo zero.

- Il ritardo di fase della tensione ai capi del condensatore può essere capito in base agli stessi argomenti qualitativi, basati sulla lentezza del condensatore di "adeguarsi" alle variazioni di tensione del generatore. Nel limite di frequenza infinita ($T \ll \tau$), essendo la tensione ai capi

del condensatore molto più piccola di quella del generatore, in pratica il condensatore seguita a caricarsi con un certo segno di carica finché il generatore mantiene la stessa polarità (vedi ad esempio in Fig. 5 il comportamento per un periodo di onda confrontabile τ); quando il generatore cambia polarità il condensatore comincia a scaricarsi (per caricarsi successivamente con cariche di segno opposto). Lo sfasamento di 90° di ritardo rispetto al generatore per $\omega \rightarrow \infty$ indica il fatto che il condensatore raggiunge il massimo di carica all'istante in cui la tensione del generatore cambia segno.

- Per spiegarsi in modo qualitativo il comportamento della tensione ai capi del resistore, è sufficiente ricordarsi che, istante per istante, la tensione del generatore è pari alla somma delle cadute di potenziale sui vari componenti e quindi V_R è pari a $V - V_C$.

Dagli sfasamenti ci possiamo calcolare la differenza di fase fra la tensione ai capi del condensatore e la corrente che circola nel circuito:

$$\begin{aligned}\tan \phi_{V_C} &= -\omega\tau \\ \tan \phi_I &= \frac{1}{\omega\tau} (= \tan \phi_{V_R})\end{aligned}$$

$$\tan(\phi_I - \phi_{V_C}) = \frac{\tan \phi_I - \tan \phi_{V_C}}{1 + \tan \phi_I \tan \phi_{V_C}} = +\infty \quad (47)$$

$$\phi_{V_C} = \phi_I - \frac{\pi}{2}. \quad (48)$$

La tensione ai capi del condensatore ha un ritardo di 90° rispetto alla corrente, indipendentemente dalla frequenza. La Fig. 11 mostra lo sfasamento fra corrente e tensione del condensatore visualizzato sia sotto forma di vettori rotanti che sotto forma di onde sinusoidali.

Possiamo giungere in modo semplice allo stesso risultato a partire dalla formula (41) che lega v_{oC} e i_o , qui riportata per comodità:

$$v_{oC} = \frac{1}{j\omega C} i_o.$$

Essendo

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\pi/2},$$

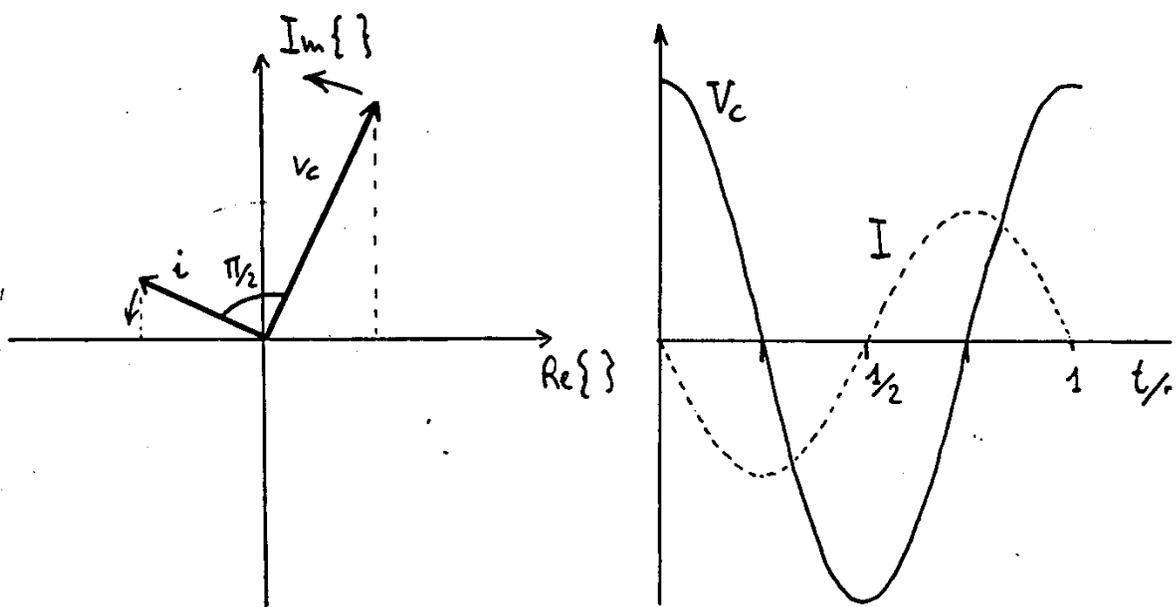


Fig 11.

otteniamo

$$v_{oC} = \frac{e^{-j\pi/2}}{\omega C} i_o \quad (49)$$

$$|v_{oC}| e^{j\phi_{vC}} = \frac{|i_o|}{\omega C} e^{j(\phi_I - \pi/2)}, \quad (50)$$

da cui

$$|v_{oC}| = \frac{1}{\omega C} |i_o| \quad (51)$$

$$\phi_{vC} = \phi_I - \frac{\pi}{2}. \quad (52)$$

Queste ultime relazioni fra la tensione e la corrente suggeriscono il punto di vista secondo cui un condensatore, dal punto di vista "circuitale", è equivalente - limitatamente a segnali sinusoidali - ad una resistenza il cui valore cambia con la frequenza. Essa provoca inoltre uno sfasamento fra tensione e corrente. Vedremo nel prossimo paragrafo come sia possibile, utilizzando questa analogia, arrivare ad un formalismo molto potente il quale permette di risolvere circuiti complessi senza dover passare attraverso la soluzione delle equazioni differenziali.

2.2.3 Impedenza complessa

Riprendiamo l'equazione 21)

$$V(t) - RI - V_C = 0$$

e riscriviamola in notazione complessa (semplificando il termine $e^{j\omega t}$):

$$v_o - Ri_o - v_o = 0.$$

utilizzando la 41) possiamo porla nella forma

$$\begin{aligned} v_o &= Ri_o + \frac{1}{j\omega C} i_o \\ &= \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) i_o \end{aligned} \quad (53)$$

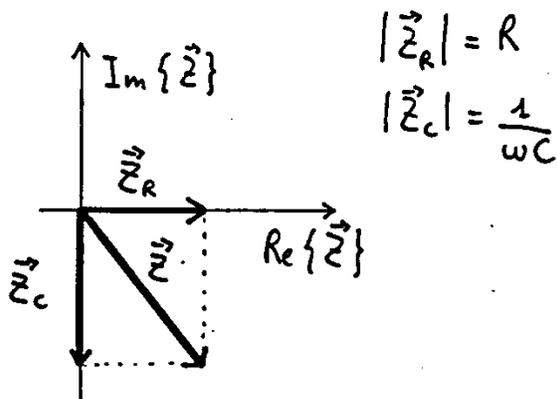


Fig. 12

La variabile complessa che rappresenta la corrente è proporzionale a quella che rappresenta la forza elettromotrice. Il fattore di proporzionalità è un numero complesso il quale si riduce, in assenza del condensatore, ad una resistenza. E' naturale estendere quindi la legge di Ohm all'analisi dei circuiti elettrici in regime sinusoidale. Chiamando

$$\vec{Z}_R = R \quad (54)$$

$$\vec{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (55)$$

otteniamo la *legge di Ohm generalizzata o in regime sinusoidale* :

$$\vec{V} = \vec{Z}\vec{I}. \quad (56)$$

\vec{Z} è chiamata *impedenza* ed è una grandezza complessa. In caso di sole resistenze essa è puramente reale, mentre nel caso di sole capacità essa è immaginaria. Nel caso più generale essa è caratterizzata da un modulo (la cui unità di misura è l'Ohm) e una fase (espressa in gradi o in radianti). La Fig. 12 mostra un esempio dell'impedenza complessa dovuta a un resistore e un condensatore.

Il simbolo di vettore posto sulle grandezze fisiche sta a ricordare che esse sono dei vettori nel piano complesso. Le operazioni matematiche fra di esse sono da intendersi come normali operazioni fra variabili complesse. In parti-

colare il prodotto (per esempio $\vec{Z}\vec{I}$) non è né un prodotto scalare né vettoriale, bensì un prodotto fra numeri complessi⁸. Inoltre essi non sono vettori rotanti, in quanto essi non contengono la dipendenza dal tempo, uguale per tutti. Per ottenere la variabile fisica bisogna moltiplicare per $e^{j\omega t}$ e prendere la parte reale. Ad esempio

$$I(t) = \text{Re}\{\vec{I}e^{j\omega t}\} = |i_o| \cos(\omega t + \phi_I) \quad (57)$$

Si può dimostrare che valgono per le impedenze complesse le stesse regole di combinazione delle resistenze:

$$\vec{Z}_{serie} = \sum_i \vec{Z}_i \quad (58)$$

$$\frac{1}{\vec{Z}_{paral.}} = \sum_i \frac{1}{\vec{Z}_i} \quad (59)$$

Per i circuiti in regime sinusoidale analizzati con il metodo simbolico valgono anche le altre leggi sui circuiti, il particolare le leggi di Kirchhoff e il teorema di Thevenin.

2.2.4 Circuito RC con il metodo simbolico

Come esercizio ci ricaviamo, utilizzando il metodo simbolico, i risultati ottenuti precedentemente risolvendo l'equazione differenziale del circuito:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}} \quad (60)$$

$$= \frac{v_o}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (61)$$

dalla quale si può calcolare in modo immediato modulo e fase della tensione ai capi del resistore (supponiamo, come al solito che v_o abbia fase nulla, ovvero $v_o = V_o$):

$$\vec{V}_R = \frac{Rv_o}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (62)$$

$$= \frac{v_o}{1 + \frac{1}{j\omega R}} \quad (63)$$

⁸Vedi anche nota a pag. 12 e Appendice.

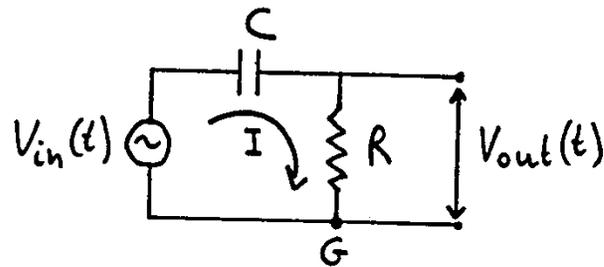


Fig. 13

$$|\vec{V}_R| = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}}} \quad (64)$$

$$\tan \phi_{V_C} = \frac{1}{\omega \tau} \quad (65)$$

Per la tensione ai capi del condensatore, ricordando che $RC = \tau$, otteniamo:

$$\vec{V}_C = \vec{Z}_C \vec{I} \quad (66)$$

$$= \frac{1}{j\omega C} \frac{v_o}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (67)$$

$$= \frac{v_o}{1 + j\omega \tau} \quad (68)$$

$$|\vec{V}_C| = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad (69)$$

$$\tan \phi_{V_C} = -\omega \tau \quad (70)$$

2.3 Circuito derivatore e circuito integratore

Consideriamo il circuito di Fig. 13, composto da un generatore, seguito da un resistore e un condensatore:

Per semplicità consideriamo le tensioni riferite al punto G ("massa"). Sia $V_{in}(t)$ un segnale di forma arbitraria. Siamo interessati al segnale *in uscita* $V_{out}(t)$. La carica elettrica ai capi del condensatore è:

$$Q = CV_C = C(V_{in} - V_{out}). \quad (71)$$

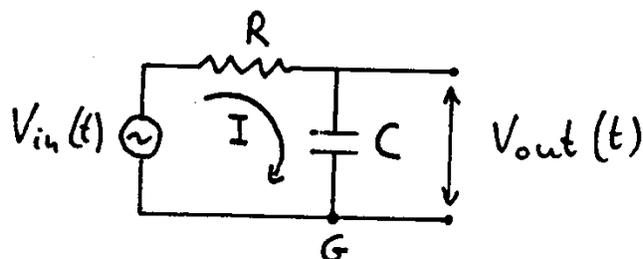


Fig. 14

Eguagliando la corrente di carica del condensatore ($= dQ/dt$) a quella che scorre nel resistore ($= V_{out}/R$) otteniamo:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{d}{dt}(V_{in} - V_{out}) = \frac{V_{out}}{R}. \quad (72)$$

Se $\frac{d}{dt}V_{out} \ll \frac{d}{dt}V_{in}$ si ottiene

$$V_{out} = RC \frac{d}{dt}V_{in}. \quad (73)$$

Questo circuito fornisce un'uscita che è proporzionale alla derivata del segnale di ingresso. Esso si realizza nei casi in cui $\tau = RC$ è molto più piccolo del tempo caratteristico del segnale in ingresso. Questa configurazione è nota come *CR derivatore*.

Consideriamo il circuito di Fig. 14, in cui il condensatore e il resistore sono stati scambiati di posto:

Con la stessa convenzione e lo stesso ragionamento seguito per il derivatore otteniamo:

$$I = C \frac{d}{dt}V_{out} = \frac{V_{in} - V_{out}}{R}. \quad (74)$$

Se $V_{out} \ll V_{in}$ (ovvero $\tau \gg T$):

$$\tau \frac{d}{dt}V_{out} = V_{in} \quad (75)$$

$$V_{out}(t) = \frac{1}{\tau} \int^t V_{in}(t') dt' + cost. \quad (76)$$

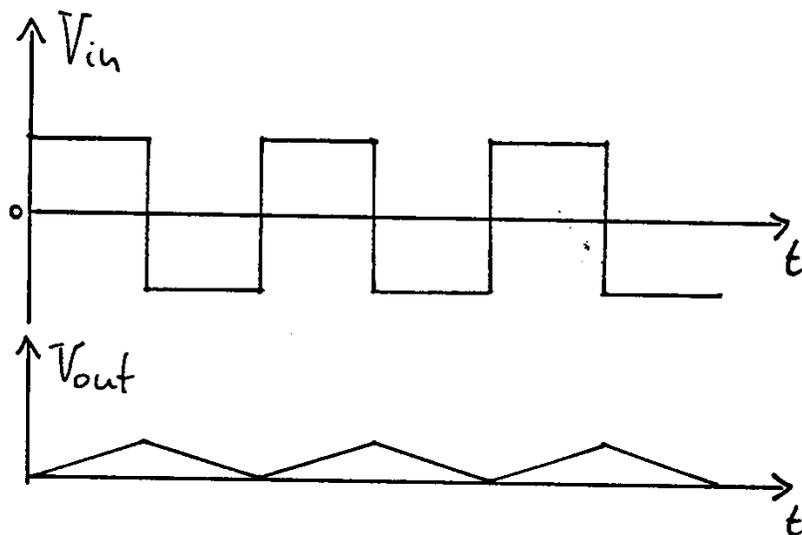


Fig. 15

Il circuito si comporta quindi come un *integratore*. Un semplice esempio è quello di un segnale in ingresso a onda quadra compreso fra $-V_0$ e $+V_0$. Se $\tau \gg T$ si ottiene la forma d'onda riportata in Fig. 15.

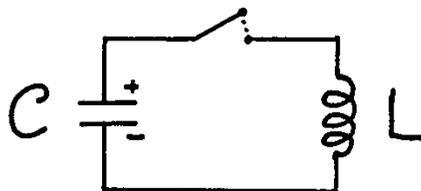


Fig. 16

3 Circuito CL

Consideriamo il circuito di Fig. 16, formato da un condensatore carico ad una certa tensione V_0 e un induttore.

Chiaramente un circuito del genere, privo di resistenze è irrealizzabile in pratica. Ciò nonostante è dal punto di vista didattico molto interessante, in quanto permette di capire meglio il circuito reale composto da un resistore, un condensatore e un induttore.

Ad un certo istante chiudiamo il circuito e proviamo a predire l'andamento della corrente che scorre nel circuito e della tensione del condensatore in funzione del tempo, con semplici argomenti qualitativi o basati sul bilancio energetico. Passeremo successivamente alle equazioni del circuito. Dall'istante di chiusura del circuito:

- il condensatore tende a scaricarsi e una corrente elettrica fluisce dall'armatura positiva a quella negativa;
- ci aspettiamo che l'intensità di corrente sia variabile nel tempo, se non altro perché nelle condizioni iniziali essa era nulla; essa, fluendo nell'induttore, produce un campo magnetico di intensità variabile;
- la variazione nel tempo del campo magnetico produce una forza elettromotrice indotta ai capi dell'induttore, di segno tale da opporsi alla causa che l'ha generata (Legge di Lenz : $f_{e.m.} = -d\phi/dt = -k dI/dt$);

- l'effetto di questa forza elettromotrice indotta è tale che, a differenza della scarica di un condensatore su un resistore, di tipo esponenziale decrescente, non ci può essere un "gradino" di corrente a $t = 0$. Infatti, se la variazione nel tempo dell'intensità di corrente diventasse troppo elevata la forza elettromotrice indotta, per la legge di Lenz, tenderebbe ad annullarla. Si verifica quindi una situazione di equilibrio (dinamico) in cui, istante per istante, la forza elettromotrice indotta è esattamente uguale e opposta alla tensione ai capi del condensatore mentre la variazione di intensità di corrente nell'unità di tempo dI/dt è proporzionale alla carica del condensatore. Ne segue che all'istante iniziale la corrente deve essere nulla, mentre la sua variazione nell'unità di tempo è massima.
- Nell'istante in cui il condensatore è completamente scarico la corrente cessa di crescere e raggiunge quindi il massimo. In tale istante tutta l'energia elettrostatica iniziale del condensatore si è trasformata in energia del campo magnetico.
- Successivamente la corrente comincia a ricaricare il condensatore con segno opposto di carica. Quando il condensatore si sarà caricato e la corrente nel circuito si sarà annullata saremo tornati ad una situazione che, a parte il segno invertito delle cariche sulle armature del condensatore, è la stessa di quella iniziale e quindi il processo seguirà indefinitamente (avendo supposto che, oltre alla resistenza elettrica, siano assenti altri fenomeni dissipativi, come irraggiamento o interazioni del campo magnetico);
- si prevede quindi un sistema oscillante; ma da questo ragionamento estremamente qualitativo non è possibile predire la forma funzionale dell'andamento dell'intensità di corrente in funzione del tempo.

Prima di passare alle equazioni del circuito, cerchiamo di anticipare le soluzioni, questa volta con argomenti basati sul bilancio energetico fra il condensatore e l'induttore:

1. per aumentare la carica di un condensatore da Q a $Q + dQ$ bisogna compiere il lavoro:

$$dW = dU_C = \frac{1}{C} Q dQ;$$

2. il lavoro necessario per aumentare l'intensità di corrente che fluisce in un induttore da I a $I + dI$ è:

$$\begin{aligned} dW = dU_L &= LI dI \\ &= L \left(\frac{dQ}{dt} \right) d \left(\frac{dQ}{dt} \right). \end{aligned}$$

Essendo il circuito un sistema isolato, il lavoro effettuato per immettere energia in uno dei componenti va effettuato dall'altro componente: $\frac{1}{C} Q dQ + LI dI = 0$. Se pensiamo ad una analogia meccanica in cui il ruolo di Q è giocato dalla variabile spaziale x e quello di $I = \frac{dQ}{dt}$ dalla variabile $v = \frac{dx}{dt}$, si riconosce nel condensatore l'analogo di una molla che si oppone ad essere caricata (più carica si mette, più aumenta la tensione e maggiore è il lavoro necessario per aggiungere altra carica) e nell'induttore il termine inerziale che si oppone alla variazione di stato di moto delle cariche. La seguente tabella mostra i termini dell'analogia:

$$\begin{array}{l} x \longleftrightarrow Q \\ v \longleftrightarrow I \\ k \longleftrightarrow \frac{1}{C} \\ m \longleftrightarrow L \\ \frac{1}{2} k x^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 \\ \frac{1}{2} m v^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 \end{array}$$

Da queste considerazioni segue che l'andamento temporale delle cariche sulle armature del condensatore e quello dell'intensità di corrente sono sinusoidali con pulsazione

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (77)$$

rispettivamente nel caso meccanico e elettrico. Consideriamo ora il circuito riportato in Fig. 17.

L'equazione del circuito (consideriamo positivo il verso antiorario) è

$$-\frac{Q}{C} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (78)$$

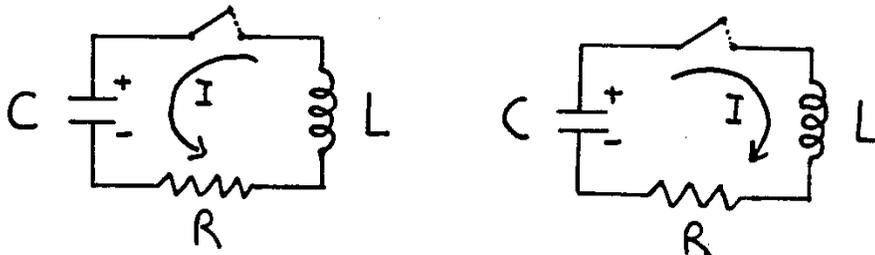


Fig. 17

ed essendo $I = \frac{dQ}{dt}$ otteniamo ⁹

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0. \quad (79)$$

Per $R \rightarrow 0$ si ottiene

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0, \quad (80)$$

la quale ha come soluzione una oscillazione armonica di pulsazione

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (81)$$

Come noto i parametri della funzione sinusoidale (ampiezza e fase) dipendono dalle condizioni iniziali. Scegliendo la funzione coseno e imponendo la condizione $Q(t=0) = Q_0$ si ha

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t. \quad (82)$$

Da $Q(t)$ ci ricaviamo le altre grandezze:

$$V_C = \frac{Q_0}{C} \cos \omega_0 t \quad (83)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t \quad (84)$$

$$V_L = -L \frac{dI}{dt} = \omega_0^2 L Q_0 \sin \omega_0 t \quad (85)$$

⁹Notiamo ancora una volta che la scelta del verso orario porta alla stessa equazione differenziale in Q purché si faccia attenzione al fatto che in questo caso vale $I = -\frac{dQ}{dt}$.

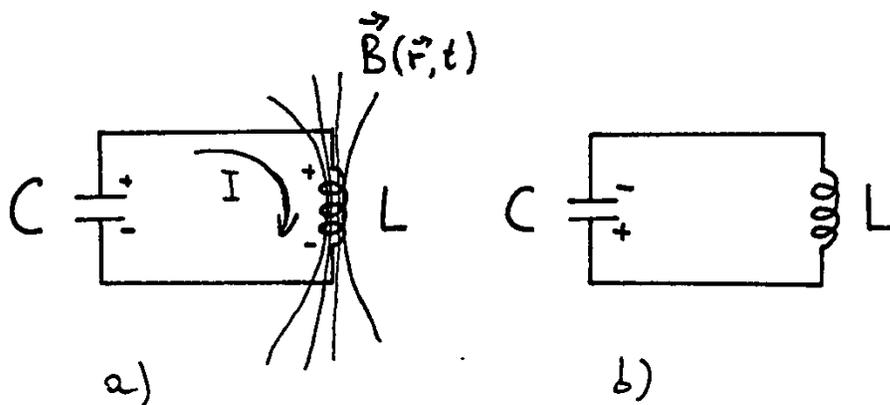


Fig. 18

Da queste equazioni si vede che negli istanti immediatamente successivi alla chiusura del circuito ($t \ll T$) la corrente fluisce nel verso opposto a quello antiorario scelto arbitrariamente nell'equazione del circuito e la forza elettromotrice indotta è positiva, in accordo con il fatto che le cariche (convenzionali positive) del condensatore cominciano a fluire dall'armatura carica positiva a quella negativa e la forza elettromotrice indotta si oppone alla causa che l'ha provocata (vedi Fig. 18a). Dopo un semiperiodo pari a $T/2$ la corrente si annulla e la polarità del condensatore si è invertita (Fig. 18b).

L'energia totale del circuito è pari, istante per istante, alla somma dell'energia elettrostatica del condensatore più quella del campo magnetico associato all'induttore:

$$\begin{aligned}
 E_{tot} &= \frac{1}{2C} Q^2(t) + \frac{1}{2} L I^2(t) \\
 &= \frac{1}{2C} Q_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t \\
 &= \frac{1}{2C} Q_0^2 = \text{costante}
 \end{aligned}$$

4 Circuito RLC

4.1 Scarica di un condensatore in un circuito RLC

Consideriamo di nuovo il circuito di Fig. 17 e consideriamo ora il caso di $R \neq 0$. Carichiamo il condensatore, chiudiamo il circuito al tempo $t = 0$ e analizziamo l'equazione

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2} = 0. \quad (86)$$

In base all'analogia con l'equivalente meccanico del circuito, riconosciamo nel termine proporzionale a R un termine di attrito proporzionale alla velocità¹⁰:

$$-R \frac{dQ}{dt} \longleftrightarrow -\beta v.$$

Riscriviamo l'equazione del circuito come

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \gamma \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0, \quad (87)$$

con $\gamma = R/L$ e $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Come noto dall'analisi e come già studiato per l'analogo meccanico, la soluzione di questa equazione differenziale omogenea è del tipo

$$Q = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (88)$$

dove i coefficienti α_i si ottengono dalla soluzione dell'equazione algebrica associata (*equazione caratteristica*)

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2 = 0, \quad (89)$$

e K_i dalle condizioni iniziali.

La soluzione dell'equazione caratteristica è

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (90)$$

¹⁰E' da notare che mentre per il caso del circuito elettrico l'equazione corrisponde esattamente alla situazione fisica reale, per il caso meccanico esso corrisponde ad una forza di attrito proporzionale alla velocità, situazione più semplice dal punto di vista matematico, ma non la più naturale da punto di vista fisico.

A seconda del valore del discriminante otteniamo i tre diversi andamenti tipici delle oscillazioni smorzate:

1. $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0$: le soluzioni sono reali e negative. La soluzione è somma di due esponenziali decrescenti. Si ottiene una oscillazione armonica *sovrasmorzata* nella quale il termine *dissipativo* domina sul termine di *richiamo* (Fig. 19a).
2. $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0$: le soluzioni sono complesse coniugate:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm j\omega_1, \quad (91)$$

dove

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \quad (92)$$

Imponendo la condizione iniziale $Q(t=0) = Q_0$, la soluzione è

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t, \quad (93)$$

cioè una oscillazione di ampiezza decrescente esponenzialmente in funzione del tempo con una costante di tempo $\tau = 2/\gamma$ e una frequenza minore di quella del circuito *LC*. Questo caso si chiama *sottosmorzato* e $T_1 = 2\pi/\omega_1$ è chiamato *pseudoperiodo* dell'oscillazione, in quanto la forma d'onda si ripete in tale intervallo di tempo a meno di un fattore dovuto allo smorzamento (Fig. 19c).

3. $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0$ rappresenta il caso *critico*: inizialmente il moto segue un andamento simile al caso precedente ma, appena la corrente (ovvero la pendenza della curva $Q(t)$) diventa abbastanza elevata, il termine dissipativo prende il sopravvento su quello di richiamo e smorza rapidamente il moto delle cariche senza che si possa invertire la polarità del condensatore. La soluzione (che *non* si ricava dalla semplice sostituzione di $\alpha_{1,2}$ nella 88) è

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A + Bt), \quad (94)$$

con A e B costanti reali (Fig. 19b)

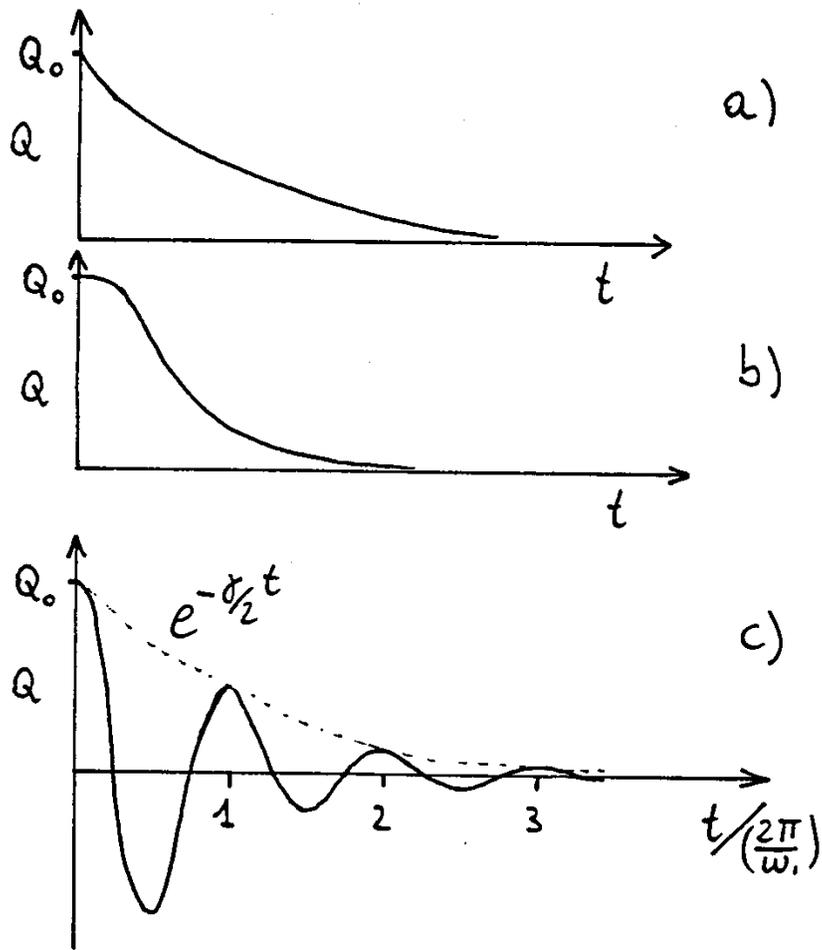


Fig. 19

Riprendiamo la soluzione sottosmorzata, con la condizione $\gamma \ll \omega_0$, in modo tale che la perdita di energia durante un'oscillazione sia piccola. Poiché l'energia associata all'oscillazione va come il quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione, l'energia nel circuito in funzione del tempo è data da:

$$E = E_0 e^{-\gamma t}, \quad (95)$$

soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{dE}{E} = -\gamma dt \quad (96)$$

$$\frac{dE/dt}{E} = -\gamma. \quad (97)$$

γ ha quindi il significato fisico della frazione dell'energia del circuito persa per unità di tempo. In un periodo di oscillazione l'energia persa è

$$\frac{\Delta E}{E} = -\gamma T = -\gamma \frac{2\pi}{\omega_0} = -\frac{2\pi}{(\omega_0/\gamma)}. \quad (98)$$

Si chiama *fattore di qualità* o *fattore di merito* del circuito

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (99)$$

Maggiore è Q minore è l'energia dissipata per periodo. Si può verificare facilmente che nell'intervallo di tempo $1/\gamma$ in cui l'energia iniziale si è ridotta di $1/e$ il circuito ha effettuato $Q/2\pi$ oscillazioni. Q rappresenta quindi il numero di pulsazioni che il circuito copie affinché la sua energia si riduca di $1/e$ di quella iniziale.

Per osservare la scarica di un condensatore in un circuito RLC serie si alimenta il circuito con un'onda quadra di periodo molto più grande dello pseudoperiodo dell'oscillazione smorzata.

4.2 RLC serie in regime sinusoidale

Supponiamo di alimentare il circuito con una tensione alternata di ampiezza V_0 e pulsazione ω : $V(t) = V_0 \cos \omega t$ (Fig. 20)

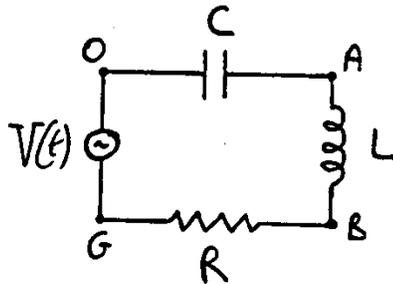


Fig. 20

L'equazione del circuito, dividendo per L e utilizzando i parametri γ e ω_0 introdotti precedentemente, è

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \gamma \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{V_0}{L} \cos \omega t \quad (100)$$

con $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Ripetendo il discorso fatto per il circuito RC in regime sinusoidale, dopo un intervallo di tempo molto maggiore di $1/\gamma$, resta soltanto l'oscillazione forzata alla frequenza del generatore $Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$. Passando anche in questo caso alla notazione complessa e sostituendo $q = q_0 e^{j\omega t}$ nell'equazione si ottiene:

$$-\omega^2 q_0 e^{j\omega t} + j\gamma\omega q_0 e^{j\omega t} + \omega_0^2 q_0 e^{j\omega t} = \frac{v_0}{L} e^{j\omega t}, \quad (101)$$

da cui

$$-\omega^2 q_0 + j\gamma\omega q_0 + \omega_0^2 q_0 = \frac{v_0}{L}, \quad (102)$$

e quindi

$$q_0 = \frac{v_0/L}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}. \quad (103)$$

Ricordando che q_0 è ancora un numero complesso di modulo $|q_0|$ e fase ϕ ($q_0 = |q_0|e^{j\phi}$), otteniamo:

$$|q_0| = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad (104)$$

$$\tan \phi = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (105)$$

La soluzione fisica è

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= \operatorname{Re}\{q_0 e^{j\omega t}\} \\
 &= \operatorname{Re}\{|q_0| e^{j\phi} e^{j\omega t}\} \\
 &= |q_0| \cos(\omega t + \phi)
 \end{aligned}$$

Come era da prevedere, la soluzione è la stessa delle oscillazioni forzate di sistemi meccanici. Il modulo dell'ampiezza di oscillazione dipende dalla frequenza di $V(t)$ e, per $\gamma \ll \omega_0$, ha un massimo per $\omega \approx \omega_0$. Per questa frequenza $|q_0|$ è pari a $(V_0/R)\sqrt{LC}$. Al diminuire di R aumenta l'ampiezza dell'oscillazione di carica sul condensatore. Ritorniamo a descrivere il comportamento del circuito dopo che sarà stato introdotto il metodo simbolico.

Dalle definizioni di v_C , i , v_R e v_L si ottengono gli andamenti in funzione del tempo di tutte le altre grandezze fisiche. Riportiamo i risultati in modo riassuntivo nella seguente tabella dove, per ogni grandezza fisica, sono riportati: la definizione; l'andamento in funzione del tempo; la differenza di fase rispetto ad $V(t)$ e rispetto a $I(t)$; il rapporto fra il modulo della grandezza fisica e $Q_0 = |q_0|$; il rapporto fra la grandezza fisica e $I_0 = |i_0|$.

grand.	defin.	dip. temp.	fase		modulo	
			rispetto a $V(t)$	rispetto a $I(t)$	diviso $ q_0 $	diviso $ i_0 $
V_C	$v_C = \frac{1}{C}q$	$\cos(\omega t + \phi)$	ϕ	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{\omega C}$
I	$i = \frac{dq}{dt}$	$-\sin(\omega t + \phi)$ $\cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$	$\phi + \frac{\pi}{2}$	0	ω	1
V_R	$v_R = Ri$	" "	" "	" "	$R\omega$	R
V_L	$v_L = L\frac{di}{dt}$	$-\cos(\omega t + \phi)$ $\cos(\omega t + \phi + \pi)$	$\phi + \pi$	$\frac{\pi}{2}$	$L\omega^2$	ωL

4.3 Soluzione del circuito RLC serie mediante il metodo simbolico

Riprendiamo l'equazione del circuito RLC serie, riscritta come

$$V(t) - L \frac{dI}{dt} - V_C - IR = 0 \quad (106)$$

e riscriviamola nella forma complessa:

$$v_o e^{j\omega t} - L \frac{d}{dt}(i_o e^{j\omega t}) - v_{oC} e^{j\omega t} - R i_o e^{j\omega t} = 0 \quad (107)$$

Utilizzando la relazione 41) si ottiene:

$$v_o e^{j\omega t} - j\omega L i_o e^{j\omega t} - \frac{i_o}{j\omega C} e^{j\omega t} - R i_o e^{j\omega t} = 0, \quad (108)$$

dalla quale, semplificando la fase dipendente dal tempo comune a tutte le grandezze fisiche:

$$v_o = j\omega L i_o + \frac{i_o}{j\omega C} + i_o R \quad (109)$$

$$= (j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R) i_o \quad (110)$$

Anche in questo caso si vede come ci sia una relazione, con un coefficiente moltiplicativo complesso, fra la forza elettromotrice e la corrente del circuito (anch'esse in generale complesse). Utilizzando di nuovo il concetto di impedenza complessa riscriviamo

$$\vec{V} = \vec{Z} \vec{I} \quad (\vec{Z} = \vec{Z}_R + \vec{Z}_C + \vec{Z}_L), \quad (111)$$

dove

$$\vec{Z}_R = R \quad (112)$$

$$\vec{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \quad \left(= -\frac{j}{\omega C} \right) \quad (113)$$

$$\vec{Z}_L = j\omega L \quad (114)$$

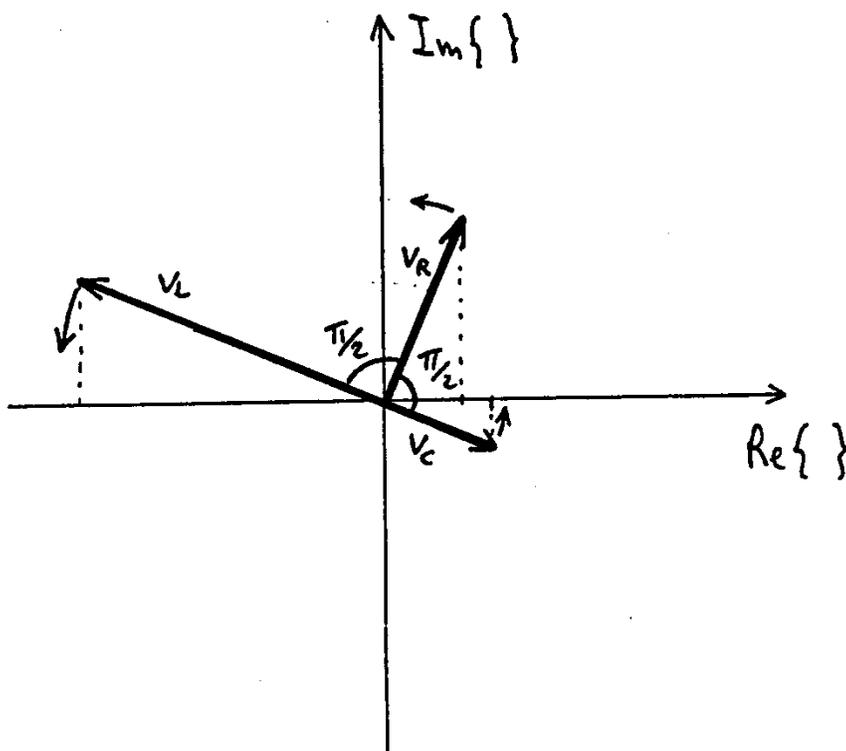


Fig. 21

Precedentemente abbiamo visto l'effetto di \vec{Z}_C . Per quanto riguarda \vec{Z}_L possiamo scrivere che ai capi dell'induttore:

$$\vec{V}_L = \vec{Z}_L \vec{I} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} v_L &= j\omega L i_0 e^{j\omega t} \\ &= \omega L i_0 e^{j(\omega t + \pi/2)}. \end{aligned} \quad (116)$$

Il rapporto fra tensione e corrente è proporzionale a ω . L'induttore si comporta come un resistore il cui valore dipende dalla frequenza. La tensione è inoltre "in anticipo" di $\pi/2$ rispetto alla corrente. Ricordando che la tensione ai capi del condensatore è invece in ritardo di $\pi/2$, si ricava che essa è sfasata di 180° rispetto a V_C . La Fig. 21 mostra i vettori rotanti che rappresentano le grandezze V_R , V_C e V_L .

4.4 Risonanza

In un circuito *RLC* serie l'impedenza complessa è pari a $\vec{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$. Abbiamo visto (formula 104) che per $\omega = \omega_0$, l'ampiezza dell'oscillazione di carica ai capi del condensatore ha un massimo se $\gamma \ll \omega_0$. A questo massimo corrisponde anche un massimo di corrente che circola nel circuito. In analogia con le oscillazioni meccaniche (si pensi alle oscillazioni di onde sonore in strumenti musicali), la condizione di massimo raggiunta quando la frequenza del generatore è pari alla frequenza propria ("naturale") del circuito è detta condizione di *risonanza*. E' facile verificare che essa si verifica quando la parte immaginaria dell'impedenza (e quindi la sua fase) si annulla:

$$\text{Im}\{\vec{Z}\} = 0 \rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C},$$

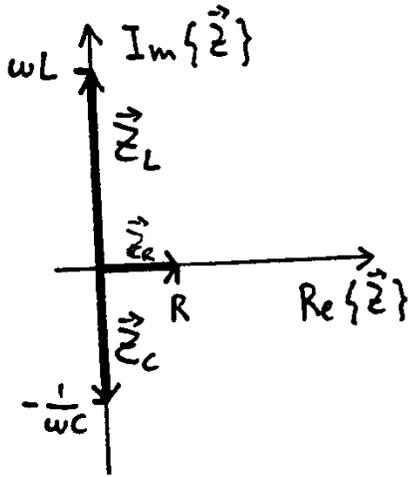
cioè $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

La Fig. 22a mostra le componenti di \vec{Z} per un generica pulsazione, la Fig. 22b in condizioni di risonanza e la Fig. 22c il vettore \vec{Z} per diversi valori di $\omega = n\omega_0$. Al di sotto della frequenza di risonanza la parte immaginaria di \vec{Z} è negativa (si dice che il circuito ha un comportamento *capacitivo*) e al di sopra è positiva (comportamento *induttivo*). Essendo il modulo di \vec{Z} minimo in condizioni di risonanza, è massima la corrente che circola nel circuito e di conseguenza la tensione ai capi del resistore V_R , le quali sono inoltre in fase con la tensione del generatore.

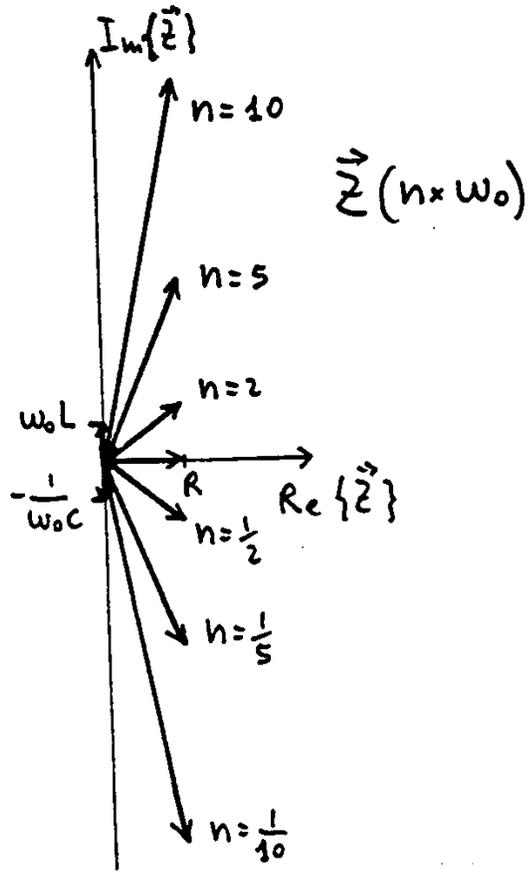
Quando la parte immaginaria dell'impedenza complessa si annulla significa che, rispetto al calcolo della corrente che circola nel circuito, l'induttore e il condensatore "si semplificano". Ciò non deve indurre a pensare che è come se l'induttore e il condensatore non ci fossero più (cioè sostituibili a tutti gli effetti con un corto circuito). Ai capi di ciascuno di essi c'è, istante per istante, una tensione in controfase ($\Delta\phi = \pi$) rispetto all'altro elemento. Riferendosi alla Fig. 20, in risonanza vale $V_B = V_O$ e $V_O - V_A = -(V_A - V_B)$, cioè la tensione nel punto *A* oscilla mentre la caduta di tensione totale V_{OB} è nulla.

Utilizzando il metodo simbolico si possono ricavare molto semplicemente i valori delle grandezze fisiche di interesse:

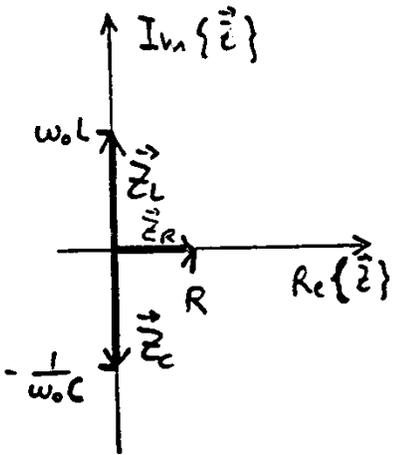
$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}}$$



a)



c)



b)

Fig. 22

$$= \frac{V_0}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_R &= \vec{I} \vec{Z}_R \\ &= \frac{R V_0}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_C &= \vec{I} \vec{Z}_C \\ &= \frac{-j V_0 / (\omega C)}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \end{aligned} \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_L &= \vec{I} \vec{Z}_L \\ &= \frac{j \omega L V_0}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \end{aligned} \quad (120)$$

$$(121)$$

Prendiamo in esame soltanto la tensione ai capi del resistore (proporzionale alla corrente):

$$|\vec{V}_R| = \frac{R V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (122)$$

$$\tan \phi_{V_R} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right). \quad (123)$$

Il modulo e la fase di V_R in funzione di ω sono mostrati in Fig. 23. L'andamento di $|\vec{V}_R|$ in funzione di ω ha una forma a campana, con un massimo in ω_0 pari a V_0 (a differenza di $|q_0|$ la posizione del massimo non dipende da γ). La larghezza della curva $\Delta\omega$ (*larghezza di banda*) è caratterizzata dai valori $\bar{\omega}$ in corrispondenza dei quali $|\vec{V}_R|$ è ridotta di $1/\sqrt{2}$, cioè quando la parte reale e quella complessa dell'impedenza sono uguali in valore assoluto e la fase è $\pi/4$. Per $\Delta\omega \ll \omega_0$, ovvero la curva a campana è molto stretta, essa può essere espressa in modo semplice in funzione dei parametri del circuito:

$$\begin{aligned} R &= \bar{\omega} L - \frac{1}{\bar{\omega} C} \\ &= \bar{\omega} L \left(1 - \frac{1}{\bar{\omega}^2 LC} \right) \end{aligned}$$

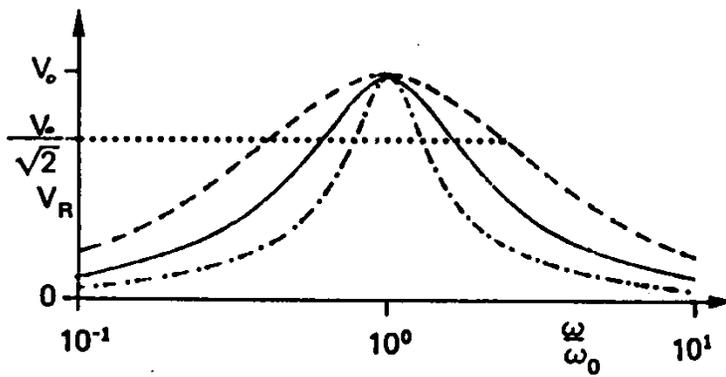
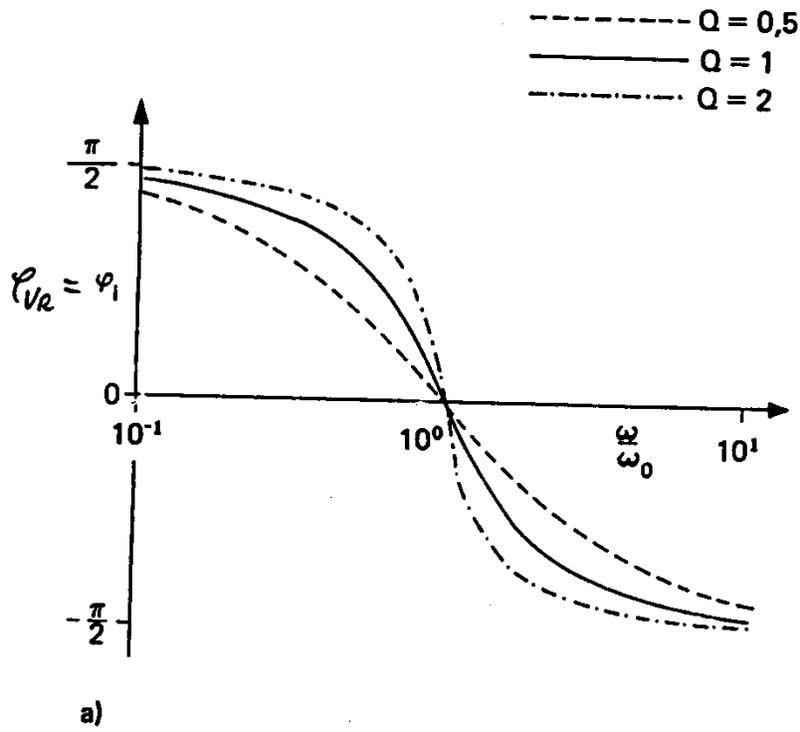


Fig. 23

$$\begin{aligned}
&= \bar{\omega} L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\bar{\omega}^2} \right) \\
&= \bar{\omega} L \left(1 + \frac{\omega_0}{\bar{\omega}} \right) \left(1 - \frac{\omega_0}{\bar{\omega}} \right) \\
&= \bar{\omega} L \left(\frac{\bar{\omega} + \omega_0}{\bar{\omega}} \right) \left(\frac{\bar{\omega} - \omega_0}{\bar{\omega}} \right) \\
&\approx \bar{\omega} L \left(\frac{2\omega_0}{\omega_0} \right) \left(\frac{\bar{\omega} - \omega_0}{\bar{\omega}} \right) \\
&\approx 2L(\bar{\omega} - \omega_0).
\end{aligned} \tag{124}$$

Siccome per $\Delta\omega \ll \omega_0$ la curva è simmetrica otteniamo:

$$\Delta\omega \approx 2(\bar{\omega} - \omega_0) = \frac{R}{L}. \tag{125}$$

Il rapporto fra ω_0 e la larghezza della banda è

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_0}{\Delta\omega} &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} \\
&= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.
\end{aligned} \tag{126}$$

in quest'ultima formula riconosciamo il fattore di qualità Q (formula 99). Maggiore è Q e più stretta è la curva di risonanza.

Il circuito *SRL* serie, per la sua caratteristica di circuito *passa-banda* è utilizzato per selezionare un certo intervallo di frequenze, come per esempio in un circuito di sintonia di una radio.

5 Potenza erogata da un circuito in regime sinusoidale

Per questa parte si rimanda a:

- Sv: par. VII-3.

6 Oscilloscopio a raggi catodici

Il funzionamento dell'oscilloscopio è stato descritto soltanto a livello qualitativo a lezione e non sono richiesti dettagli di funzionamento per l'esame. Chi vuole saperne (un po') di più può consultare la dispensa di M. Alessio e S. Improta (in collaborazione con G. Cesareni et al.), "Oscilloscopio a raggi catodici", A.A. 1992-93, la quale ha il grosso vantaggio di descrivere in dettaglio il "NATIONAL" VP-5220A usato per le esercitazioni. Per quanto riguarda il metodo dell'ellisse per le misure di sfasamento si consiglia Sv par. VII-10.

7 Appendice: richiami sulle operazioni con numeri complessi

Un numero complesso può essere rappresentato da un vettore nel piano complesso ed espresso o in termini delle sue proiezioni sugli assi cartesiani (asse x : parte reale; asse y : parte immaginaria), o dal suo modulo e dall'angolo che esso forma rispetto all'asse x (detto anche *fase*):

$$\vec{A} = \operatorname{Re}\{\vec{A}\} + j\operatorname{Im}\{\vec{A}\} \quad (127)$$

$$\vec{A} = a \cos \alpha + ja \sin \alpha \quad (128)$$

Esso può essere espresso in notazione complessa, facendo uso della formula di Eulero:

$$ae^{j\alpha} = a \cos \alpha + ja \sin \alpha. \quad (129)$$

Ne segue:

$$\operatorname{Re}\{\vec{A}\} = a \cos \alpha \quad (130)$$

$$\operatorname{Im}\{\vec{A}\} = a \sin \alpha \quad (131)$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{\vec{A}\} + \operatorname{Im}^2\{\vec{A}\}} = a \quad (132)$$

$$\alpha = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\vec{A}\}}{\operatorname{Re}\{\vec{A}\}} \quad (133)$$

$$= \arccos \frac{\operatorname{Re}\{\vec{A}\}}{|\vec{A}|} \quad (134)$$

$$= \arcsin \frac{\operatorname{Im}\{\vec{A}\}}{|\vec{A}|} \quad (135)$$

Dati inoltre i due numeri complessi \vec{B} e \vec{C}

$$\vec{B} = be^{j\beta} = b \cos \beta + ja \sin \beta$$

$$\vec{C} = ce^{j\gamma} = c \cos \gamma + jc \sin \gamma,$$

le operazioni di somma algebrica, moltiplicazione e divisione si calcolano utilizzando la definizione di operazione fra numeri complessi. Ne segue:

• Somma algebrica

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} \pm \vec{B} \\ &= (\operatorname{Re}\{\vec{A}\} \pm \operatorname{Re}\{\vec{B}\}) + j (\operatorname{Im}\{\vec{A}\} \pm \operatorname{Im}\{\vec{B}\}).\end{aligned}$$

Segue la regola:

$$\operatorname{Re}\{\vec{C}\} = \operatorname{Re}\{\vec{A}\} \pm \operatorname{Re}\{\vec{B}\} \quad (136)$$

$$\operatorname{Im}\{\vec{C}\} = \operatorname{Im}\{\vec{A}\} \pm \operatorname{Im}\{\vec{B}\}. \quad (137)$$

La parte reale e la parte immaginaria della somma algebrica di due numeri complessi sono date rispettivamente dalla somma algebrica delle parti reali e delle parti immaginarie

• Prodotto:

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} \cdot \vec{B} \\ &= (\operatorname{Re}\{\vec{A}\} + j\operatorname{Im}\{\vec{A}\}) \cdot (\operatorname{Re}\{\vec{B}\} + j\operatorname{Im}\{\vec{B}\})\end{aligned} \quad (138)$$

Questa operazione si effettua più agevolmente passando alle coordinate polari:

$$\begin{aligned}\vec{C} &= (a \cos \alpha + ja \sin \alpha) \cdot (b \cos \beta + ja \sin \beta) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= ab[\cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta)]\end{aligned} \quad (139)$$

$$c = a \cdot b \quad (140)$$

$$\gamma = \alpha + \beta, \quad (141)$$

dove c e γ sono il modulo e la fase di \vec{C} . Ne segue che *il modulo del prodotto di numeri complessi è pari al prodotto dei moduli, la fase è pari alla somma delle fasi.*

• divisione

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \frac{\vec{A}}{\vec{B}} \\ &= \frac{(\operatorname{Re}\{\vec{A}\} + j\operatorname{Im}\{\vec{A}\})}{(\operatorname{Re}\{\vec{B}\} + j\operatorname{Im}\{\vec{B}\})}\end{aligned} \quad (142)$$

Anche per la divisione conviene passare alle coordinate polari:

$$\begin{aligned}\vec{C} &= (a \cos \alpha + ja \sin \alpha) / (b \cos \beta + ja \sin \beta) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \frac{a}{b} [\cos(\alpha - \beta) + j \sin(\alpha - \beta)]\end{aligned}\quad (143)$$

$$c = \frac{a}{b} \quad (144)$$

$$\gamma = \alpha - \beta \quad (145)$$

il modulo del quoziente di numeri complessi è pari al quoziente dei moduli, la fase è pari alla differenza delle fasi.

Le regole relative al prodotto e quoziente si verificano immediatamente facendo uso della formula di Eulero:

$$\vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{B} = ae^{j\alpha} \cdot be^{j\beta} = abe^{j(\alpha+\beta)} \quad (146)$$

$$\vec{C} = \frac{\vec{A}}{\vec{B}} = \frac{ae^{j\alpha}}{be^{j\beta}} = \frac{a}{b} e^{j(\alpha-\beta)} \quad (147)$$

Da queste regole segue che la somma algebrica viene effettuata più semplicemente in coordinate cartesiane, la moltiplicazione e divisione in coordinate polari.

Notiamo che a volte la rappresentazione in coordinate polari fa uso dei seguenti simboli:

$$\vec{A} = a^\alpha \quad (148)$$

$$\vec{B} = b^\beta, \quad (149)$$

da cui

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a \cdot b)^{\alpha+\beta} \quad (150)$$

$$\vec{A}/\vec{B} = \frac{a}{b}^{\alpha-\beta}. \quad (151)$$