

Fisica per Scienze Naturali (G. D'Agostini)
— argomenti trattati nelle lezioni (AA 2018-2019) —

Giulio D'Agostini

28 maggio 2019

1 (Lun 25 febbraio)

- Introduzione al corso.
- Check su argomenti di matematica (vedi foglio distribuito o file pdf sul sito), limitatamente ai quesiti 1-12.
In particolare
 - importanza delle valutazioni approssimate e della stima degli *ordini di grandezza*.
 - potenze, radici e logaritmi e loro relazione:
data $x^y = z$:
 - * potenza: $(x, y) \longrightarrow z$;
 - * radice: $(y, z) \longrightarrow x$;
 - * logaritmo: $(x, z) \longrightarrow y$;
 - soluzione ‘a fumetti’ del problema 11 e significato delle varie operazioni che si compiono quando si risolve una equazione di primo grado.
- Questioni energetiche importanti:
 - quanto ci scalda il Sole?
 - quanto scaldiamo noi (in media).
 - Unità di misura di energia (in particolare Joule e kcal) e potenza (in particolare Watt e kcal/h).
- Costante solare (fuori dall'atmosfera e al suolo), potenza irradiata dal Sole e massa *consumata* ($E = mc^2$) nell'unità di tempo.
- Temperatura e termometri (in generale): dalla sensazione di caldo e freddo alla scala termometrica (i sensi possono essere ingannevoli per motivi che vedremo).

2 (Mar 26 febbraio)

Ancora sul Check di ingresso

- Leggi di scala: quesiti 13-17;

Basi della meccanica

- Concetti di *velocità* e *accelerazione* (sono concetti generali che si trovano in diversi ambiti).
- Velocità media e accelerazione media.
- Principi di Newton, in particolare il secondo (“ $a = F/m$ ”, scrittura che enfatizza in fatto che l’accelerazione sia l’*effetto* della causa F , essendo la *massa inerziale* m una ‘concausa’).
- Natura vettoriale di forza, velocità e accelerazione.
- Forza totale come somma (vettoriale!) delle forze esterne.
- Primo principio visto come caso particolare del secondo

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{costante}$$

Nota: la costanza della velocità è intesa vettorialmente, ovvero non è sufficiente che rimanga costante il modulo! (si pensi alla Luna intorno alla Terra o alla Terra intorno al Sole).

- Terzo principio (“azione e reazione”).
- Forze di Newton fra corpi ‘puntiformi’ o fra corpi a simmetria sferica. Caso di Terra e gessetto: forze e accelerazioni dei due corpi.

Temperatura, quantità di calore, capacità termica e calore specifico

- termometri e scale termometriche (riepilogo);
- Esperimento concettuale di acqua portata piano piano (fornendo calore costantemente) dalla fase solida all’ebollizione:
 - durante i cambiamenti di fase la temperatura si mantiene stabile;
 - le ‘pendenze’ dT/dt sono diverse nella fase solida e in quella liquida.

Scambi termici

- ‘principio zero’ della termodinamica: equilibrio termico;
- fattori che influenzano la percezione umana del ‘caldo’ e del ‘freddo’: conducibilità termica e capacità termica (con divagazioni su patate al cartoccio e saune...);
- passaggi di stato e “punti fissi” per le scale termometriche;
- capacità termica e calore specifico: definizione della caloria (e quindi anche della chilocaloria).

⇒ **F1inf**¹ 14.6

Equilibrio termico fra due corpi a temperature iniziali diverse e che formano un *sistema isolato* (non ci sono dispersioni di calore verso l’esterno).

¹https://www.roma1.infn.it/~dagos/F1_06-07/lezioni.pdf

⇒ **F1inf 14.7**

3 (Lun 4 marzo)

Questioni sui problemi in corso e precisazioni su argomenti della lezione precedente

- Derivate e ‘antiderivate’:
da $s(t) \rightarrow v(t) \rightarrow a(t)$ $a(t) \rightarrow v(t) \rightarrow s(t)$;
- note sulle derivate: in Fisica (e nelle altre scienze) la variabile indipendente è il tempo t e quindi le derivate sono spesso (quasi sempre in meccanica) rispetto al tempo;
- valutazione della forza dall’accelerazione: “ $F(t)=m a(t)$ ”;
- Sistema Internazionale (S.I.): m, s, kg, N, J, W etc.
- cambiamento di unità: regola generale (non impararle semplicemente a memoria);
- dall’espressione generale della forza di gravità (fra ‘punti materiali’ o sfere omogenee) a ‘ $m g$ ’;
- unità di misura di g dall’espressione $F = mg$: ‘N/kg’;
- forza di Newton, forza di Coulomb e interpretazione della massa gravitazionale come ‘carica gravitazionale’;
- ancora sulla proporzionalità fra massa gravitazionale e massa inerziale e uso del kg per entrambe;
- media pesata e applicazione al problema della velocità media quando si viaggia a velocità costanti in intervalli di tempo uguali.

Misura della densità dell’aria dall’equazione di stato dei gas

- Rivisitazione dell’equazione di stato.

4 (Mar 5 marzo)

Precisazioni sui problemi in corso

Introduzione al moto circolare uniforme

Le cose fondamentali sono che

- spazio percorso e angolo variano linearmente con il tempo;
- il *periodo* T è semplicemente il tempo impiegato a compiere un giro;

e le formule di interesse sono di conseguenza.

Introduzione alla trigonometria (nel triangolo rettangolo)

- Triangoli rettangoli simili e applicazione a misure di triangolazione;
- ‘nomi’ di alcuni rapporti di interesse (e osservazione banale che essi dipendono dall’angolo):
 - “cateto adiacente su ipotenusa”: coseno;
 - “cateto opposto su ipotenusa”: seno;
 - “cateto opposto su cateto adiacente”: tangente.

(Le altre funzioni trigonometriche possono essere tranquillamente dimenticate.)

- Definizione del radiante (alla buona, “quando arco è uguale al raggio”), sua ‘adimensionalità’; angoli notevoli (giro, piatto e retto) in radianti e calcolo del fattore di conversione.
- E, parlando di angoli: importanza di memorizzare la velocità (in gradi/giorno) della velocità angolare di Terra (intorno al Sole) e di Luna (intorno alla Terra).

Misure di densità . . . e non solo

Dalla densità di solidi regolari alla densità di Terra, Sole e Luna.

- densità di solidi di forma regolare (per cominciare): vedi valori sul quaderno individuale.
- Misure dirette e misure indirette e prime osservazioni sul numero di cifre con cui riportare i risultati sperimentali.
- Principio di misura di massa mediante una normale bilancia: equilibrio di forza peso verso il basso e reazione del piatto della bilancia verso l’alto.
- Non confondere le forze che denno risultante nulla quando applicate allo stesso corpo con la coppia di forze azione-reazione secondo il Terzo Principio: se la Terra attrae verso il basso un corpo (ad es. il cilindro su cui sono state effettuate le misure) con la forza da 1 N, allora il corpo attrae la Terra verso l’alto con la forza di 1 N.

5 (Gio 7 marzo)

Il Sole: quanto scalda e quanto ci illumina?

- Potenza del Sole espressa in W/cm^2 . Ancora raccomandazioni generali sui cambiamenti di unità di misura.
- Effetto dell’inclinamento della superficie rispetto alla direzione dei raggi solari (vedi problemi).
- Primi introduzione alle grandezze fotometriche . . . affidate a ricerca personale (vedi problemi).

Principio di misura di massa mediante bilance: forze elastiche ed equilibrio di più forze

- Somma di forze applicate allo stesso oggetto (caso unidimensionale lungo la verticale): precisazioni.
- Forza elastica ideale: condizione di linearità fra incremento di allungamento e incremento di forza. Note sui segni.
 - forza applicata alla molla: $F_{appli} = k \Delta x$ (Δx e F_{appli} dello stesso segno: la forza allunga la molla);
 - forza (Elastica) di reazione della molla: $F_E = -k \Delta x$ (a un allungamento Δx corrisponde una forza di segno opposto che si oppone all'allungamento).

(Per capire bene le cose, invece di fare tanti conti, provare a giocare con elastici!)

- Parametro k : *costante elastica* della molla, misurato in N/m: maggiore è k più dura è la molla.
Provare a sperimentare con elastici come 1) ‘molle’ in parallelo diano una ‘molla equivalente’ di k maggiore; 2) l’opposto avviene per ‘molle in serie’. (Vedremo quantitativamente perché, ma è bene cominciare ad acquistare un feeling fisico di quello che succede.)
- Pesata di un oggetto parzialmente sorretto con un dito (‘D’) con elastichetti (per visualizzare come in effetti ci sia anche una forza verso l’alto): l’equazione di equilibrio delle forze è $F_G + F_E + F_D = 0$

Misura della densità del blocco di polistirolo

- Oltre alla forza peso e alla reazione del piano della bilancia ci possono essere altre forze!
 - Effetto della forza esercitata dall’aria soffiata dall’alto sul polistirolo! (Ma nel seguito la trascureremo, mettendoci in condizioni statiche.)
 - Forza verso l’alto dovuta alla spinta di Archimede (vedi problemi, che si ricollegano al stima della densità dell’aria!)

(Per i valori misurati *direttamente* vedi quaderno individuale.)

Misura della densità di solidi meno banali dei semplici solidi regolari

- Sasso ($m = 66.18$ g);
- Uovo crudo ($m = 64.28$ g);
- Uovo sodo ($m = 62.21$ g);

Misura del volume? **Eureka!**

Nel caso delle uova si può tentare anche con ellissoidi:

- Uovo crudo: asse maggiore: 5.66 cm; assi minori: 4.45 cm (assumiamo simmetria rotazione intorno all’asse maggiore).
- Uovo sodo: asse maggiore: 5.47 cm; assi minori: 4.48 cm (assumiamo simmetria rotazione intorno all’asse maggiore).

Precisazione sui rudimenti di cinematica

- Notazione vettoriale: $\vec{s} = (x, y, z)$; $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$; $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.
Nota: la scrittura \vec{v}_x , etc., non ha senso in quanto x è misurato lungo l'asse delle ascisse e quindi è di per sé uno scalare, ovvero è un numero con segno (e unità di misura).
- *Equazione oraria*: $x(t)$, $y(t)$ (e anche $s(t)$ inteso come spazio percorso).
- *traiettoria*: è invece data da $y(x)$, etc., ovvero fornisce una rappresentazione del percorso effettuato, come su una mappa. Ma si perde così l'informazione sul tempo di percorrenza!

Ancora sull'introduzione al moto circolare uniforme

Oltre a spazio percorso lungo la circonferenza e ad angolo, che ricordiamo essere lineari con il tempo (in questo consiste l'uniformità del moto), possiamo aggiungere un'altra ordinata con il numero di giri effettuati.

- Banalmente la corrispondenza sarà $1 T \rightarrow 1$ giro; $2 T \rightarrow 2$ giri, etc.;
- Se indichiamo con g il numero di giri effettuati, la *velocità di rotazione*,² ovvero $\Delta g / \Delta t$, varrà banalmente

$$\frac{1 g}{1 T} = \frac{1}{T},$$

misurata in giri/secondo (o giri/minuto, etc.)

- La velocità di rotazione è anche chiamata *frequenza* (di rotazione) e indicata con i simboli f o ν , da cui ad esempio $\nu = 1/T$.

(Come detto nella lezione precedente, non imparare a memoria le relazioni fra le varie grandezze del moto circolare uniforme, ma cercare di capire da cosa derivano).

Ancora radianti ed elementi di trigonometria. Grandezze angolari

- Ancora sul problema del paesetto svedese di latitudine un radiante: nel caso di Terra perfettamente sferica il paese è alla stessa distanza dal centro della Terra e dall'equatore (percorrendo il meridiano passante per il paesello).
- Approssimazioni delle funzioni seno e tangente per piccoli angoli: tendono entrambe all'angolo stesso (misurato in radianti): vedi esempi pratici sul quaderno.
- Grandezza angolari, con misura eseguita in aula (vedi quaderno).
- Diametro angolare del Sole visto dalla Terra (ricerca personale + quaderno).

²Nel mondo delle automobili si usano spesso termini impropri e fuorvianti. Abbiamo già visto come il termine *acceleratore* è improprio, in quanto esso va premuto anche per mantenere la vettura a velocità costante. Così pure il *tachimetro* viene spesso chiamato 'contachilometri', che è un'altra cosa, presente nelle vetture e ce ci dice, come dal nome, quanti chilometri sono stati percorsi. La frequenza di rotazione è misurata invece da quello che chiamiamo impropriamente *contagiri*, il quale non conta i giri, ma misura la frequenza di rotazione (tipicamente in giri al minuto).

6 (Lun 11 marzo)

Revisione dei problemi in corso

- Parametri delle lampadine: Watt, potenza assorbita, vs Lumen (lm), flusso luminoso.
- Efficienza luminosa (lm/W); luce solare alla superficie terrestre in condizioni ottimali 93 lm/W. Per altri valori notevoli vedi sul sito (→ copertine).
- Breve parentesi sulle conseguenze dell'illuminamento sull'ambiente e come il petrolio (e poi l'elettricità) ha salvato le balene.
- Pannello solare inclinato: ulteriore invito a pensarci: quando si crede di essere arrivati a una formula, farne subito dei casi notevoli e dei limiti per accertarsi che dia risultati ragionevoli.

Ancora su dimensioni angolari (in particolare 'diametri angolari')

- importanza di conoscere alcune dimensioni angolari (e soprattutto, per le applicazioni, il reciproco del loro valore espresso in radianti):
 - diametro angolare di Sole e Luna (visti dalla Terra);
 - grandezza angolare della larghezza di pollice (etc.) osservato con braccio teso.
- Esempio: misura della distanza da cui è stata scattata una foto nella quale si vede il sole e un oggetto di dimensioni 'note' (o ragionevolmente stimabili).

Approssimazioni e loro importanza

- Ancora sull'approssimazione $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ per $\theta \ll 1$ (in radianti!).
- Importanti approssimazioni, per $\epsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\epsilon} &\approx 1-\epsilon \\ \frac{1}{1-\epsilon} &\approx 1+\epsilon \\ (1\pm\epsilon)^2 &\approx 1\pm 2\epsilon \\ \sqrt{1\pm\epsilon} &\approx 1\pm\epsilon/2\end{aligned}$$

- Approssimazione del coseno per $\theta \ll 1$:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sqrt{1-\sin^2 \theta} \\ &\approx \sqrt{1-\theta^2} \\ &\approx 1-\theta^2/2.\end{aligned}$$

Spinta di Archimede e terzo principio

- Esperimento in aula del dito immerso in un'acqua (posta in un bicchiere su una bilancia).
- Varianti, con immersioni in acqua di un cilindro e di un cono.

Misura di volumi per immersione (Eureka!)

- Prova con l'uovo sodo: misura da rifare essendo il recipiente non appropriato.

Perdita di massa delle uova

- uovo crudo: 63.63 g (da 64.28 g);
- uovo sodo: 61.37 g (da 62.21).

Calori latenti

Concetto: durante il cambiamento di stato l'energia fornita non provoca aumenti di temperatura, ma, detto alla buona, serve a rompere i 'legami'

Valori per l'acqua:

- fusione: 80 cal/g;
- ebollizione: 540 cal/g.

7 (Mar 12 marzo)

Ancora sui diametri angolari

- Esperimento in aula sulla distanza a cui bisogna posizionare una pallina (diametro 6.1 cm) affinché ci compaia grande (angolarmente) come il sole nel cielo.
- Stima della distanza della statua della minerva mediante confronto della dimensione angolare della larghezza dito mignolo osservato con braccio teso:
 - distanza occhio-mignolo: 59 cm;
 - larghezza mignolo: 1.7 cm.

Il rapporto 1.7 cm/59 cm ci fornisce la larghezza angolare del mignolo (in radianti). Il suo reciproco ci dà il fattore moltiplicativo per ottenere la distanza di un oggetto lontano che è coperto esattamente dal mignolo e di cui conosciamo (o ipotizziamo) la grandezza.
→ vedi problemi.

Problema del pannello solare

Trattazione usando il concetto di 'proiezione del pannello su una superficie ortogonale a quella dei raggi solari' (si pensi all'ombra su un piano ortogonale ai raggi solari).

- Chiamando con S_T la costante solare sulla superficie terrestre (il famoso $\approx 1.0 \text{ kW/m}^2$) e A_p la superficie del pannello proiettata (o anche 'ombra del pannello'), la potenza su questa vale $P = S_T \times A_p$.
- Ma, essendo $A_p = A \sin \theta$, con A la superficie del pannello e θ l'angolo fra superficie del pannello e i raggi solari, otteniamo $P = S_T \times A \sin \theta$.
(La formula riproduce i casi notevoli di $\theta = \pi/2$ e $\theta = 0$. Sempre verificare!)

Moto circolare uniforme

Partendo da un cerchio di raggio R con centro nell'origine.

- Abbiamo già visto come l'angolo varia linearmente con il tempo.
- Indicando con ω la velocità angolare (in rad/s) e con opportuna scelta di $t = 0$ possiamo scrivere $\theta(t) = \omega t$.
- Per ogni valore di θ le coordinate cartesiane saranno le proiezioni del punto che ruota sui due assi:

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos \omega t \\y(t) &= R \sin \omega t.\end{aligned}$$

- Vettore posizione (dal centro al punto sulla circonferenza):

$$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\}.$$

Si tratta di un vettore rotante.

- Velocità di variazione nel tempo delle coordinate:
 $v_x = \frac{dx}{dt}$, etc., da cui $\vec{v}(t) = \{v_x(t), v_y(t)\}$.
- Velocità di variazione nel tempo nelle velocità ('accelerazione'):
 $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, etc., da cui $\vec{a}(t) = \{a_x(t), a_y(t)\}$.
- Moduli ('lunghezze') dei vettori: $|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t), y^2(t)}$, etc.
- Si ricava con semplici passaggi con semplici passaggi (per chi sa fare le derivate di seno e coseno...) che i moduli dei vettori di interesse sono costanti nel tempo e valgono rispettivamente R , ωR e $\omega^2 R$.
→ ma i vettori non sono costanti (solo il loro modulo lo è) in quanto con il passare del tempo ruotano (le coordinate sono date da funzioni sinusoidali).
- Analizzando le componenti di $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ per $t = 0$ si osserva immediatamente che essi sono ortogonali (idem per $t = T/4$ e altri tempi notevoli per i quali i conti sono facili). Ma siccome la scelta dello zero del tempo è arbitraria, questa proprietà deve essere valida in generale.
- Inoltre dalle accelerazioni delle componenti si 'scopre' che $a_x = -\omega^2 x$ e $a_y = -\omega^2 y$, ovvero

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

→ accelerazione centripeta.

8 (Gio 14 marzo)

Moti oscillatori (principalmente)

- Esercizio di riscaldamento. Data l'equazione oraria della coordinata x

$$x(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3,$$

valutare

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t),$$
$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t).$$

- Funzioni di cui conoscere le derivate (nella generica variabile x e nella variabile tempo t che compare più spesso in fisica):

$$\begin{aligned}ax^b &\rightarrow at^b \\ae^{bx} &\rightarrow ae^{bt} \\a \ln(bx) &\rightarrow a \ln bt \\a \sin(bx + c) &\rightarrow a \sin(\omega t + \varphi) \\a \cos(bx + c) &\rightarrow a \cos(\omega t + \varphi).\end{aligned}$$

- Nota sulla *adimensionalità* degli argomenti di funzioni esponenziale, log, sin, cos, etc. Questo è il motivo per il quale è stato messo sempre un fattore che moltiplica t , se con esso indichiamo il tempo, e anche x , se sta ad indicare lo spazio (o altre grandezze fisiche dimensionali). In particolare, b e ω delle funzioni del tempo devono avere dimensioni inverse di quelle del tempo, ad es. s^{-1} . Quindi in Fisica non si incontrerà mai una cosa del tipo $\cos(t)$, etc.
- Dettagli sul moto circolare uniforme e sulle equazioni orarie delle coordinate in tale moto (avendo posto il centro del cerchio nell'origine).
 - ripetizione di quanto fatto la lezione precedente;
 - analisi grafica delle equazioni orarie di $x(t)$ e $y(t)$;
 - ‘pendenze locali’ delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$ per meglio capire l’andamento nel tempo delle velocità delle componenti;
 - sul doppio significato di ω ,
 1. **velocità angolare** di un punto materiale in moto circolare uniforme;
 2. **pulsazione** di una grandezza fisica oscillante in modo sinusoidale, come ad esempio il moto di ciascuna proiezione lungo gli assi cartesiani.
 - ma in entrambi i casi vale la relazione $T = 2\pi/\omega$.
- Moto di oscillazione di un oggetto sospeso ad una molla, come esempio di oscillazione sinusoidale in cui non c’è moto circolare uniforme associato.

– Ricordiamo la relazione fra coordinata x e a_x in un moto circolare uniforme:

$$a_x(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t).$$

– Ricordiamo inoltre l’espressione della forza della molla sull’oggetto sospeso quando l’oggetto viene lasciato libero di oscillare:³

$$F(x) = -kx,$$

³E la forza di gravità? Bella domanda, sulla quale ritorneremo, e vedremo che nell’oscillazione rispetto alla posizione di equilibrio essa non conta, in quanto è responsabile solo della posizione di equilibrio.

da cui segue, per la seconda legge di Newton,

$$a(x) = \frac{F(x)}{m} = -\frac{k}{m}x.$$

- Riconosciamo una relazione simile a quella proiezione accelerazione della proiezione nel moto circolare uniforme, se identifichiamo k/m (di valore numerico positivo) con ω^2 , da cui

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{k/m} \\ T = \frac{2\pi}{\omega} &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.\end{aligned}$$

- Otteniamo quindi che l'oscillazione della molla *può* essere descritto da⁴

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

- Esperimento in aula sulla variazione del periodo di oscillazione della molla al variare della massa sospesa (e importanza di effettuare la misura su tanti periodo per ridurre l'errore del cronometraggio).

Valori misurati da diversi studenti:

- 4 dischetti: 5.50 s, 5.54 s, 5.31 s (tempo per effettuare 10 oscillazioni);
- 7 dischetti: 7.14 s, 7.10 s, 6.9 s (tempo per effettuare 10 oscillazioni);
- 10 dischetti: 8.84 s, 8.62 s, 7.9 s (tempo per effettuare 10 oscillazioni).

→ quaderno individuale: problema 8.8.

- Illustrazione del problema “dell'incudine sul canottino”:
→ quaderno individuale: problema 8.7.

9 (Lun 18 marzo)

Rassegna sui problemi delle scorse lezioni, con chiarimenti e complementi

- Problemi delle lezioni passate, in particolare 2.9, 4.5, 5.5, 5.7, 5.10, 5.11, 6.2, 6.4, 6.5, 7.2, 7.4, 7.7, 8.2.
- Derivate e ‘antiderivate’⁵ con qualche facile esempio.
- Andamento esponenziale negativo, in particolare problema 8.2.
- Cifre significative e regolette pratiche nel caso di moltiplicazioni/divisioni e addizione/sottrazione⁶ (il caso del quadrato e della radice quadrata possono essere ricondotti, in prima approssimazione, a quello di moltiplicazioni/divisioni).

Note:

⁴La particolare funzione sinusoidale dipende dalle condizioni iniziali – questione sulla quale torneremo. Per ora diciamo che la soluzione $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ è senz'altro quella giusta se all'istante $t = 0$ abbiamo $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$, come si può verificare facilmente.

⁵<https://en.wikipedia.org/wiki/Antiderivative>

⁶In quest'ultimo caso la storiella del custode del museo di paleontologia che affermava con grande certezza che il reperto aveva “2 milioni di anni e 4 mesi”, perché 4 mesi prima gli avevano detto “2 milioni di anni” illustra molto bene il problema.

- Non confondere cifre significative con ‘cifre decimali’. In particolare non si deve seguire nessun criterio legato a queste in quanto le cifre decimali dipendono dall’unità di misura scelto, mentre le cifre significative sono quelle che contengono un contenuto informativo sul valore della grandezza fisica in gioco mentre le altre sono semplicemente ‘rumore’ (‘noise’).
- Se lo zero è significativo, esso va riportato. Ad esempio, anche se per fare i conti, il risultato che si ottiene con la calcolatrice è lo stesso, i valori 3, 3.0, 3.00 e 3.000 hanno un contenuto informativo completamente diverso.
- Nel caso di dubbio, conviene fare delle prove cambiando le ultime cifre dei ‘valori di partenza’ per capire cosa succede al valore di arrivo.

10 (Mar 19 marzo)

Ancora spinta di Archimede

- Effetto delle spinta di archimede nelle pesate.

Sul corpo agiscono tre forze (forza peso, forza della bilancia, forza di Archimede), la cui risultante è nulla:

$$F_P + F_B + F_A = 0 \quad (1)$$

$$-m g + m_I g + \rho_A V g = 0, \quad (2)$$

ove ρ_A sta per la densità dell’aria e con m_I abbiamo indicato il valore di massa *indicato* sul display della bilancia (la bilancia è calibrata e trasforma automaticamente la forza che deve contrastare in un valore di massa, assumendo che sia posta in piano in prossimità della superficie terrestre).

Ne segue

$$m = m_I + \rho_A V = m_I + m_A, \quad (3)$$

da cui

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_I}{V} + \rho_A = \rho^0 + \rho_A. \quad (4)$$

ove abbiamo indicato con ρ^0 la densità ottenuta trascurando la spinta di Archimede.

- Problema dell’*incudine* sul *canottino* e affondata:
 - quando è a bordo essa sposta un volume di acqua pari alla sua massa;
 - quando è affondata sposta un volume di acqua pari al suo volume, quindi il livello di acqua si abbassa.

Ad esempio se l’oggetto ha un volume di 1 dm^3 (un litro) e ha una densità 10 volte quella dell’acqua, quando è a bordo sposta 10 litri di acqua; quando è sul fondo ne sposta solo un litro.

Ancora moto circolare uniforme

- Vettori ‘rotanti’ \vec{r} , \vec{v} e \vec{a} : moduli e angoli fra di loro:
 - \vec{v} è, istante per istante, ortogonale a \vec{r} e ad \vec{a} ;

- nella rotazione \vec{a} ‘anticipa’ \vec{v} , il quale ‘anticipa’ \vec{r} .
- Vettori \vec{v} e \vec{a} ‘applicati’ al *punto materiale* che si muove sulla circonferenza:
 - \vec{v} è sempre tangente alla circonferenza;
 - \vec{a} è sempre diretto verso il centro (accelerazione centripeta).

Nota: riportare \vec{r} , \vec{v} e \vec{a} , come si trova in tutti i libri, può essere fuorviante, essendo grandezza fisiche diverse (dalle elementari sappiamo che non si possono confrontare mele e patate...). Quindi il confronto fra le ‘lunghezze’ dei diversi vettori non ha senso. Ha senso invece in confronto di direzione e verso. Per una immagine meno fuorviante andrebbero i diversi vettori andrebbero immaginati su diversi piano, posti uno sopra l’altro e visti in trasparenza (i ‘layer’ del gergo della grafica).

Satelliti in orbita circolare intorno alla Terra

- Ancora sul significato di g come rapporto fra forza gravitazionale e massa, nell’ipotesi di Terra perfettamente sferica e omogenea e trascurando la forza centrifuga dovuta alla rotazione della Terra rispetto al proprio asse:

$$g = F_G/m = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

$$F_G = mg$$

→ g : *campo gravitazionale*.

In questo contesto l’unità di misura più appropriata per g è N/kg.

- g come accelerazione: vantaggio (a livello di percezione) di scriverla come (9.8 m/s) / s. In una caduta libera il corpo aumenta la propria velocità di 9.8 m/s ogni secondo. → interessante scriverla come (... km/h) / s (→ problema sul quaderno).
- Come il campo gravitazionale (e quindi l’accelerazione di caduta libera) varia con l’altezza rispetto alla superficie terrestre (sempre con le solite approssimazioni, che vanno comunque più che bene). La indichiamo con $a(h)$, per cui $a(0) = g$:

$$a(h) = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

$$\frac{a(h)}{g} = \frac{GM_T/(R_T + h)^2}{GM_T/R_T^2} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Caso interessante: stazione orbitale ISS, con $h \approx 400$ km.

- Valori approssimati (importanti per capire le cose!):

$$\frac{a(h)}{g} = \frac{R_T^2}{R_T^2(1 + h/R_T)^2} = \frac{1}{(1 + h/R_T)^2}$$

Ma, essendo $h/R_T \ll 1$ (nel caso della stazione orbitale $h/R_T \approx 400/6400 = 1/16$):

$$\frac{a(h)}{g} = \frac{1}{(1 + h/R_T)^2} \approx \frac{1}{1 + 2h/R_T} \approx 1 - 2\frac{h}{R_T}$$

che per la ISS diventa

$$\frac{a(h_{ISS})}{g} \approx 1 - 2 \frac{1}{16} \approx 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} :$$

altro che “assenza di gravità”, come si sente dire!

- Gli astronauti sulla ISS non sono in “assenza di gravità”, bensì in assenza di pavimento in quanto astronauti e ISS sono in ‘caduta libera’ verso la Terra, ma non cadono in quanto hanno una velocità trasversale (esattamente come la Luna intorno alla Terra, etc.).
- Velocità della ISS: basta riscaldare opportunamente quella dell’ipotetico satellite in orbita radente:

$$v_R = \sqrt{g R_T} \quad \longrightarrow \quad v_{ISS} = \sqrt{a(h_{ISS}) (R_T + h)} .$$

Valore approssimato:⁷

$$\begin{aligned} v_h &\approx \sqrt{g \left(1 - 2 \frac{h}{R_T}\right) \cdot (R_T + h)} \\ &\approx \sqrt{g \left(1 - 2 \frac{h}{R_T}\right) \cdot R_T \cdot (1 + h/R_T)} \\ &\approx \sqrt{g R_T} \cdot \sqrt{\left(1 - 2 \frac{h}{R_T}\right) \cdot (1 + h/R_T)} \\ &\approx v_R \cdot \sqrt{1 - \frac{h}{R_T}} \\ &\approx v_R \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{R_T}\right) \end{aligned}$$

ovvero la velocità della ISS è, con queste approssimazioni, inferiore a quella del satellite in orbita radente di appena una parte su trentadue, ovvero di circa il 3%.

Pressioni nei fluidi: legge di Stevino (e ancora legge di Archimede)

- Richiamo del concetto di pressione:
 - la pressione non è vettoriale, bensì *scalare*, in quanto non ha direzione e verso;
 - unità di misura e percezione di alcuni valori (vedi problemi sul quaderno individuale).
- Pressione nei fluidi:
 - la pressione è definita punto per punto e la forza che ne deriva dipenda dalla ‘piccola’ superficie ‘di prova’ oppure vera (come superfici di pareti dei contenitori). La ‘piccolezza’ ha a che vedere con il fatto che la pressione può essere diversa da un punto all’altro;

⁷Fra la terza e la quarta espressione abbiamo usato l’approssimazione

$$(1 - 2\epsilon) \cdot (1 + \epsilon) = 1 - \epsilon - \epsilon^2 \approx 1 - \epsilon .$$

- pressione di fluidi in equilibrio: dipende solo dalla quota (alla base del famoso principio dei vasi comunicanti);
- dipendenza della pressione con l'altezza (nel caso di fluidi omogeneo in equilibrio): legge di Stevino (con dimostrazione):

$$\begin{aligned} P_B - P_A &= \rho g h \\ P_B &= P_A + \rho g h, \end{aligned}$$

ove con A e B indichiamo 'alto' e 'basso' (a lezione rispettivamente '1' e '2') e h la differenza di quota.

- Forze su un cilindro retto di sezione di base S posto verticalmente in un fluido:
 - le forze laterali alla stessa quota si annullano (ma possono deformare il recipiente se non abbastanza resistente!);
 - forze verticali:

$$\begin{aligned} F_{tot} &= -P_A S + P_B S \\ &= -P_A S + (P_A + \rho g h) S \\ &= -P_A S + P_A S + \rho g h S \\ &= +\rho g h S \\ &= +\rho g V \\ &= +g m_{fluido} \end{aligned}$$

→ spinta di Archimede verso l'alto.

(Il passaggio da un cilindro retto verticale a un corpo qualsiasi è una questione 'tecnica' che non cambia la sostanza: 1) passare da un cilindro a un parallelepipedo è banale; 2) è sufficiente poi immaginare immaginare il corpo come fatto da tantissimi parallelepipedini affiancati.)

11 (Gio 21 marzo)

Errata corrige

Quaderno individuale:

- nel problema 9.4 la velocità finale asintotica doveva essere 'chiaramente' per $t \rightarrow \infty$;
- nel problema 9.5 la dimensione angolare della luna doveva essere, come ben sappiamo, in primi e non in gradi.

Problemi in corso

Varie, in particolare quelli sulla pressione.

- Pressione su un piano orizzontale di un foglio di carta di densità superficiale σ (ad esempio la carta delle fotocopie ha $\sigma \approx 80 \text{ g/m}^2$):

$$\begin{aligned} m &= \sigma A \\ F &= m g = \sigma A g \\ P &= \frac{F}{A} = \frac{\sigma A g}{A} = \sigma g \end{aligned}$$

(ovviamente non dipende dalla superficie).

Problema dello scioglimento del ghiaccio galleggiante

- quando il ghiaccio galleggia sposta un volume di acqua tale che la massa dell'acqua spostata sia pari alla sua massa;
- quando il ghiaccio si è sciolto si è aggiunta una quantità di acqua che ha esattamente la stessa massa del ghiaccio.

→ stesso livello.

Dalla legge di Stevino alla spinta di Archimede

→ vedi in fondo agli appunti della lezione precedente.

Andamenti esponenziali

Nel seguito si apprezzerà meglio la loro importanza. Per ora è importante cominciare a familiarizzarsi con funzioni del tipo di quelle riportate nei problemi 8.2 e 9.4, cercando di visualizzare graficamente tali funzioni.

Ecco alcuni esempi con Alpha della Wolfram:

[https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot%5B10**exp\(-t%2F2\),+%7Bt,+0,+10%7D+%5D](https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot%5B10**exp(-t%2F2),+%7Bt,+0,+10%7D+%5D)

[https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot%5B10**exp\(-t%2F5\),+%7Bt,+0,+30%7D+%5D](https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot%5B10**exp(-t%2F5),+%7Bt,+0,+30%7D+%5D)

[https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot%5B10*\(1-exp\(-t%2F2\)\),+%7Bt,+0,+10%7D+%5D](https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot%5B10*(1-exp(-t%2F2)),+%7Bt,+0,+10%7D+%5D)

[https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot%5B10*\(1+exp\(-t%2F10\)\),+%7Bt,+0,+50%7D+%5D](https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot%5B10*(1+exp(-t%2F10)),+%7Bt,+0,+50%7D+%5D)

Moto circolare uniforme applicato oggetti orbitanti intorno alla Terra (o al Sole, etc.)

Quello che segue vale per orbite circolari.

- Ricordiamo che l'accelerazione centripeta è dovuta alla forza di gravità, da cui

$$a = \frac{G M_T}{R^2} \propto \frac{1}{R^2}.$$

- La velocità orbitale è legata a raggio e ad accelerazione centripeta da $a = v^2/R$, ovvero $v = \sqrt{aR}$, da cui

$$\begin{aligned} v = \sqrt{aR} &= \sqrt{\frac{G M_T}{R^2} R} \\ &= \sqrt{\frac{G M_T}{R}} \propto \frac{1}{\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

- Il periodo è a sua volta legato a velocità e circonferenza:

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi R}{v} &= \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{G M_T}{R}}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{G M_T}} R^{3/2} \propto R^{3/2} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2}{G M_T} R^3 \\ T^2 &\propto R^3, \end{aligned}$$

nella quale riconosciamo la famosa terza legge di Keplero (qui dimostrata per il caso particolare di orbita circolare, ovvero quando i due semiassi sono uguali).

Si nota come il rapporto fra il cubo del raggio dell'orbita e il quadrato del periodo sia proporzionale alla massa intorno a cui l'oggetto orbita (in quanto caso la Terra, da cui M_T nelle formule)

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G M_T}{4 \pi^2} \propto M_T.$$

Questa relazione ci permette di valutare, ad esempio, la massa del Sole dai dati orbitali di un pianeta.

- Per completezza diamo infine la dipendenza dalla distanza della velocità angolare (la formula con la costante moltiplicativa è lasciata come esercizio)

$$\omega \propto \frac{1}{T} \propto R^{-3/2}$$

- Satelliti geostazionari e antenne paraboliche (e loro uso per orientarsi).

Pozzo per il centro della Terra

Forza all'interno della Terra (assunta di densità uniforme):

- conta solo la sfera da 0 a r (distanza dal centro della Terra dove si trova il punto materiale);
- gusci sferici non producono forza di gravità al loro interno
- Seguono le espressioni di forza ed accelerazioni in funzione di r :

$$\begin{aligned} |F(r)| &= \frac{G M_T(r) m}{r^2} = \frac{G (\rho \frac{4}{3} \pi r^3) m}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho m |r| \\ |a(r)| = \frac{|F(r)|}{m} &= \frac{4}{3} \pi G \rho |r| \\ a(r) = \frac{d^2 r}{dt^2} &= - \left(\frac{4}{3} \pi G \rho \right) r \end{aligned}$$

→ analogia con il moto dell'estremo della molla.

Inoltre, siccome all'interno della terra il modulo dell'accelerazione *cresce linearmente* al crescere di r e deve valere g per $r = R_T$, possiamo riscrivere la dipendenza di a da r come

$$a(r) = - \frac{g}{R_T} r,$$

come si può verificare facilmente.

Questa formula che ha il vantaggio, rispetto ad $a(r) = -\frac{4}{3} \pi G \rho r$, di dipendere solo da g e da R , che si ricordano più facilmente.

Ne segue che l'oscillazione del moto nell'ipotetico pozzo sarà caratterizzato da

$$\omega^2 = \frac{g}{R_T}.$$

Accelerazione di gravità da $R = 0$ a $R \rightarrow \infty$

- all'interno della Terra cresce (in modulo) fino a R_T , dove vale g ;
- poi decresce come $1/R^2$.

Vedi figura sul sito del corso.

12 (Lun 25 marzo)

Errata corrige (non tutto il male vien per nuocere!)

Quaderno individuale: nel problema 11.4 era stato scritto, erroneamente di trovare dai dati del problema a massa del pianeta (ovviamente assunto di essere molto più leggero rispetto al suo Sole).

- Il motivo per cui ciò è impossibile è che, a causa della famosa (e ‘misteriosa’) proporzionalità fra massa inerziale e massa gravitazionale, se non si sono altre forze in gioco (ed es. resistenza dell'aria) tutti i corpi cadono nello stesso modo e i parametri orbitali non dipendono dalla massa (a parte perturbazioni di altri pianeti).
- ‘Misura’ della massa della Terra mediante la misura della costante G (‘esperimento di Cavendish’ – chi è interessato può approfondire su wikipedia o su youtube).
- In modo analogo si può valutare la massa del (nostro) Sole dai dati orbitali dei pianeti, ad es. della Terra (trascurando ragionevolmente le perturbazioni degli altri pianeti, le quali danno piccole correzioni).
- Difficoltà della misura della massa della Luna (appunto perché i dati orbitali non dipendono dalla sua massa):
 - prime valutazioni storiche legate alle maree (che ovviamente dipendono dalla sua massa);
 - misure analoghe a quelle della massa della Terra o del Sole richiedono l'osservazione di oggetti (relativamente piccoli) sotto il campo di gravità della Luna.
- Concetto di *campo gravitazionale*, in analogia al *campo elettrico*, tipicamente incontrato alle superiori:
 - Campo elettrico dovuto alla carica Q nel punto dove si trova la carica q : rapporto fra forza esercitata su q e la carica q stessa; unidimensionale (per semplicità, per capire meglio la sostanza)

$$E^{(Q)}(d) = \frac{F_q^{(Q)}}{q} = \frac{k Q, q}{d^2} \cdot \frac{1}{q} = \frac{k Q}{d^2}.$$

- Campo gravitazionale dovuto alla massa M nel punto dove si trova la massa m : rapporto fra forza esercitata su m e la massa m stessa; unidimensionale (per semplicità, per capire meglio la sostanza)

$$E_G^{(M)}(d) = \frac{F_m^{(M)}}{m} = \frac{G M m}{d^2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{G M}{d^2}.$$

Si capisce quindi il significato di g come *campo gravitazionale in prossimità della superficie terrestre* e del motivo per cui in questo caso l'unità di misura opportuna è N/kg.

Esperimenti in aula di lanci di oggetti

- Trascurando la resistenza dell'aria la forza è sempre mg (ovvero “massa gravitazione \times campo gravitazionale”), diretta verso il basso (va da sé che il campo è un vettore, in quanto rapporto fra il vettore forza e uno scalare).
 - Ne segue che l'accelerazione, mentre un oggetto è ‘in volo’, ovvero da quando è stato lanciato a prima di essere ripreso, l'accelerazione vale sempre g (in modulo) ed è diretta verso il basso. Scriveremo quindi $a = g$ o $a = -g$ a secondo se scegliamo l'asse verticale diretto verso il basso o verso l'alto. La scelta è assolutamente convenzionale, e viene effettuata per convenienze pratiche per evitare di portarsi dietro inutili segni meno. Quello che è importante sono i segni relativi!
 - Grafici orari $v(t)$ per moti con accelerazione costante, in analogia ai grafici orari $s(t)$ per i moti a velocità costante: significato delle ‘pendenze’ di tali andamenti lineari.
 - Esperimenti dei lanci di moneta da piano orizzontale
 - a velocità orizzontale non cambia in quanto non c'è forza (e quindi non c'è accelerazione) lungo l'orizzontale;
 - verticalmente il moto è invece uniformemente accelerato, con accelerazione verso il basso, quindi
 - * la velocità aumenta sempre se si è scelto il verso positivo verso il basso;
 - * diminuisce sempre se si è scelto il verso positivo verso l'alto.
- In particolare, in questo caso (come nel lancio della pallina verso l'alto) non si deve fare confusione fra il fatto che **in modulo** la velocità diminuisca, si azzeri e poi riaumenta: essa diminuisce sempre!
- In particolare, se ad un certo istante essa vale -5 m/s e dopo un po' vale -10 m/s essa è chiaramente diminuita, in quanto $-10 < -5$. È invece aumentata in modulo in quanto $|-10| < |-5|$.

Prime osservazioni del tubo riempito di acqua

- Ancora pressione atmosferica a e pressione all'interno dei fluidi.
- Tubo ‘a U’ come barometro ‘differenziale’: apriamo entrambi i rubinetti, aspettiamo che i livelli nelle due parti si stabilizzino (alla stessa altezza) e li richiudiamo: \rightarrow segue alla prossima lezione.

(Continua)

13 (Mar 26 marzo)

Discussione su alcuni problemi in corso

- Chiarimenti sulla forza di gravità fra due sfere di piombo: la forza va calcolata usando come ‘distanza’ la distanza fra i centri e non la distanza fra le superfici.
- ‘esopianeta’, satellite geostazionario e pozzo per il centro della Terra.
 \rightarrow imparare a usare le ‘leggi di scala’ per fare opportune proporzioni, invece di usare le formule ‘complete’, specialmente se contengono costanti difficili da ricordare.

- Pozzo per il centro della Terra: una volta capito che $a(r) \propto -r$, e ricordando che al centro della Terra e sulla superficie terrestre (nella solita approssimazione di Terra sferica) devono valere $a(r=0) = 0$ e $a(r=R_T) = -g$, si capisce subito, soprattutto se si grafica l'andamento, che la relazione fra accelerazione deve essere del tipo⁸

$$a(r) = -\frac{g}{R_T} r.$$

- Crescita *esponenziale* (ha un significato preciso e non significa 'enorme' o qualcosa del genere, come si legge e si sente sui media).
 - Richiamo sui logaritmi (ancora!).
 - Calcolo di τ da N_0 e $N(t)$
 - Riscrittura dell'andamento esponenziale come $N_0 e^{\alpha t}$ e relazione fra α e τ .
 - Relazione fra τ e il *tempo di raddoppio* ' $t_{\times 2}$ '.

Uso de tubo contenente acqua al fine di misurare la variazione di pressione

- L'acqua dalla parte del rubinetto aperto si porta a un livello 11 mm superiore a quella dall'altra parte:
→ vedi quaderno di laboratorio.
- Riapriamo poi anche l'altro rubinetto e poi li richiudiamo entrambi al fine di 'memorizzare' la nuova pressione: → continua.

Richiamo della velocità media nel caso di velocità costante in intervalli temporali Δt_i

Ripartendo dal problema 2.4 del quaderno individuale, abbiamo

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \quad (5)$$

Il caso particolare del problema 2.4 corrisponde a $\Delta t_1 = \Delta t_2$ La velocità è quindi pari a

$$v_m = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_1}{2 \Delta t_1} = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

media aritmetica delle due velocità.

Nel **caso generale**, si riconosce nella (5) una *media pesata*⁹ delle velocità, con i pesi pari ai tempi di percorrenza a ciascuna velocità, che possiamo estendere a un numero arbitrario di intervallini:

$$v_m = \frac{\sum_i v_i \Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i} \quad (6)$$

⁸Alternativamente, in modo più pedante e macchinoso, si può riscrivere

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi G \rho &= \frac{4}{3} \pi G \rho \cdot \frac{R_T^3}{R_T^3} \\ &= \frac{G M_T}{R_T^2} \cdot \frac{1}{R_T} \\ &= \frac{g}{R_T}. \end{aligned}$$

⁹Si ricorda che è già stata incontrata nel corso un media pesata: quando? E ne vedremo altre.

Velocità media per velocità costante in n intervalli temporali della stessa durata

Focalizziamo la nostra attenzione al caso di n intervallini della stessa durata Δt . La (6) si riduce allora a

$$v_m = \frac{\sum_i v_i \Delta t}{n \Delta t} = \frac{\sum_i v_i}{n}, \quad (7)$$

ovvero anche in questo caso, come da attendersi, la velocità media è pari alla media aritmetica delle velocità.

Ma lo scopo per il quale ci siamo ricavati questo risultato è in preparazione del problema che affronteremo nel prossimo punto. Immaginiamo che nei diversi intervalli Δt la *velocità vari linearmente*. Ad esempio, nel primo potrebbe essere v_1 , nel secondo $v_1 + \Delta v$, nel terzo $v_1 + 2 \Delta v$, etc., fino a $v_n = v_1 + (n - 1) \Delta v$ nell' n -imo intervallo. Le n velocità formano quindi i termini di una *progressione aritmetica*¹⁰ di ‘ragione’ Δv , la cui somma vale

$$\sum_{i=1}^n v_i = \frac{v_1 + v_n}{2} n, \quad (8)$$

La (7) diventa quindi

$$v_m = \frac{\sum_i v_i}{n} = \frac{1}{n} \frac{v_1 + v_n}{2} n = \frac{v_1 + v_n}{2}. \quad (9)$$

un risultato abbastanza intuitivo:¹¹ *se la velocità varia nel tempo linearmente,¹² la velocità media è pari alla media aritmetica fra la velocità iniziale e quella finale*. Questa osservazione è valida anche quando gli intervalli di tempo diventano molto piccoli, ovvero “nel limite $\Delta t \rightarrow 0$ ”, e quindi v varia *con continuità* da $v(t_1)$ a $v(t_2)$ o, come si preferisce in fisica, da $v(t_0)$ al generico $v(t)$.

Moto uniformemente accelerato

Se un moto è uniformemente accelerato (o ‘decelerato’, ovvero con a negativa), la velocità varia linearmente con il tempo. Possiamo far quindi uso del risultato appena ottenuto per valutare sia la velocità media che lo spazio percorso.

Caso di $v_0 = v(t = 0) = 0$

$$\begin{aligned} v(t) &= a t \\ v_m(t) &= \frac{0 + v(t)}{2} = \frac{a t}{2} \\ s(t) = v_m(t) \cdot t &= \frac{a t}{2} t = \frac{1}{2} a t^2. \end{aligned}$$

¹⁰Che non l’avesse mai incontrata alle superiori non si spaventi. Il risultato finale è semplice e intuitivo.

¹¹Ma si faccia attenzione all’intuizione, come ha insegnato il problema 2.3!

¹²“Nel tempo” è sottolineato, in quanto **se la velocità varia linearmente con la posizione tale relazione non è valida**. Vedremo nel seguito un problema di questo tipo.

Caso generale, con $v_0 \neq 0$

$$\begin{aligned}v(t) &= v_0 + a t \\v_m(t) &= \frac{v_0 + v(t)}{2} = \frac{v_0 + v_0 + a t}{2} = v_0 + \frac{1}{2} a t \\s(t) = v_m(t) \cdot t &= \left(v_0 + \frac{1}{2} a t \right) \cdot t = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.\end{aligned}$$

Ovviamente questo è lo spazio percorso nel tempo t dalla posizione iniziale. Se indichiamo la generica posizione iniziale con s_0 , otteniamo la più generica

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Caso particolare, con $a = -g$ (sola forza peso, riferimento verso l'alto)

Se prendiamo s diretta verso l'alto (a volte indicata anche con z – ma quando il moto è unidimensionale la notazione è “a piacere”, basta capirsi)

$$\begin{aligned}v(t) &= v_0 - g t \\s(t) &= s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}$$

Se avessimo indicato la coordinata verticale con z avremmo avuto, equivalentemente

$$\begin{aligned}v_z(t) &= v_{z_0} - g t \\z(t) &= z_0 + v_{z_0} t - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}$$

o anche (indicando con h l'altezza e semplicemente con v la velocità, visto se si capisce di cosa si sta parlando),¹³

$$h(t) = h_0 + v t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Moto in due dimensioni in presenza di sola forza peso

In generale, la velocità iniziale ha sia una componente orizzontale che una verticale. La indicheremo quindi con il vettore

$$\vec{v}_0 = \{v_{x_0}, v_{y_0}\},$$

ove, tanto per fare un po' di ginnastica mentale, e familiarci che le notazioni sono di comodo, abbiamo indicato l'asse orizzontale con x e quello verticale con y , ovviamente rivolto verso l'alto, secondo la familiare notazione del piano cartesiano. Essendo la forza peso diretta verso il basso, otteniamo, dalla seconda legge di Newton l'accelerazione:

$$\begin{aligned}\vec{F} = \{F_x, F_y\} &= \{0, -m g\} \\ \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} &= \{0, -g\}.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

¹³Si cerchi di non memorizzare le formule, che *sembrano* tante: la sostanza è sempre la stessa, cambia solo la notazione!

- un **moto rettilineo uniforme lungo x**;
- un **moto uniformemente accelerato lungo y**.

La regola per analizzare il moto in più dimensioni, a partire dalle condizioni iniziali e dalla forza (che eventualmente può dipendere dalla posizione e dal tempo, ma non nel nostro caso elementare) è che **il moto lungo un asse è indipendente da quello lungo gli altri assi, mentre il tempo è comune**.

Ipotetica orbita radente intorno alla Terra, rivista alla luce delle cadute libere con velocità iniziale orizzontale

Si immagini di sparare un oggetto orizzontalmente lungo un meridiano da una certa altezza h .

- All'aumentare della velocità iniziale orizzontale l'oggetto cadrà sempre più lontano.
- Essendo la Terra sferica, se la velocità è grande l'oggetto finirà oltre l'orizzonte.
- Se la velocità aumenta ancora l'oggetto si troverà sempre alla stessa altezza h rispetto alla superficie terrestre: \rightarrow orbita circolare.

\Rightarrow **Cannone di Newton** (vedi immagine e link sul sito del corso).

14 (Gio 28 marzo)

Aristarco di Samo e misura della distanza Terra-Sole

- Quarto di Luna: Terra-Luna-Sole formano un triangolo rettangolo.
- Dalla conoscenza della distanza Terra-Luna (valutata da Aristarco¹⁴) e dall'angolo Luna-Terra-Sole si può misurare la distanza Terra-Sole mediante triangolazione.
- Purtroppo tale misura è difficile in quanto tale angolo è molto vicino a 90° . Aristarco valutò la distanza Terra-Sole circa 19 volte la distanza Terra-Luna.¹⁵, il che implicava che il Sole fosse molto più grande della Terra, essendo i diametri angolari di Sole e Luna visti dalla Terra praticamente uguali.

Ancora sulla terza legge di Keplero per orbite circolari

Abbiamo già visto la relazione $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$, che possiamo riscrivere come

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

K_\odot , K_\oplus definite come i rapporti (costanti) di R^3/T^2 per gli oggetti che orbitano intorno a Sole e Terra. Idem per altri pianeti, ad es. K_\Jup per Giove, o altri 'soli' di altri sistemi solari.

¹⁴Ad esempio, dal confronto fra l'ombra della Terra durante un'eclisse e dal diametro angolare della Luna; oppure facendo uso di dimensione della luna e dal tempo impiegato ad attraversare l'ombra terrestre durante un'eclissi.

¹⁵https://it.wikipedia.org/wiki/Aristarco_di_Samo

Lanci di oggetti soggetti alla sola forza peso ‘ mg ’

Riepilogo sulla notazione vettoriale, con caso specifico di un punto materiale soggetto alla sola forza peso, costante in prossimità della superficie terrestre:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (F_x, F_y) \longrightarrow (0, -mg) \\ \vec{a} &= (a_x, a_y) \longrightarrow (0, -g) \\ \vec{v} &= (v_x, v_y) \longrightarrow (v_{x_0}, v_{y_0} - gt) \\ \vec{s} &= (x, y) \longrightarrow (x_0 + v_{x_0}t, y_0 + v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2).\end{aligned}$$

Casi notevoli (vedi animazione sul sito):

- lancio orizzontale (da posizione rialzata);
- lancio con v_{x_0} costante (e positiva) e v_{y_0} (positiva) variabile;
- lancio con v_{y_0} costante (e positiva) e v_{x_0} (positiva) variabile;
- lancio con velocità costante in modulo, con angolo variabile.
[In generale $v_x = v \cos \theta$; $v_y = v \sin \theta$]

Dalle equazioni orarie, $x(t)$, $y(t)$ all’equazione della traiettoria:

- si risolve una delle due (quella più semplice) rispetto a t e si sostituisce nell’altra;
- Ad esempio, per lanci orizzontali fa $y_0 = h$:

$$\begin{aligned}x &= v_{x_0}t \\ y &= h - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

da cui $t = x/v_{x_0}$ e

$$y = h - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{v_{x_0}^2} \right) x^2$$

ovvero traiettoria parabolica (idem per gli altri casi, semplicemente perché $(x - x_0) \propto t$, e quindi $t \propto (x - x_0)$, da cui segue che $y(x)$ è una parabola).

Problemi di gittata

- dipendenza dai parametri (e analisi dimensionale):

$$\begin{aligned}t_v &\propto \frac{v_{oy}}{g} \\ d &\propto t_v \cdot v_{oy} \\ &\propto \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

- per il conto completo basta ricordare che $t_v = 2 v_{oy}/g$.
- Poi, con una piccola manipolazione trigonometrica si può far dipendere il risultato da $\sin 2\theta$, più facilmente analizzabile (da cui si vede a occhio l’angolo di gittata massima) \longrightarrow vedi problema 16.4.

Composizione delle forze

Semplice somma di vettori: se $\vec{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y})$ e $\vec{F}_2 = (F_{2x}, F_{2y})$,

$$\vec{F}_t = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_{1x} + F_{2x}, F_{1y} + F_{2y})$$

da cui segue banalmente la ‘regola del parallelogramma’, di memoria scolastica, e l’estensione alla somma di tante forze.

Scomposizione delle forze

Come un qualsiasi numero può essere sostituito dalla somma dei addendi che danno quel numero (ad es $10 = 5 + 5 = 7 + 3 = 2 + 8$, etc.) così una forza può essere scomposta in due forze. Questa (apparentemente) banale osservazione è di utilità per la soluzione di problemi in cui una delle due forze componenti è annullata, istante per istante, da un’altra forza, come si vedrà nel seguito (\rightarrow piano inclinato e pendolo).

Esperimenti di Berti e di Torricelli e *scoperta del vuoto*

\rightarrow Vedi link sul sito.

Barometro di Torricelli. Pressione atmosferica espressa in mm di mercurio e in cm di acqua.

Effetti spettacolari di forza di pressione con bilanciata da altra forza di pressione: dimostrazione Magdeburgo (\rightarrow Vedi link sul sito).

Paradossi idrostatici

Il fatto che la pressione, e quindi la forza di pressione, dipende solo dal livello e non dalla quantità in gioco è controintuitivo: si fa più fatica a tenere tappato con un dito un tubo riempito di acqua e alto qualche decina di metri che tenere tappato un buco in una diga dei Paesi Bassi!

\rightarrow Vedi link sul sito.

Condizione di galleggiamento per corpi solidi

Se indichiamo con x la frazione di volume (V) immerso, con ρ_C la densità del corpo e con ρ_F la densità del fluido, la condizione di equilibrio è semplicemente

$$-(\rho_C V)g + (\rho_F x V)g = 0$$

da cui si ricava che la frazione immersa è pari a $x = \rho_C / \rho_F$ (e ovviamente se $\rho_C > \rho_F$ il corpo affonda).

15 (Lun 1 aprile)

Discussione su alcuni problemi in corso

In particolare

- pressione del palloncino e forze di pressione sulla sua superficie;
- problema di gittata

Piano inclinato

Attrito statico, con dimostrazioni in aula

Piano inclinato con attrito statico

Misura del coefficiente di attrito dall'angolo di stacco.

Attrito dinamico

16 (Mar 2 aprile)

Discussione su alcuni problemi in corso

In particolare

- piano orizzontale e inclinato con attrito;
- orbita radente su pianeti di diversa densità: ancora sul significato di K_{\oplus} e sul suo uso;
- problema della gittata e riscrittura della formula in modo da farla dipendere da $\sin 2\theta$ (vedi problema 16.4);
- periodi del moto dell'oggetto nel pozzo per il centro della Terra e di quello in orbita radente:
→ sono uguali, ma non perché vengono numeri simile, bensì perché vengono le stesse formule!

Ancora cannone di Newton e orbita radente

bla bla

Problema dei vagoncini

bla bla

Misura sulle uova (e controllo di galleggiamento)

bla bla

Oscillazione della colonna d'acqua all'interno di un tubo a U

bla bla

Introduzione al pendolo

bla bla

Questioni di matematica (da sapere!)

bla bla

tacchino 'vorace' a crescita infinita
evoluzione di popolazione di batteri

17 (Gio 4 aprile)

Comunicazione da parte del CAD

Il corso di Inglese comincia Lun 15 aprile dalle 9 alle 11 in aula 8 di Geochimica.

Chiarimenti sulla molla posta verticalmente

Abbiamo analizzato il moto della molla da $F(x) = -kx$.

Che fine ha fatto mg ?

Quello che conta è lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio!

Dettagli → **F1inf** ('Analisi della molla', p. 23, senza la nota in fondo)

Chiarimenti sulla formalismo Matematica ↔ Fisica (e altre Scienze)

- In matematica si tende all'astrazione: la generica variabile indipendente è indicata con x (se una sola) e la generica sua funzione con $f(x)$. Al valore associato ad ogni x si tende a dare il nome generico y (a meno che non si abbiano funzioni di più di una variabile). Si scrive allora $y = f(x)$, anche se per brevità si usa spesso $y(x)$ and indicare che la y è funzione di x .

La derivata è fatta tipicamente rispetto alla generica x e la funzione risultante è indicata con $f'(x)$.

Essendo $f'(x)$ una nuova funzione, questa può essere a sua volta derivata, e la derivata di $f'(x)$ è indicata con $f''(x)$, quindi chiamata *derivata seconda* di $f(x)$.

- In Fisica e nelle altre Scienze della Natura (es. Biologia, Chimica), la variabile indipendente è spesso (ma non necessariamente) il tempo t , in quanto si ha spesso l'interesse di capire come il valore di una certa variabile cambia con il tempo. E alle variabili di interesse si dà un nome mnemonico il quale ricorda la variabile stessa. Si possono così avere, ad esempio con ovvio significato dei simboli,

- $x(t), y(t), s(t)$, etc.;
- $v(t), v_x(t), v_y(t), a(t), a_x(t), a_y(t)$, etc.;
- $F(t), F_x(t), F_y(t)$, etc.;
- $P(t), V(t), \rho(t), m(t), l(t), \theta(t), \varphi(t), \omega(t), T(t)$ etc..

Ma possiamo avere anche

- $P(T), \rho(T), l(T)$, con T la temperatura, dalla quale possono dipendere pressione e densità di un gas o la lunghezza di una barra metallica;
 - $F(x), a(x)$ (molla e altri sistemi oscillanti); $F(r), a(r)$ (pozzo per il centro della Terra);
 - $v(R), \omega(R), T(R)$, per moti in orbita circolare alla distanza R dal centro dell'*attrattore* (In questo caso T è un periodo e non una temperatura, ovviamente).
- L'*operatore* derivata viene spesso indicato con la cosiddetta *notazione di Leibnitz*, la quale ha il vantaggio di rendere esplicita la variabile rispetto alla quale si sta derivando. Alle funzione risultante dall'operatore derivata viene in genere dato un nome che ricorda

il suo significato fisico, come ad esempio (i due modi di scrivere l'operatore derivata sono equivalenti – il primo rende palese il fatto che 'dx/dt' è un operatore)

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{d}{dt}x = \frac{dx}{dt} \\a_x &= \frac{d}{dt}v_x = \frac{dv_x}{dt} .\end{aligned}$$

A volte si scrive esplicitamente che le variabili in gioco dipendono dal tempo, ma in genere questo è sottinteso, soprattutto se stiamo derivando rispetto ad esso. In tal caso scriveremmo

$$\begin{aligned}v_x(t) &= \frac{d}{dt}x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\a_x(t) &= \frac{d}{dt}v_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} .\end{aligned}$$

L'operatore derivata seconda viene scritto in un modo che ricorda che è stato iterato l'operatore di derivata. Per l'accelerazione abbiamo quindi¹⁶

$$a_x = \frac{d}{dt}v_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}x \right) = \frac{d^2}{dt^2}x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

o anche, esplicitando la dipendenza temporale,

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v_x(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}x(t) \right) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Nota importante sulle dimensioni

Un'altra grande differenza fra la trattazione astratta della Matematica e quella della Fisica è che, mentre nella matematica le variabili in gioco sono dei numeri, in Fisica abbiamo delle *grandezze fisiche*, caratterizzate non solo da un valore numerico ma anche da unità di misura. Quindi quando si fa una derivata il risultato avrà in generale (a meno di variabile di derivazione adimensionale) una dimensione fisica diversa di quella della grandezza che si è derivata. Questo si vede particolarmente bene nella notazione di Leibnitz, la quale ricorda l'origine del limite del rapporto incrementale. Quindi, ad esempio,

- la derivata di una temperatura rispetto al tempo, dT/dt avrà quindi le dimensioni di temperatura su tempo, e sarà misurata in gradi su secondo;
- così pure avviene per dx/dt e dv/dt , come ben sappiamo.

E così via per la derivata seconda.

¹⁶Per capire come mai al 'numeratore' il quadrato sia su d , mentre al 'denominatore' sia 'su t ' (in realtà su dt), si pensi a due operatori in successione:

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} = \frac{d^2}{(dt)^2} ,$$

scritto poi come

$$\frac{d^2}{dt^2} .$$

(un po' come, cm^2 sta per $(\text{cm})^2$ e non per $\text{c}(\text{m}^2)$, che sarebbero dei 'centi-metriquadrati' invece di centimetri-quadrati.

Equazioni ordinarie ed equazioni differenziali

Abbiamo incontrato una classe di problemi per la quale esiste una relazione fra una variabile che dipende dal tempo e la sua derivata seconda (fatta rispetto al tempo), qualcosa del tipo

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -(\dots)x(t),$$

ove la parentesi contiene grandezze definite positive.

Abbiamo visto anche un'altra classe di problemi

18 (Lun 8 aprile)

Ruolo delle carrucole (ideali) nei problemi di meccanica

Nei problemi elementari le carrucole vanno viste come oggetti ideali in grado di cambiare la direzione di una forza, senza aggiungere ulteriori forze (di resistenza) o inerzia.

- Ad esempio il sistema fisico di un oggetto di massa m_1 posto su un tavolo e connesso mediante carrucola a un oggetto di massa m_2 sospeso è equivalente a m_1 tirata da una forza $m_2 g$ applicata lungo la direzione della fune a cui è legata, ma l'inerzia del sistema è data da $m_1 + m_2$.

Per risolvere in dettaglio bisogna considerare la tensione T della fune. Quindi, se per esempio trascuriamo la forza di attrito del tavolo su m_1 abbiamo che la forza su m_1 vale $F_1 = T$, mentre quella su m_2 vale $F_2 = m_2 g - T$. Il problema si risolve notando che, se le funi sono inestensibili, i due corpi sono solidali, ovvero sono soggetti alla stessa accelerazione:

$$a = \frac{T}{m_1} = \frac{m_2 g - T}{m_2}$$

da cui

$$\begin{aligned} T &= g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ a &= g \frac{m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

(forza peso di m_1 ; inerzia di entrambe le masse).

- Variante con piano inclinato, con carrucola in alto e oggetto sospeso.
- Variante con due piani inclinati che "si incontrano in alto".

Ancora trasformazioni galileiane – principio di relatività

Essendo

$$\vec{r}_{O'}(P) = \vec{r}_{O'}(O) + \vec{r}_O(P)$$

derivando rispetto al tempo

$$\vec{v}_{O'}(P) = \vec{v}_{O'}(O) + \vec{v}_O(P).$$

Se $\vec{v}_{O'}(O)$ è costante (\rightarrow sistemi di riferimento inerziali), derivando ancora rispetto al tempo:

$$\vec{a}_{O'}(P) = 0 + \vec{a}_O(P)$$

e quindi

$$\vec{F}_{O'}(P) = 0 + \vec{F}_O(P)$$

\rightarrow stessa dinamica: Principio di Relatività (di Galileo, o ‘Classico’): le leggi della fisica sono invarianti per diversi sistemi che si muovono con velocità costante l’uno rispetto all’altro.

Sistemi di **riferimento inerziali**: “quelli che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle fisse” (sarebbero “quelli nei quali vale il principio di inerzia”, ma si capisce bene che definizione diventa circolare).

Composizione galileiana delle velocità: è quella che abbiamo visto. Essa si basa sul fatto che quando abbiamo fatto la derivata su tutti i termini della trasformazione di coordinate abbiamo assunto un tempo universale nei diversi sistemi di riferimento. Ma questo non è vero per velocità ‘confrontabili’ con la velocità della luce: \rightarrow relatività ristretta di Einstein; il tempo scorre in modo diverso nei diversi sistemi di riferimento; la composizione delle velocità cambia (formula relativistica) e fa sì che la velocità non possa mai superare (e nemmeno raggiungere, per i corpi che hanno massa) la velocità della luce. [Ovviamente queste osservazioni sono per cultura generale e non costituiranno materia d’esame.]

Ancora su andamenti esponenziali

- Decrescita esponenziale della velocità nell’ipotesi di forza resistenza proporzionale alla velocità.
- Crescita di massa del *tacchino esponenziale*.

Relazione fra α , τ e tempi di raddoppio/dimezzamento: semplice esercizio, in cui bisogna solo ricordare che il logaritmo è la ‘funzione inversa’ dell’esponenziale, nel senso che $\log(e^x) = x$.

Leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien

Riprendiamo il discorso cominciato con la costante solare, ovvero la potenza per unità di superficie che ci arriva dal Sole (fuori dall’atmosfera)

- Dalla costante solare ci siamo calcolati la potenza totale emessa dal sole.
- Dalla distanza Terra-Sole e dalle dimensioni angolari del Sole ci siamo calcolati il diametro del Sole.
- Dalla potenza totale emessa e dalle sue dimensioni ci siamo calcolati la potenza emessa per unità di superficie.

Dalla potenza per unità di superficie si possiamo calcolare la temperatura delle superficie del Sole, facendo uso di una legge fisica verificata sulla Terra per ‘corpi neri’ (di cui il Sole è un’ottima approssimazione):

- Un *corpo nero* quando è scaldato emette onde elettromagnetiche. All’aumentare della temperatura aumenta (con la quarta potenza della temperatura!) l’energia emessa e ‘tende ad emettere’ radiazioni di lunghezza d’onda via via decrescente (o frequenze via via crescenti).

- Legge di Stefan-Boltzmann (per corpo nero ideale)

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4,$$

con P/A la potenza emessa per unità di superficie; T la temperatura in kelvin e $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

Quindi dalla potenza per unità di superficie del Sole ci possiamo valutare la sua temperatura superficiale (che non va confusa con quella interna, molto più elevata e in grado di permettere le collisioni fra nuclei che sprigionano energia mediante reazioni nucleari).

- Nota metrologica: tutte le misure sono basate su un *principio fisico di misura* (o ‘chimico’ se si tratta di reazioni chimiche, etc.). In questo caso la misura della temperatura del Sole si basa appunto sulla legge di Stefan-Boltzmann.
- Data la sua temperatura di superficie, il Sole ha il massimo di emissione nel visibile (è l’occhio umano che si ottimizza alla luce che riceve!), ma come è ben noto, il Sole emette anche nell’infrarosso e nell’ultravioletto.

Lo spettro di emissione (ovvero la potenza emessa alle varie lunghezze d’onda) è dato dalla legge di Planck, nei cui dettagli non possiamo entrare.

Una legge più semplice fornisce invece una semplice relazione fra la lunghezza d’onda nella quale c’è il massimo di emissione elettromagnetica e la temperatura (legge di Wien): $\lambda_{max} \propto 1/T$, o più precisamente

$$\lambda_{max} \cdot T = k,$$

con $k = 2.9 \times 10^{-3} \text{ K}\cdot\text{m}$.

⇒ vedi figure sul sito e problemi sul quaderno.

- A suo tempo avevamo visto alcuni parametri importanti delle lampadine commerciali: la potenza (espressa in Watt), che indica quanto consuma per funzionare, e il flusso luminoso (espresso in lumen), che appunto indica “quanta luce visibile essa fornisce nell’unità di tempo”.

Un altro importante parametro è la *temperatura colore*, legato alla legge di Wien, anche se la nomenclatura che lo accompagna è in contraddizione con le leggi del corpo nero. Viene infatti chiamata ‘luce fredda’ quella legata a temperature elevate (5000-6000 K) e calda quella legata a temperature inferiori (ad es. 3000-4000 K). Questo è dovuto a un effetto psicologico perché associamo il giallo-rossastro al fuoco e l’azzurro al ghiaccio. Ma basta saperlo. . .

19 (Mar 9 aprile)

Discussione e delucidazioni su alcuni problemi

- Nuotatore avanti-indietro lungo il fiume: la minore velocità quando nuota più lentamente controcorrente non viene compensata da quando nuota più velocemente seguendo la corrente, perché è *maggiore il tempo in cui nuota più lentamente di quello in cui nuota più lentamente*.

Il caso limite è quando la velocità del nuotatore rispetto alla corrente è pari a quella del fiume rispetto alla riva: è vero che all’andata la sua velocità raddoppia, ma al ritorno essa si annulla e non tornerà mai indietro!

- Cosa succederebbe alla Terra se la temperatura (assoluta) sulla superficie del Sole aumentasse o diminuisse del 10%? Siccome la potenza emessa va come la quarta potenza di T , la costante solare quasi raddoppierebbe o si dimezzerebbe! Si provi con

$$\begin{aligned} T_1 &= 1.1 \times T_0 \\ T_2 &= 0.9 \times T_0 \end{aligned}$$

e se ne faccia la quarta potenza.

- Ancora sulle equazioni fra derivata seconda e la *generica* grandezza x (non necessariamente una coordinata) del tipo

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - () x$$

ove all'interno della parentesi c'è una espressione il cui valore numerico positivo e avente dimensionalità pari all'inverso del quadrato del tempo (se così non fosse è segno che c'è stato un errore nella derivazione dell'equazione, come insegna l'*analisi dimensionale*).

L'equazione viene reinterpretata come

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

con ω^2 il contenuto della parentesi e, come abbiamo visto più volte, la generica funzione che soddisfa tale condizione è

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi),$$

come si può provare facilmente. Il caso particolare $x(t) = X \cos(\omega t)$ si ha quando abbiamo, per $t = 0$,

$$\begin{aligned} x(0) &= X \\ x'(0) &= 0, \end{aligned}$$

come si può verificare facilmente.

Equazioni delle onde

L'equazione generale è del tipo

$$f(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x), \quad (10)$$

ove $f()$ rappresenta la generica grandezza fisica (che può essere ad esempio un campo elettrico o magnetico nel caso di onde elettromagnetiche) variabile in funzione della coordinata x e del tempo.

La (10) può essere vista come una funzione di t se fissiamo la posizione x (x_F) e una funzione di x se fissiamo t (t_F):

$$f(t; x_F) = A \cos(\omega t - \beta x_F) \quad (11)$$

$$f(x; t_F) = A \cos(\omega t_F - \beta x) \quad (12)$$

(→ Vedi figure e animazioni sul sito)

L'analogia fra le due equazioni ci permette di interpretare β come una 'pulsazione spaziale' in analogia alla pulsazione 'temporale' ω (sul motivo del segno meno del secondo termine torneremo nella prossima lezione).

Periodo e lunghezza d'onda

Riprendiamo la funzione del tempo per $x_F = 0$ e che riscriviamo quindi $f(t; x_F = 0) = A \cos(\omega t)$. Siccome le funzioni sinusoidali hanno una periodicità di 2π , abbiamo

$$\begin{aligned}\cos(\omega t) &= \cos(\omega t \pm 2\pi) \\ &= \cos\left[\omega\left(t \pm \frac{2\pi}{\omega}\right)\right] \\ &= \cos[\omega(t \pm T)],\end{aligned}$$

Avendo indicato con $T = 2\pi/\omega$ il tempo dopo il quale la funzione sinusoidale si ripete esattamente (ovviamente questo è vero per qualsiasi altra x_F e anche per la funzione seno). Quindi $T = 2\pi/\omega$ dà la periodicità della funzione delle onde vista come sola funzione del tempo: è infatti il ben noto *periodo*.

Facciamo una cosa simile per la funzione di x per $t_F = 0$:

$$\begin{aligned}\cos(-\beta x) &= \cos(-\beta x \pm 2\pi) \\ &= \cos\left[-\beta\left(x \mp \frac{2\pi}{\beta}\right)\right] \\ &= \cos[-\beta(x \mp \lambda)],\end{aligned}$$

ove abbiamo indicato ora con λ la periodicità spaziale dell'onda: \rightarrow *lunghezza d'onda*.

Riassumendo

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{\beta}\end{aligned}$$

Integrali in Fisica

Velocità \rightarrow variazione di posizione \rightarrow posizione 'finale'

Essendo $v_x = \frac{dx}{dt}$ segue

$$dx = v_x dt$$

$$\Delta x|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt.$$

In particolare

$$\Delta x|_0^{t_F} = \int_0^{t_F} v_x(t) dt,$$

che possiamo scrivere, indicando semplicemente con t l'istante fino al quale si vuole integrare (t_F dell'espressione precedente),

$$\Delta x|_0^t = \int_0^t v_x(t') dt',$$

nella quale è stato indicando quindi con t' la variabile ‘tempo’ sulla quale si integra (e che non va confusa con l’estremo di integrazione!).

Ne segue quindi che, essendo per definizione

$$\Delta x|_0^t = x(t) - x(0),$$

$$x(t) = x(0) + \Delta x|_0^t = x(0) + \int_0^t v_x(t') dt'.$$

E idem per le coordinate y e z .

Accelerazione → variazione di velocità → velocità ‘finale’

Cosa analoga per calcolare Δv_x a partire da $a_x(t)$, e idem per le altre componenti.

Esercizio sugli integrali: volume di un cono

- Il volume di un cono può essere visto come quello di infinite ‘fette circolari di spessore infinitesimo’. Allineando l’asse del cono lungo la coordinata x , con vertice in $x = 0$, la fetta nel punto x sarà data da un cilindro di base $A(x) = \pi r^2(x)$, con il raggio della fetta $r(x)$ che *cresce linearmente* al crescere di x , e altezza dx . Bisognerà sommare quindi le *infinite fette infinitesime* che vanno da $x = 0$ a $x = h$, ove h è l’altezza del cono.
- Bisogna innanzitutto trovare l’espressione di $r(x)$. Siccome il raggio delle fette cresce linearmente da $r = 0$ per $x = 0$ a $r = R$ (raggio della base del cono) per $x = h$, si ottiene banalmente

$$r(x) = \frac{R}{h} x.$$

- Quindi

$$dV = A(r) dx = \pi \frac{R^2}{h^2} x^2 dx$$

- A questo punto il gioco è fatto:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h dV = \int_0^h A(x) dx \\ &= \int_0^h \pi r^2(x) dx \\ &= \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} x^2 dx \\ &= \pi \frac{R^2}{h^2} \left(\frac{1}{3} h^3 \right) = \frac{1}{3} \pi R^2 h, \end{aligned}$$

cioè un terzo dell’area di base per l’altezza, ovvero un terzo del volume di un cilindro che ha stessa base e stessa altezza.

20 (Gio 11 aprile)

Problemi in corso

- Il calcolo del volume della piramide di base quadrata è sostanzialmente simile a quello del cono, in quanto in entrambi i casi le dimensioni lineari delle ‘fette’ crescono linearmente con la distanza dal vertice e quindi l’area cresce quadraticamente. E difatti in entrambi i casi si ottiene che il volume è pari a un terzo dell’area di base per l’altezza (e finalmente si capisce il misterioso – almeno nelle scuole medie – $1/3$ nella formula di questi volumi: viene dall’integrale di x^2 .)
- Pioggia nel sistema di riferimento della macchina: nella trasformazione bisogna ricordare che se l’auto viaggia con velocità v_A rispetto al terreno, questo è visto andare con velocità $-v_A$ rispetto all’auto.

Da $v(t)$ allo spazio percorso – un esempio interessante

Abbiamo visto che se un corpo che aveva inizialmente una velocità v_0 è soggetto alla sola forza del tipo $-\beta v$, la velocità varia secondo una legge esponenziale negativa

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

con $\tau = m/\beta$ (e da tale espressione si ricava facilmente il tempo dopo il quale la velocità si dimezza).

Spazio percorso da quando il corpo comincia a frenare:

$$\begin{aligned} ds &= v(t) dt \\ \Delta s|_0^t &= \int_0^t ds = \int_0^t v(t') dt' \end{aligned}$$

(Calcolo lasciato come esercizio).

Interessante è lo spazio percorso fino a quando l’oggetto non si ‘ferma completamente’ (fare i conti):

$$\Delta s|_0^\infty = v_0 \tau = v_0 \frac{m}{\beta}$$

Lo spazio percorso è pari al prodotto della velocità iniziale per la costante di tempo τ e risulta quindi proporzionale, oltre che alla velocità iniziale, all’inerzia (m), mentre è inversamente proporzionale al ‘coefficiente di resistenza’ β .

Nota sugli infiniti in Fisica (e in genere)

Da quanto abbiamo appena visto sembra che affinché un oggetto si fermi bisogna attendere un ‘tempo infinito’, cosa che va contro la comune esperienza, in quanto palesemente “le cose prima o poi si fermano”.

- Innanzitutto bisogna ricordare che gli *infiniti non sono dei numeri ma vanno visti come dei limiti*. Quindi $t \rightarrow \infty$ va inteso come $t \gg \tau$, ove il molto maggiore dipende dall’accuratezza dell’esperimento. Tempi dell’ordine della decina di τ sono considerati come ‘infiniti a tutti gli effetti pratici’.

- I modelli sono sempre delle approssimazioni e ci sono altri effetti che possono diventare importanti quando quelli modellizzati diventano trascurabili. Ad esempio, nel nostro caso, quando la velocità diventa ‘molto piccola’ entrano in gioco altre forme di ‘attrito’ di cui il modello non tiene conto, e questi fanno fermare definitivamente l’oggetto. (Ovviamente stiamo parlando di oggetti classici ‘macroscopici’ e non di atomi o molecole, che non si fermano mai.)

Alcuni integrali interessanti

Innanzitutto ricordiamo che, mentre nei corsi di matematica la variabile indipendente, e quella sulla quale si deriva e si integra è la generica x , in fisica la variabile indipendente di interesse è tipicamente il tempo t , ma se ne possono incontrare anche altre.

Ecco alcuni integrali visti a lezione e dei quali non diamo la soluzione dettagliata (vedi anche quaderno individuale):

$$\int_{x_1}^{x_2} (-k x) dx$$

$$\int_{x_M}^0 (-k x) dx$$

$$\int_{x_M}^{-x_M} (-k x) dx$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{1}{R^2} \right) dR$$

$$\int_{R_T}^{\infty} \left(-\frac{1}{R^2} \right) dR$$

Ed ecco infine la lista delle (pochissime!) **funzioni delle quali ci interesseranno le ‘primitive’** (o *antiderivate*), scritte in funzione della generica x ,

$$x^n \quad \text{con } n \neq -1$$

$$x^{-1}$$

$$e^{\alpha x}$$

alle quali possiamo aggiungere seno e coseno (ma solo per quale problemino e non per questioni fondamentali, almeno per quanto riguarda questo corso).

Volume della sfera

Si tratta di sommare le infinite fette radiali. Per semplicità si può fare il calcolo della semisfera ponendo il centro nell’origine. In questo caso il raggio (r) delle fette diminuisce con x , ma non linearmente (altrimenti si avrebbe un cono con la base in $x = 0$ e il vertice in $x = h$!). Per il calcolo di $r(x)$ basta osservare dal disegno (vedi sul sito del corso) che $x^2 + r^2 = R^2$ (Pitagora), con R il raggio della sfera.

L’integrale è lasciato come esercizio, e la soluzione è ovviamente ben nota.

Onde: relazione fra lunghezza d’onda e frequenza $\lambda \nu = v$

Come visto, la (10) descrive oscillazioni nello spazio e nel tempo (vedere animazione sul sito del corso).

Ci possiamo chiedere a che velocità dobbiamo andare lungo x per vedere sempre affianco a noi sempre una ‘cresta’ o un ‘avvallamento’ dell’onda (si pensi alle onde del mare e ai surfisti). La nostra richiesta si traduce nella richiesta che sia costante l’argomento della funzione coseno, in modo tale che sia costante $f(x, t)$:

$$\begin{aligned}\omega t - \beta x &= k \\ \beta x &= \omega t - k \\ x &= \frac{\omega}{\beta} t + k',\end{aligned}$$

ove abbiamo indicato con k' la nuova costante $-k/\beta$ (tanto quello che interessa è che sia una costante, qualunque sia il simbolo).

Vediamo quindi che x varia linearmente con il tempo e quindi il fattore ω/β ha il significato di una velocità: \rightarrow *velocità* (‘di fase’) *dell’onda*,

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

da cui otteniamo interessanti e utili relazioni

$$v = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T},$$

ma, essendo la frequenza $\nu = 1/T$, possiamo anche scrivere

$$\lambda \nu = v$$

valida anche per le onde elettromagnetiche (e quindi per la luce), con $v = c$.

A questo punto si capisce perché il termine βx compare con il segno meno nella funzione delle onde scritta sopra: essa descrive un’*onda progressiva*, nel senso che viaggia nel verso delle x crescenti (all’aumentare di t aumenta x). Se avessimo messo il segno più, avremmo avuto un’*onda regressiva*, ovvero avente velocità negativa. In genere, a seconda dei problemi esiste una o l’altra, o anche entrambe.

Prima determinazione della velocità della luce

Ottenuta da Roemer per spiegare la variazione del periodo di Io intorno a Giove a seconda del moto relativo Terra-Giove. (Per dettagli vedi figure e link sul sito)

- Importanza (anche pratica!) delle misure di precisione dei fenomeni celesti e della previsione di fenomeni futuri (effemeridi).
- Problema della longitudine nella navigazione.
- Due letture raccomandate
 - *L’isola misteriosa* di Verne;
 - *Longitudine* di Sobel

(dettagli sul sito).

21 (Lun 15 aprile)

Delucidazioni sui problemi

- Volume della *semisfera* di raggio R mediante la somma di ‘infinite fette di spessore infinitesimo’:

$$\frac{V}{2} = \int_0^R dV = \int_0^R A(x) dx = \int_0^R \pi r^2(x) dx = \int_0^R \pi (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

- Piano inclinato senza attrito, con corpo che scivola partendo con velocità iniziale nulla: mostrare che vale la relazione $v^2/2 = gh$, indipendentemente dall’angolo (dall’angolo dipende invece, ovviamente il tempo per raggiungere il punto più in basso.)

$$l = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g \sin \theta t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \theta}}$$

$$v = a \cdot t = g \sin \theta \cdot \sqrt{\frac{2l}{g \sin \theta}} = \sqrt{2l g \sin \theta} = \sqrt{2gh}$$

$$\frac{v^2}{2} = gh$$

(indipendente dall’angolo!)

- Problemino correlato: velocità quando un oggetto cade da un’altezza h_1 rispetto a quando cade da $h_2 > h_1$

$$\frac{v_1^2}{2} = gh_1$$

$$\frac{v_2^2}{2} = gh_2$$

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} &= g(h_2 - h_1) \\ &= g \Delta h \end{aligned}$$

$$\Delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = g \Delta h.$$

Attenzione: in questo problema h è considerata positiva verso il basso!

Conviene riscriverla, usando la coordinata z orientata verso l’alto, e quindi tale per cui $\Delta z = -\Delta h$:

$$\Delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = -g \Delta z,$$

che possiamo anche riscrivere come

$$\Delta \left(\frac{v^2}{2} \right) + g \Delta z = 0,$$

la quale, per quanto visto precedentemente, vale indipendentemente dall’angolo e quindi, immaginando un qualsiasi percorso che abbia un dislivello Δz come una successione di

piccoli piani inclinati di pendenza variabile, vale per qualsiasi percorso. Quello che conta è soltanto il dislivello, e la variazione del semi-quadrato della velocità è dato dalle formule precedenti. E, come si intuisce, questa relazione vale non solo quando la quota dell'oggetto diminuisce, ma anche quando aumenta (nel caso precedente $v^2/2$ aumenta; in questo diminuisce).

Variazione apparente del periodo di Io, effetto doppler e *red shift*

Ancora sulla variazione di periodo (come è misurato da un osservatore sulla Terra) di Io a seconda che la Terra si allontani o si avvicini a Giove: può essere visto come la variazione del periodo, e quindi della frequenza, quando sorgente e 'osservatore' sono in movimento uno rispetto all'altro. Effetti analoghi:

- modulazione del suono della sirena quando un'ambulanza ci viene incontro (diminuisce il periodo → aumenta la frequenza) o si allontana (aumenta il periodo → diminuisce la frequenza);
- 'shift' delle righe spettrali dovute a transizioni fra stati atomici quando un corpo celeste si allontana da noi (o viceversa): il periodo aumenta, quindi la frequenza diminuisce e la lunghezza d'onda aumenta (ricordiamo $\lambda \cdot \nu = c$).

Come ci si accorge che sia una riga 'shiftata' e non semplicemente un'altra riga? Perché i diversi atomi hanno ben tante, ben precise lunghezze d'onda di emissione/assorbimento, misurate in laboratorio. Quindi non si osserva lo spostamento di una sola riga, bensì di un 'pattern' di righe.

[Cenno alla costante di Plank: energia e frequenza dei fotoni (quanti di luce) non sono variabili indipendenti, bensì l'energia è proporzionale sua frequenza. La costante di proporzionalità è la famosa *costante di Planck*: $E = h \nu$.]

Aberrazione della luce dovuta al movimento della Terra

- Analogia (classica) con la pioggia vista cadere obliquamente da un osservatore in movimento (da finestrino del treno; ombrello inclinato quando si corre).
- Determinazione di Bradley della velocità della luce nel 1825 (306000 km/s) e implicazioni concettuali:
 - la Terra si muove! (anche se oggi la cosa sembra banale...)
 - (fuori programma) questioni sulle trasformazioni di velocità e sull'etere, risolte da Einstein con la teoria della Relatività Ristretta (vedi link sul sito).

Parallasse e parsec

- Banale esperimento sul concetto di parallasse alternando gli occhi con cui si osserva il pollice con il braccio teso: spostamento laterale destra-sinistra, rispetto a oggetti lontani, guardando con sinistro o destro.
Per inciso: *occhio dominante* (quello a cui il cervello 'dà più retta'),
- Errore di parallasse nelle misure con *strumenti analogici* (dotati di lancetta): la misura va eseguita con un solo occhio, posizionato sopra la lancetta, altrimenti si leggono valori (leggermente) errati.

- Idem succede quando si osserva un corpo celeste (relativamente) vicino, rispetto alle stelle ‘fisse’ (in effetti solo lontanissime).
 ⇒ parsec → vedi sito e quaderno individuale.

Introduzione all’ottica geometrica

- sorgenti puntiformi ed estese (‘tanti punti’);
- propagazione rettilinea dei raggi ottici in mezzi omogenei;
- reversibilità dei raggi ottici;
- fenomeni sulle superfici di separazione fra vari mezzi:
 - assorbimento;
 - diffusione;
 - rifrazione.

(In genere compaiono simultaneamente, anche se in una trattazione elementare vengono trattati in modo alternativo)

- Definizione degli angoli: sempre rispetto alle superfici! (Non confondersi con la convenzione che si usa nel piano inclinato.)
- Legge della riflessione:
 - angolo di riflessione uguale ad angolo di incidenza: $\theta_i = \theta_r$;
 - versori di raggio incidente, raggio riflesso e normale al piano giacciono sullo stesso piano: \hat{i} , \hat{r} e \hat{n} coplanari.

Riflessione in uno specchio piano e costruzione geometrico del *punto immagine* (e analogia con i tiri di sponda al biliardo, almeno ignorando effetti e attriti con le sponde).

- Legge della rifrazione (legge di Snell):
 - il prodotto dell’indice di rifrazione (che vale 1 per il vuoto e con ottima approssima anche per l’aria) per il seno dell’angolo rimane costante: $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$;
 - versori di raggio incidente, raggio rifratto e normale al piano giacciono sullo stesso piano: \hat{i} , \hat{r} e \hat{n} coplanari.

“Il raggio si stringe rispetto alla normale quando si passa da un mezzo di indice di rifrazione maggiore a un altri di indice di rifrazione maggiore” (e viceversa, quando si va al contrario.)

22 (Mar 16 aprile)

Primi esempi di rifrazione

- Passaggio attraverso una lastra piana (aria-vetro-aria): il raggio si stringe verso la normale e poi si riallarga: ne segue che i due angoli in aria sono gli stessi. L’unico effetto è uno spostamento parallelo, come visto in aula con la lastra di vetro.

- Fenomeno di riflessione totale nel passaggio da n maggiore a n minore (tipicamente acqua-aria). Essendo $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, se $n_2 < n_1$ si ha che al di sopra di un certo angolo ('angolo limite') $\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$ può diventare maggiore di 1, e quindi non ha alcun senso dire che questa quantità è pari a seno di θ_2 . In questo caso non c'è rifrazione, ma il raggio luminoso viene riflesso completamente (ricordiamo che un po' di riflessione c'è sempre, anche se noi facciamo delle schematizzazioni rigide). L'angolo limite si ottiene quindi imponendo la condizione $\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 = 1$, da cui otteniamo

$$\sin \theta_{1L} = \frac{n_2}{n_1}.$$

- Prisma retto usato come 'specchio traslatore': Se per il vetro prendiamo un valore nominale di $n = 1.5$ (quello esatto dipende dal tipo di vetro o di cristallo), l'angolo limite di riflessione totale vale 41.8 gradi. Quindi un raggio che dentro il vetro ga un angolo di incidenza di 45° viene riflesso completamente.
- Fibre ottiche (con disostrazione in aula). Il fenomeno della riflessione totale è usato per la trasmissione di segnali luminosi in fibre ottiche, le quali hanno all'interno una plastica con un certo indice di rifrazione e all'esterno un'altra plastica di indice di rifrazione inferiore a quella interna. Dati gli angoli in gioco molto grandi (rispetto alle superfici di separazione fra le due plastiche, e quindi molto piccoli rispetto alla direzione di propagazione della luce) la riflessione persiste anche se la fibra è curvata (entro certi limiti – nella dimostrazione in aula abbiamo visto che raggi di curvatura della decina di centimetri non influenzavano significativamente (almeno a giudicare a occhio) l'intensità della luce uscente).
- Sollevamento apparente del fondo di recipienti e di piscine, e contrazione apparente di vetro, plexiglass e altri materiali trasparenti. Siccome i 'due' raggi (medi) che raggiungono gli occhi sono allargati all'uscita in aria, essi ci sembrano provenire da una minore profondità. Questa osservazione permette di valutare l'indice di rifrazione di acqua, vetro etc. con un piccolo esperimento (vedi quaderno individuale).
- Rifrazione della luce provenienti da corpi celesti a causa della variazione (continua) dell'indice di rifrazione dell'aria (che diminuisce con la densità): aberrazione della luce (la quale si somma a quella eventuale dovuta all'effetto scoperto da Bradley). Essa è massima intorno all'orizzonte, ove vale circa $30'$ di arco, pari al diametro angolare del Sole, che ci appare quindi visibile anche se geometricamente è già appena tramontato. Inoltre la forte dipendenza dall'angolo fa sì che il sole ci appare sciacciato. \Rightarrow vedi sito del corso e quaderno di laboratorio.
- La variazione di indice di rifrazione è anche responsabile dei miraggi in quanto la luce viene deviata in continuazione come per l'aberrazione vista nel punto precedente (vedi immagini sul sito), finché non viene riflessa in alto a causa della riflessione totale.

23 (Lun 29 aprile)

Problemi in corso

Note sui problemi, in particolare quello sul piano inclinato. Scrivere i risultati con formule semplificate che dipendono solo dai parametri del problema (e se poi qualche parametro si

semplifica e non compare nella formula finale vuol dire, a meno di errori, che la soluzione non dipende da quel parametro.¹⁷⁾

Ancora sull'aberrazione della luce

Schiacciameto del sole dovuto al fatto che a circa 90° dallo zenit la rifrazione dipende fortemente dall'angolo e la luce che proviene da direzioni diverse di frazioni di grado (confrontabili con il diametro angolare del Sole) vengono deviate diversamente (vedi immagini sul sito).

Dispersione dei colori nella rifrazione

- dipendenza dell'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda (e quindi del colore) della luce (vedi sul sito immagine con informazioni quantitative per il caso dell'acqua).
- Dispersione dei colori in un prisma (*The dark side of the moon*¹⁸⁾)
- Fenomenologia (semiquantitativa) dell'arcobaleno: arcobaleno primario e secondario, con banda ('di Alessandro') fra i due e diverso ordine dei colori.

Specchi

Ancora specchi piani e introduzione agli specchi sferici.

- Riepilogo specchi piani e formazione di immagine virtuale.
- Riflessione in uno specchio concavo.
- Approssimazione di Gauss: R della sfera molto grande rispetto alle dimensioni di interesse, condizione che si riflette sul fatto che i raggi di interesse formano piccoli angoli rispetto all'*asse ottico*.
→ In tale approssimazione, tutti i raggi luminosi che si dipartono da un punto dell'oggetto e arrivano allo specchio si riflettono su di esso e i raggi riflessi si intersecano tutti in un punto (→ immagine).
- Siccome l'approssimazione non è mai perfetta, i raggi non si incontrano tutti nello stesso punto, ma coinvolgono una certa (possibilmente piccola) regione di spazio, ovvero, detto alla buona, un punto dell'oggetto produce un pallino dell'immagine: → sfocatura.
- Costruzione di immagini in uno specchio concavo.
- Equazione dei punti coniugati

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f},$$

ove $f = +R/2$ per specchi concavi.

¹⁷Un caso classico è l'indipendenza dalla massa di molti problemi di meccanica a causa della 'massa' – in realtà massa inerziale e massa gravitazionale – che compare sia nella forza che nell'inerzia.

¹⁸Ma i Pink Floyd non erano ignoranti e alla fine del disco (Eclipse) sghignazzano

*There is no dark side
of the moon really.
Matter of fact
it's all dark.*

(Continua giovedì 2 maggio, con esteso riepilogo, ovvero quasi ricominciando da capo: → vedi.)

24 (Mar 30 aprile)

Esonero

Per i dettagli vedere il quaderno individuale

25 (Gio 2 maggio)

Commenti e delucidazioni sull'esonero

1. Lancio della moneta

$$\begin{aligned}v_F &= \sqrt{v_x^2 + v_{yF}^2} \longrightarrow v_{yF} \\ \tan \theta &= v_{yF}/v_x \longrightarrow \theta \\ v_{yF} &= g t_v \longrightarrow t_v \\ h &= \frac{1}{2} g t_v^2 \longrightarrow h \\ d &= v_x t_v \longrightarrow d\end{aligned}$$

2. Equilibrio termico

$$\begin{aligned}\sum_i Q_i &= 0 \\ \sum_i C_i \Delta T_i &= 0 \\ \sum_i c_i m_i \Delta T_i &= 0\end{aligned}$$

con $\Delta T_i = T_{Eq} - T_i^{(in.)}$

3. Molla e oscillazione armonica:

$$\begin{aligned}mg - k \Delta x &= 0 \longrightarrow m \\ (m, k) &\longrightarrow \omega \rightarrow T\end{aligned}$$

4. Decremento esponenziale della velocità $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$

$$\begin{aligned}\frac{v(t_{1/2})}{v_0} &= \frac{1}{2} \longrightarrow e^{-t_{1/2}/\tau} = \frac{1}{2} \rightarrow t_{1/2} \\ a(t) &= \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau} \rightarrow a(t_{1/2}) \\ s(t_{1/2}) &= \int_0^{t_{1/2}} v(t) dt = v_0 \tau \left[1 - e^{-t_{1/2}/\tau} \right]\end{aligned}$$

5. Legge di Stevino: $\Delta P = \rho g h$.

6. Condizione di galleggiamento (dalla Legge di Archimede), con x la frazione di volume immerso in acqua:

$$x = \frac{\rho}{\rho_A} \longrightarrow \rho \longrightarrow m = \rho V$$

7. Crescita esponenziale $N(t) = N_0 e^{t/\tau}$

$$\begin{aligned} N(t_1) &= N_0 e^{t_1/\tau} \longrightarrow \tau \\ N(t_{\times 2}) &= 2 N_0 e^{t_{\times 2}/\tau} \longrightarrow t_{\times 2} \end{aligned}$$

8. Forza di attrito statico, che non può superare un certo valore.

- Finché c'è attrito statico (con m_1 la massa sul tavolo e m_2 quella sospesa):

$$F_S = m_2 g$$

- Ma l'attrito statico non può superare $\mu_S F_{\perp}$:

$$(F_S = m_2 g) \leq \mu_s m_1 g$$

- L'attrito massimo si ricava quindi dalla condizione $m_2 g = \mu_S m_1^{(max)} g$, da cui

$$\mu_S = \frac{m_2^{(max)}}{m_1}$$

9. Si tratta di moto decelerato (accelerazione negativa) lungo il piano inclinato. Usando un riferimento con verso positivo quando si sale lungo il piano inclinato,

$$v(t) = v_0 + a t = v_0 - (g \sin \theta) t,$$

- $v(t)$ si annulla per $t_M = v_0 / (g \sin \theta)$.
- spazio percorso e altezza raggiunta prima di scivolare indietro

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= 0 + v_0 t - \frac{1}{2} (g \sin \theta) t^2 \\ s(t_M) &= v_0 \frac{v_0}{g \sin \theta} - \frac{1}{2} (g \sin \theta) \frac{v_0^2}{g^2 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{v_0^2}{g \sin \theta} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g \sin \theta} \\ &= \frac{v_0^2}{2 g \sin \theta} \\ h &= s(t_M) \sin \theta = \frac{v_0^2}{2 g \sin \theta} \sin \theta = \frac{v_0^2}{2 g} \quad (\text{non dipende da } \theta!!) \end{aligned}$$

10. Nella transizione aria-acqua-vetro il prodotto $n_i \sin \theta_i$ (con $i = 1, 2, 3$ per i tre mezzi, nell'ordine) rimane costante:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3$$

Quindi, essendo $n_3 > n_1$

$$\sin \theta_3 = \frac{n_1}{n_3} \sin \theta_1 < 1 \quad \forall \theta_1$$

non si ha mai riflessione totale.

11. Diverso è il caso di generica transizione vetro-acqua (indice di rifrazione maggiore a minore), nel caso che nel vetro l'angolo di incidenza possa essere arbitrario (cosa che non può succedere nel caso del problema precedente in quanto il raggio di luce nel vetro deriva da una rifrazione su una superficie piana che lo separava dall'aria – vedi nota che segue). L'angolo minimo di riflessione totale si ottiene dalla condizione $n_v \sin \theta_v = n_A \Rightarrow$ angolo limite di 50.8° .

(Nota: il motivo per cui non c'è riflessione totale nel caso precedente è che nel passaggio aria-vetro il raggio luminoso “si stringe rispetto alla normale” e quindi rimane sempre sotto l'angolo limite di riflessione totale della transizione vetro-aria. Altra cosa importante è che il recipiente era composto di lastre piane di vetro: diverso il caso di superfici curve in quanto l'angolo di incidenza nella superficie di separazione vetro-acqua può essere diverso da quello con il quale era stato rifratto nella transizione aria-vetro.)

Specchi sferici concavi (in approssimazione di Gauss)

- Dimostrazione al sole e valutazione empirica della distanza focale, in analogia sia al caso ben noto delle lenti convergenti (lenti di ingrandimento o occhiali da presbiteri).
- Richiamo sulle immagini di specchi piani e precisazioni sul concetto di immagine e di fuoco, sia reali che virtuali
- Esercizi sulla costruzione di immagini nel caso di specchi concavi in approssimazione di Gauss ($R \rightarrow \infty$, ovvero raggi circa parassiali), facendo uso dei raggi notevoli più ‘comodi’:
 - raggio (o suo prolungamento) parallelo all'asse ottico;
 - raggio (o suo prolungamento) passante per il fuoco.

Esiste, come abbiamo visto, un terzo raggio notevole, quello (o suo prolungamento) passante per il centro dello specchio, ma è meglio imparare ad usare bene gli altri due, per l'analogia con le lenti.

(Per i dettagli sui problemi svolti, e varianti, vedi quaderno).

- Uso dell'equazione dei *punti coniugati*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f},$$

ove $f = +R/2$ per specchi concavi e della formula dell'ingrandimento lineare

$$M = -\frac{q}{p}$$

- Regole dei segni:
 - negli specchi concavi f è positiva ($+R/2$, con R il raggio di curvatura dello specchio) in quanto il fuoco per raggi paralleli provenienti dall'infinito è reale (come nella dimostrazione al sole);

- p è ‘normalmente positiva per oggetti nel mondo reale (le cose si possono complicare nel caso di sistemi ottici);
- q è positiva se l’immagine è reale (‘fuori’ dallo specchio); è negativa se l’immagine è virtuale (‘dall’altra parte’ dello specchio)
- M è positiva o negativa a seconda che l’immagine sia reale o capovolta rispetto all’oggetto.

26 (Lun 6 maggio)

Chiarimenti su vecchi problemi

- Lastra piana → vedi commenti su esonero.

Specchi convessi sferici

I raggi riflessi di raggi paralleli all’asse ottico divergono: non c’è concentrazione di luce (e di energia!): basta fare una costruzione grafica ricordando le leggi della riflessione e che la normale al punto di incidenza è il prolungamento del raggio della sfera di cui lo specchio è una piccola frazione di superficie.

Si concentrano invece i prolungamenti, cosa valida per ‘tutti’ i raggi solo nell’approssimazione di Gauss, la stessa vista precedentemente. In questa approssimazione tutti i raggi paralleli sono riflessi dalla superficie dello specchio in modo tale che i loro prolungamenti si incontrano in un punto al di là dello specchio: *fuoco virtuale*.

Anche in questo caso vale l’equazione dei punti coniugati che abbiamo visto precedentemente, con $f = -R/2$ in quanto il fuoco è oltre lo specchio (virtuale). Quindi, ricapitolando e tenendo conto che faremo provenire i raggi da sinistra:

- p , f e q sono positivi se a sinistra dello specchio;
- f e q sono negativi se a destra dello specchio.

Vale inoltre la stessa regola dell’ingrandimento lineare, con lo stesso significato che aveva precedentemente.

Anche in questo i raggi notevoli sono:

1. quello il cui prolungamento va verso il centro della sfera (angolo di incidenza nullo rispetto alla normale) e quindi viene riflesso su sé stesso;
2. raggio parallelo all’asse ottico che si riflette in modo tale che il prolungamento dell’asse riflesso passa per il fuoco, situato dall’altra parte dello specchio (nel modo di Alice...), a metà fra il centro della sfera e il punto in cui l’asse ottico incontra la superficie dello specchio;
3. raggio il cui prolungamento passa nel fuoco (sempre dall’altra parte dello specchio) e che viene riflesso parallelamente all’asse ottico.

Il terzo è semplicemente conseguenza del secondo e della reversibilità dei raggi ottici. Si raccomanda di far uso di questi due raggi, in quanto per gli specchi incontreremo raggi analoghi.

Diottri e lenti

Se un raggio luminoso passa da un mezzo a un altro si verifica il fenomeno della rifrazione. Un diottro è, da Wiki, “il più semplice sistema ottico, costituito da una superficie di contatto che separa due mezzi ottici diversamente rifrangenti, trasparenti e con diverso indice di rifrazione”. Quindi il caso dell’acqua nel bicchiere, con conseguente sollevamento apparente del fondo era un *diottro piano*. Se la superficie di separazione è sferica abbiamo un *diottro sferico*.

Per adesso tralasciamo i diottri e passiamo alle lenti sferiche, che possono essere viste come due diottri in sequenza (aria-vetro-aria), e di queste ci occupiamo delle *lenti sottili* (altrimenti bisogna tener conto anche dell’effetto di traslazione laterale dei raggi) in *approssimazione di Gauss*, analoga a quella vista per gli specchi (raggi delle superfici grandi, il che equivale a raggi parassiali). Il ben noto comportamento convergente delle lenti è legato alla differenza di curvatura delle lenti (se hanno la stessa curvatura orientata nello stesso modo, avremo una lastra curva). Per capirlo si può pensare a due prismi sovrapposti (vedi figura sul sito): se sono accostati con le basi si ha un comportamento convergente; se accostati con ‘le punte’ si ha un comportamento divergente.

La distanza focale è data dalla *formula dei costruttori di lenti*

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

con n l’indice di rifrazione del ‘vetro’ (o altro) e avendo assunto unitario l’indice di rifrazione dell’aria, mentre R_1 e R_2 sono i due raggi di curvatura delle due superfici, considerati positivi se il centro della sfera è a destra e negativi se a sinistra. f sarà positivo o negativo a seconda che la lente sia convergente o divergente. Ad esempio, in una normale lente, con il raggio proveniente da sinistra, si incontra la prima superficie (aria-vetro) con curvatura a destra (quindi $R_1 > 0$) e seconda superficie (vetro-aria) con curvatura a sinistra (quindi $R_2 > 0$). Si vede quindi che $f > 0$.

Convenzione dei segni delle lenti

- p è positivo a ‘sinistra’ (da dove proviene il raggio ottico);
- f e q sono positivi a destra.

La differenza rispetto al caso degli specchi è che raggi paralleli provenienti da sinistra si concentrano a destra.

La buona notizia è che sia la legge dei punti coniugati che la formula dell’ingrandimento lineare sono identiche a quelle viste per gli specchi.

In questo caso i raggi notevoli per la costruzione delle immagini sono

1. quello che passa per il centro della lente e che prosegue dritto (in quel punto è come se fosse una microscopica lastra piana, ma anche talmente sottile per cui non c’è deviazione laterale);
2. raggio (da sinistra) parallelo all’asse ottico, che attraversa il fuoco di destra;
3. raggio (da sinistra) che passa (o il suo prolungamento passa) per il fuoco di sinistra, che prosegue a destra parallelo all’asse ottico.

(In realtà la 2 e 3 sono sostanzialmente la stessa cosa (destra↔sinistra), se ci ricordiamo della reversibilità dei raggi ottici.)

Prodotto scalare

→ F1inf 10.4, pp. 50-51

27 (Mar 7 maggio)

Sperimentazione in aula con lenti convergenti e divergenti

Come sorgente abbiamo usato il proiettore per lucidi trasparenti il cui uso è decaduto (ma fortunatamente è qualche vecchio proiettore rimasto ancora nelle aule).

- Come lente convergente usiamo occhiali da presbite con due gradazioni diverse (diottrie, ove per definizione la *diottria* è pari a 1 m/f, con f la distanza focale). L'immagine di un oggetto 'molto lontano' ($p \rightarrow \infty$) si forma, nel senso che si proietta su uno schermo (ad es. un foglio di carta), in prossimità del fuoco, ma in aula abbiamo usato il proiettore, posto a c.a 4 metri.
- Come lente divergente usiamo occhiali da miope. In questo caso non si forma l'immagine sulla carta! È invece possibile vedere l'immagine dell'oggetto (la luce del proiettore) come un 'punto' luminoso fluttuante nell'aria e dalla stessa parte dell'oggetto. Per vederlo, se, come al solito, diciamo che l'oggetto sta a sinistra della lente, un osservatore si deve mettere alla destra, a circa un metro di distanza dalla lente. Di fronte a sé vedrà lontano dietro la lente il soggetto, sempre oltre la lente, ma molto più vicino, vedrà un puntino in aria, dal quale sembrano dipartirsi i raggi che divergono dalla lente. Si può anche fare una stima (nemmeno troppo grossolana) della distanza fuoco-lente ponendo per confronto con un altro oggetto (ad esempio la mano di un aiutante) e muovendolo avanti indietro finché all'osservatore non appaiano essere alla stessa distanza.
- Con un paio di occhiali da miope dalla forma curva (tipo gli specchi che abbiamo visto) è stato inoltre possibile vedere sia l'immagine virtuale che reale degli specchi. (Le due superfici degli occhiali possono essere curvate nello stesso verso, come lo sono la maggior parte degli occhiali. L'importante è che le due superfici non abbiano lo stesso raggio di curvatura, perché altrimenti non si avrebbe concentrazione e sparpagliamento dei raggi luminosi.)
- Formazione di immagine in una macchina fotografica, sostituendo la pellicola con un foglio di carta lucida (va bene anche carta da forno).

Introduzione ai concetti basilari della tecnica fotografica

- Gli obiettivi delle macchine fotografiche sono schematizzabili con una lente convergente. Nel nostro caso (vedi info sul sito) si trattava di un 50mm, ovvero $f = 5.0$ cm montato su una vecchia macchina fotografica che dietro aveva una apertura per inserire/togliere la pellicola.
- La formazione dell'immagine deve avvenire nel piano della pellicola (ora sostituita da sensori elettronici), ove abbiamo posto la carta lucida.
- Quando si preme il pulsante di scatto, si apre l'otturatore e luce riesce a raggiungere la 'pellicola' (chiameremo così la carta lucida). Il *tempo* di apertura è una frazione di secondo. Nel nostro caso (una Nikkormat anni '70) vanno da 1 secondo a 1/1000 di

secondo, selettibile a fattori di 1/2: quindi 1 s, 1/2 s, 1/4 s, ... 1/500 s, 1/1000 s (i valori dopo un po' sono arrotondati) e convenzionalmente scritti sulla ghiera come i reciproci, quindi 1, 2, 4, ..., 500, 1000.

- Ovviamente tempi troppo lunghi (diciamo $> 1/30$ s) sono (pressoché) inutilizzabile a mano libera, perché le foto verrebbero mosse. In questo caso serve una cavalletto (o un appoggio) e una estensione flessibile (il 'flessibile') del pulsante di scatto per evitare tremolii.
- Oltre a questi tempi preimpostati nella fotocamera, esiste una possibilità di tenere l'otturatore aperto a piacere. Si tratta della così detta 'posa B', indicata con B sulla ghiera dei tempi. È quella che abbiamo usato in aula per osservare immagini a lungo (vedi foto sul sito).
- Un altro importante parametro di ripresa è l'*apertura*, regolabile con la ghiera del 'diaframma', la quale riporta (nel nostro caso) i numeri n_D 2, 2.8, 4, 5.6, ... 16, a passi di 1.4, ovvero di $\approx \sqrt{2}$. Con $n_D = 2$ l'apertura dalla quale entra la luce è massima, mentre con $n_D = 16$ essa è minima.
- Va da sé che la *quantità di luce* che arriva sulla pellicola cresce con il tempo di esposizione e con l'area dell'apertura. Se si passa quindi da '30' a '60', ovvero da 1/30 s a 1/60 s la quantità luce si dimezza: abbiamo diminuito il tempo di uno 'stop', come si dice in gergo fotografico. A ogni stop si dimezza o si raddoppia (a seconda del verso) la quantità di luce che entra.
- Per dimezzare la luce ovviamente si può anche dimezzare l'area della 'finestra' (approssimativamente) circolare in cui passa la luce. Anche in questo caso si parla di stop, e anche i numeri sulla ghiera dei diaframmi sono separati di uno stop dall'altro. Il motivo per cui la separazione fra un numero e l'altro va come $\sqrt{2}$ e a n_D piccolo corrisponde una grande apertura è che questo *numero di diaframma* è definito come il rapporto fra lunghezza focale e diametro del diaframma:

$$n_D = \frac{f}{d}.$$

Quindi se si conosce f e si conosce n_D si conosce anche il diametro, essendo pari a $d = f/n_D$. Per questo motivo l'apertura è indicato tecnicamente come $f/2$, $f/4$: si sta facendo riferimento alla sezione della finestra (circa) circolare attraverso la quale entra la luce.¹⁹

Altre grandezze fotometriche

Avevamo incontrato il lumen (lm) come la grandezza fotometrica che indica il flusso luminoso. Esso va visto in analogia a un flusso di liquido (ad esempi il flusso di un fiume viene dato in m^3/s).

- Così, come la quantità di acqua che che attraverso in un certo tempo una certa sezione del fiume viene ottenuta moltiplicando il flusso per il tempo, così pure la *quantità di*

¹⁹Nota: per motivi che (almeno per il momento) non stiamo a spiegare, nella fotografia non interessa il valore assoluto del diametro del diaframma, ma soltanto il diametro diviso la lunghezza focale, ovvero $d/f = n_D$. Ne segue che a parità di illuminazione dell'oggetto da riprendere quello che conta è il tempo e il numero di diaframma, indipendentemente dalla 'focale' dell'obiettivo che si sta usando.

luce viene misurata in lumen×secondo (lm·s), detto anche ‘Talbot’ (ma si incontra più spesso semplicemente lm·s).

- L’*illuminamento*, misurato in lux (lx), indica inoltre il flusso di luce per unità di superficie dell’oggetto illuminato.

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm} / 1 \text{ m}^2$$

[Per avere un’*idea* dell’illuminamento si possono usare i sensori sugli smart (si cerchi ad esempio *luxmetro* sugli app store).]

(Rimane ancora un’altra importante grandezza fotometrica, la candela, la quale necessità di una prefazione geometrica.)

Illuminamento, sensibilità del sensore e coppia tempo-diaframma

Supponiamo che l’obiettivo sia sottoposto a un certo illuminamento E_v , misurato in lx,²⁰ dovuto al soggetto che si intende fotografare.

- Per ottenere il flusso luminoso (ϕ_v , con ‘v’ che sta ad indicare ‘visibile’, vedi link in nota) si moltiplica l’illuminamento per la l’area del diaframma (A):

$$\phi_v = E_v \cdot A.$$

- Se T è il tempo di esposizione la quantità di luce (Q_v , misurata in lm·s) che entra nella fotocamera sarà pari a

$$\begin{aligned} Q_v &= \phi_v \cdot T \\ &= E_v \cdot A \cdot T \end{aligned}$$

- Utilizzando ora il diametro dell’apertura e la sua relazione con f e n_D e ignorando i fattori di proporzionalità che non ci interessano (ad esempio è chiaro che se il foro è quadrato e il sensore è rettangolare non tutta la luce, ma solo una frazione, finirà sul sensore) possiamo riscrivere la quantità di luce come

$$\begin{aligned} Q_v &\propto E_v \cdot d^2 \cdot T \\ &\propto E_v \cdot \frac{f^2}{n_D^2} \cdot T. \end{aligned}$$

- A questo punto entra in gioco la *sensibilità* del sensore (gli ‘ISO’, ereditati dalle pellicole): più è alta la sensibilità e minore è la quantità di luce che serve a ‘impressionare’ il sensore. Se gli ISO raddoppiano è sufficiente metà quantità di luce, e così via (questo è il motivo per cui anche gli ISO vanno essenzialmente di fattori due, a parte finezze: 100, 200, 400, 800, etc. Significa che con ISO 800 è sufficiente una quantità di luce un ottavo di quella che serviva con ISO 100, ovverossia si può fotografare una scena che produca un illuminamento all’indresso dell’obiettivo un ottavo rispetto a ISO 100).
- Comunque, concentrandoci per il momento solo su tempo e diaframma, otteniamo che la quantità di luce ottimale (‘OK’) per una foto è proporzionale a T e inversamente proporzionale a n_D^2 :

$$Q_v(\text{OK}) \propto \frac{T}{n_D^2},$$

²⁰<https://en.wikipedia.org/wiki/Lux>

ovvero

$$\frac{T}{n_D^2} = \text{cost},$$

ovvero, possiamo fare una foto correttamente esposta con il settaggio $[T_0, n_{D_0}]$, avremo una foto altrettanto correttamente esposta con $[2 \times T_0, \sqrt{2} \times n_{D_0}]$, $[T_0/2, n_{D_0}/\sqrt{2}]$, $[4 \times T_0, 2 \times n_{D_0}]$, e così via, secondo quella che si chiama *regola di reciprocità* (aumento del tempo diminuendo opportunamente l'apertura, e viceversa).

Un curioso integrale

Immaginiamo che un punto materiale sia abbia, nel tratto fra definito dalle coordinate cartesiane x_1 e x_2 una generica accelerazione $a_x(x)$ la quale può dipendere dalla posizione (potrebbe essere anche nulla – si tratta del caso più generale). Calcoliamo ora l'integrale di a_x in dx in tale intervallo:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} a_x dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv_x}{dt} (v_x dt) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} v_x dv_x \\ &= \frac{v_x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{v_x^2(x_2)}{2} - \frac{v_x^2(x_1)}{2} \\ &= \Delta \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \equiv \frac{v_x^2(x_2)}{2} - \frac{v_x^2(x_1)}{2}. \end{aligned}$$

Questo integrale è pari alla variazione di $v_x^2/2$ quando si passa dalla coordinata x_1 alla coordinata x_2

Chiaramente simili relazioni varranno anche per le altre coordinate:

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} a_y dy &= \Delta \left(\frac{v_y^2}{2} \right) \Big|_{y_1}^{y_2} \equiv \frac{v_y^2(y_2)}{2} - \frac{v_y^2(y_1)}{2} \\ \int_{z_1}^{z_2} a_z dz &= \Delta \left(\frac{v_z^2}{2} \right) \Big|_{z_1}^{z_2} \equiv \frac{v_z^2(z_2)}{2} - \frac{v_z^2(z_1)}{2}. \end{aligned}$$

Sommando i tre termini otteniamo e indichiamo con P_1 il punto iniziale e finale abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} a_x dx + \int_{y_1}^{y_2} a_y dy + \int_{z_1}^{z_2} a_z dz &= \Delta \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \Delta \left(\frac{v_y^2}{2} \right) \Big|_{y_1}^{y_2} + \Delta \left(\frac{v_z^2}{2} \right) \Big|_{z_1}^{z_2} \\ \int_{P_1}^{P_2} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) &= \Delta \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \Delta \left(\frac{v_y^2}{2} \right) \Big|_{y_1}^{y_2} + \Delta \left(\frac{v_z^2}{2} \right) \Big|_{z_1}^{z_2}. \end{aligned}$$

Riconoscendo nel membro a sinistra il prodotto scalare fra il vettore accelerazione \vec{a} e il vettore spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ e esplicitando i 'delta', otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} \vec{a} \cdot d\vec{s} &= \left[\frac{v_x^2(x_2)}{2} + \frac{v_y^2(y_2)}{2} + \frac{v_z^2(z_2)}{2} \right] - \left[\frac{v_x^2(x_1)}{2} + \frac{v_y^2(y_1)}{2} + \frac{v_z^2(z_1)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} [v_x^2(x_2) + v_y^2(y_2) + v_z^2(z_2)] - \frac{1}{2} [v_x^2(x_1) + v_y^2(y_1) + v_z^2(z_1)] \\ &= \frac{1}{2} v^2(P_2) - \frac{1}{2} v^2(P_1) : \end{aligned}$$

l'integrale del prodotto scalare fra l'accelerazione e lo spostamento infinitesimo da P_1 a P_2 è pari alla variazione della metà del quadrato della velocità fra i due punti. Moltiplicando infine entrambi i membri per la massa del punto materiale otteniamo

$$\int_{P_1}^{P_2} (m \vec{a}) \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m v^2(P_2) - \frac{1}{2} m v^2(P_1)$$

Lavoro e variazione di energia cinetica

Chiamando *lavoro* (compiuto da una forza) l'integrale di $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ fra due punti ed *energia cinetica* (di un punto materiale) la grandezza $\frac{1}{2} m v^2$ abbiamo uno dei più importanti teoremi della meccanica ('teorema delle forze vive').

- La sua importanza risiede nel fatto che spesso è più facile calcolare la variazione di velocità dal lavoro della forza.
- Ad esempio, forze che sono, punto per punto, ortogonali allo spostamento (la più famosa è la forza centripeta in un moto circolare uniforme) 'non compiono lavoro' e quindi non danno alcun contributo alla variazione di velocità.
- In particolare, se sono contemporaneamente presenti più forze, siccome il contributo di quelle ortogonali allo spostamento è nullo, per calcolare la variazione di velocità è sufficiente calcolare il lavoro compiuto dalle altre (ad esempio, se un corpo scivola lungo un piano inclinato reazione vincolare del piano 'non compie lavoro' e quindi basta calcolare il lavoro delle altre forza, ovvero della forza peso e della forza di attrito dinamico, almeno per quello che ci interessa in questo corso.)

Continua (con esempi) su \rightarrow **F1inf** par. 9.9 e 10.2.

28 (Gio 9 maggio)

Ancora lente divergente e formula dell'ingrandimento

Soluzione dettagliata del problema 26.4.a:

- costruzione dell'immagine mediante i due raggi notevoli raccomandati (ovvero non usando quello che passa per il centro della lente).
- calcolo di q dall'equazione dei punti coniugati e verifica con quanto ottenuto dalla costruzione grafica;

- dimostrazione (in questo caso, benché essa sia valida in generale) della formula dell'ingrandimento lineare attraverso due opportuni triangoli simili (si ricorda che, essendo la lente divergente, $f < 0$ e quindi $f = -|f|$):

$$\begin{aligned} \frac{y}{p + |f|} &= \frac{y'}{|f|} \\ M \equiv \frac{y'}{y} &= \frac{|f|}{p + |f|} \\ &= \frac{-f}{p - f} \\ &= -\frac{q}{p} \end{aligned}$$

[Per l'ultimo passaggio è stata usata l'equazione generale $q = (pf)/(p - f)$, da cui segue $f/(p - f) = q/p$.]

Ancora grandezze fotometriche

- Lux: vedi appunti della scorsa lezione.
- Candela (cd): misura l'intensità luminosa di una sorgente, intesa come flusso luminoso su unità di *angolo solido*: lm/sr.
- Steradiano (sr), l'analogo spaziale del radiante,
 - radiante: lunghezza dell'arco diviso il raggio del cerchio \rightarrow angolo giro 2π ;
 - steradiano: aria di una calotta sferica (e anche, più genericamente di qualsiasi regione sulla superficie della sfera) diviso il quadrato del raggio della sfera \rightarrow intero angolo solido 4π ;
 l'angolo solido viene comunemente indicato con Ω , quindi se A è l'area delimitata sulla sfera:

$$\Omega = \frac{A}{R^2}$$

quindi l'angolo solido sotteso dall'intera superficie sferica è pari a $4\pi R^2/R^2 = 4\pi$.

- *En passant*, come ricavarsi la formula della superficie della sfera dalla formula del volume, trovata come esercizio suggerito 'sommando infinite fette' (vedi 'raccolta di copertine'):
 - Immaginiamo la sfera fatta da 'tanti' ($\rightarrow \infty$) gusci concentrici di area $A(r)$ (ovviamente dipenderà dalla distanza dal centro) e spessore dr . Essendo lo spessore infinitesimo, il volume (infinitesimo) del guscio può essere valutato dalla formula di un cilindro di area di base $A(r)$ e spessore dr :

$$dV = A(r) dr$$

- Segue quindi

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} V(r) \\ &= \frac{d}{dr} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Lavoro ed energia [Punto *clou* del corso!]

- Lavoro e variazione di energia cinetica.
- Forze conservative.
- Forze conservative ed energia potenziale.
- Relazione fra variazione di energia cinetica e variazione di energia potenziale (solo per forze conservative!).
- Equivalenza fra energia meccanica ed energia termica: mulinello di Joule.

Dettagli → **F1inf**, paragrafi **10.2-10.7**, **11.2-11.4**, **14.5**.

(Si raccomanda di dare un'occhiata anche ai problemi lì proposti, ove per 'occhiata' si intende di leggerli e chiedersi se si capisce 'di cosa si sta parlando', quali sono i concetti coinvolti e quali sono i passi per rispondere ai quesiti.)

29 (Lun 13 maggio)

Commenti sull'esonero

- Chi vi ha indottrinato a scrivere sempre e comunque che la densità dell'acqua è pari a 997 kg/m^3 invece di insegnarvi le cose di sostanza? Sarà pure la densità dell'acqua distillata purissima, ma tutti i conti che ci interessano va benissimo 1000 kg/m^3 , soprattutto se si tratta di una piscina (quelle del Coni non hanno di certo acqua distillata!).
- Sulle unità di misura:
 - vanno riportate in quanto una grandezza fisica è caratterizzata da *valore numerico e unità di misura*;
 - non ha senso invece scrivere affianco al simbolo che rappresenta la grandezza fisica; ad esempio se abbiamo una velocità di 10 m/s ,
 - * $v = 10 \Rightarrow \text{NO}$;
 - * $v \text{ (m/s)} \Rightarrow \text{NO}$;
 - * $v \text{ (m/s)} = 10 \text{ m/s} \Rightarrow \text{NO}$;
 - * $v = 10 \text{ m/s} \Rightarrow \text{OK}$.
 - Nei conti vanno esplicitati anche i calcoli dimensionale, ad esempio, se in una molla $k = 100 \text{ N/m}$ e $m = 1.0 \text{ kg}$,

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{1.0 \text{ kg}}{100 \text{ N/m}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{1.0 \text{ kg}}{100 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}/\text{m}}} \\ &= 2\pi\sqrt{0.010 \text{ s}^2} \\ &= 2\pi \times 0.10 \text{ s} \\ &= 0.63 \text{ s} \end{aligned}$$

- È vero che nel sistema l'unità di misura di tempo è il secondo e quindi è meglio usarlo per non sbagliarsi, se nel problema l'unità 'naturale' e di facile percezione è l'ora è inutile fare trasformazioni che rendono il risultato difficilmente percettibile (vedi problemi con le leggi esponenziali).
- Sull'ultimo punto del problema 4: scrivere l'integrale senza limiti di integrazione non significa NIENTE: quello che ci serve è il cosiddetto integrale definito ("somma di infiniti elementi infinitesimi"), mentre il calcolo della 'primitiva' (o 'antiderivata', *purtroppo* anche chiamata 'integrale indefinito') è solo il 'trucco tecnico' che calcolare quello che ci interessa.

Delucidazioni sui problemi di ottica

- Problema 26.3
 - Nei primi tre quesiti si trattava di comuni situazioni fotografiche, con l'immagine che si forma in prossimità del fuoco. Importante che h' sia abbastanza piccolo in modo tale da poter rientrare nelle dimensioni del sensore (vedi confronto sul sito). La messa a fuoco è ottenuta spostando (tramite vite) l'obiettivo rispetto al sensore, solidale con la macchina fotografica.
 - Le situazioni dei quesiti d e f avevano oggetti piccoli molto vicini all'obiettivo. L'immagine si forma lontano e quindi bisogna spostare di molto l'obiettivo rispetto al sensore (ad esempio con un *soffietto*, come da immagine sul sito).
 - L'ultima situazione corrisponde ad un oggetto vicinissimo al fuoco. L'immagine si forma molto lontano ed è fortemente ingrandita. Stiamo parlando quindi di un proiettore.
- Nel problema 27.1 abbiamo invece lo stesso oggetto ripreso con diverse focali, da 25 mm a 400 mm ('16x'): la dimensione dell'immagine sul sensore è proporzionale alla distanza focale. Quindi, come si dice, un teleobiettivo (grande f) 'avvicina'.
- Sul problema 28.2 torneremo ancora. È importante risolverlo per capire che non c'è niente di anomalo per il fatto che avvicinando l'oggetto al punto focale l'immagine si forma all'infinito e ha dimensione infinita. Quello che conta è la dimensione angolare, la quale invece converge a un valore finito per $p \rightarrow f$.

Zoom nella fotografia e uso telemetrico di una fotocamera

(Interpretazione del problema 27.1)

Schematizziamo l'obiettivo come una lente convergente di focale f . Le formule per q e M nel limite $p \rightarrow \infty$ danno

$$\begin{aligned} q &\rightarrow f \\ M &\rightarrow -f/p \\ y' &\rightarrow -y \times f/p = \frac{y}{p} \times f. \end{aligned}$$

L'ingrandimento, e quindi la dimensione dell'immagine sul sensore è, a parità di distanza dell'oggetto dalla fotocamera, proporzionale a f .

Possiamo inoltre scrivere l'ultima equazione, assumendo il limite $q \gg f$ come

$$\begin{aligned}\frac{y'}{f} &= \frac{y}{p} \\ &= \tan \theta \approx \theta\end{aligned}$$

Se conosciamo f con cui è stata scattata la foto e la dimensione dell'immagine possiamo valutarci la dimensione angolare dell'oggetto, o più praticamente la distanza se, come succede spesso possiamo ipotizzare la grandezza dell'oggetto:

$$p = \frac{y}{y'} \times f$$

Angolo solido di un cono

- Si ricorda innanzitutto che per come è definito l'angolo solido è adimensionale.
- Un cono di **semi**apertura θ definisce un angolo solido di

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta)$$

La formula vale anche $\theta \geq \pi/2$, in cui non ha più senso parlare di cono (si tratta della porzione di spazio 'complementare' al cono di semiapertura $\pi - \theta$). Quindi per un emisfero abbiamo 2π sr e l'intera sfera 4π sr, come già sappiamo.

Lavoro e potenza – applicazioni pratiche

Come effettuare lo stesso lavoro con una forza 'ridotta' (rispetto a quella necessaria per effettuarlo nel modo più rapido):

- Piano inclinato: minore forza è compensata da maggiore cammino da percorrere:

$$(mg \sin \theta) \cdot l = mgh :$$

$$mg \sin \theta < mg \Rightarrow l > h;$$

- Sistemi di carrucole la minore forza con cui si tira è compensata dalla maggiore lunghezza della corda da tirare: → vedi immagini sul sito.
- Leve (trattazione valida per piccoli angoli): chiamando l_R il 'braccio resistenza' (dalla parte dell'oggetto da sollevare) e F_P la forza incognita da applicare al 'braccio potenza'; h l'altezza di cui si solleva il corpo e h' lo spostamento della forza applicata al 'braccio potenza', essendo $h/l_R = h'/l_P$, il lavoro compiuto dalla forza F_P vale

$$F_P h' = F_P h \frac{l_P}{l_R}.$$

Affinché esso sia uguale compiuto sollevando direttamente l'oggetto, ovvero mgh , otteniamo

$$\begin{aligned}F_P h \frac{l_P}{l_R} &= mgh \\ F_P &= \frac{l_R}{l_P} mg\end{aligned}$$

(“Datemi un punto di appoggio e vi solleverò la Terra!”)

Un esempio riassuntivo: scivolo con ‘giro della morte’

- Energia potenziale e velocità in funzione dell’altezza
- Reazione vincolare
- Condizione di contatto nel punto più alto del giro della morte.

Ancora su energia, quantità di calore, lavoro e potenza

- Non confondere energia (proprietà dei corpi) con lavoro e quantità di calore, legati a *trasferimenti di energia*.
- La potenza è, a seconda dei casi, misurabile come dE/dt , dL/dt o dQ/dt .
- Energia interna: può essere aumentata o fornendo calore, o mediante lavoro (→ mulinello di Joule):

$$\Delta E = Q + L$$

(anche se in termodinamica si incontra la formula in cui L compare con il segno meno: il motivo è “tecnologico”, in quanto nelle *macchine termiche* il *lavoro è considerato positivo* se prodotto dalla macchina, negativo se è la macchina a subirlo.

- Potenza di una forza che mantiene un oggetto a velocità costante (in quanto c’è un’altra forza resistenza: se v è costante la forza totale deve essere nulla):

$$P = \frac{dL}{dt} = F \frac{ds}{dt} = F \cdot v.$$

(caso unidimensionale).

- Caso speciale, per vincere una forza di viscosità del tipo $-\beta v$: $P = \beta v^2$. (**Flin** 15.4)
(Ma in realtà l’attrito dell’aria va come v^2 e quindi la potenza per mantenere un oggetto a velocità costante v è proporzionale v^3 .)
- Potenza per andare a velocità costante lungo una salita di pendenza θ : $P = (mg \sin \theta) \cdot v$.
- Riscaldamento prodotto dalle persone.

Da $\Delta E_p|_A^B = -L|_A^B$ a $E_p(x)$ (solo caso unidimensionale)

- Caso di forza peso in prossimità della superficie terrestre: $E_p(h) = mgh$, con $h = 0$ nel punto ‘in basso che ci fa comodo’ (pavimento, piano del tavolo di lavoro, livello strada, etc.)
- Caso della molla (, per analogia, del pozzo per il centro della Terra):

$$\begin{aligned} L|_0^x &= \int_0^x (-kx') dx' = -\frac{1}{2} k x^2 \\ \Delta E_p|_0^x &= -L|_0^x = \frac{1}{2} k x^2 \\ E_p(x) &= E_p(0) + \frac{1}{2} k x^2. \end{aligned}$$

Essendo lo zero dell'energia potenziale arbitrario lo poniamo a $x = 0$, ovvero stabiliamo che

$$E_p(x = 0) = 0,$$

da cui segue

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Da $E_p(x)$ a $F(x)$ (solo caso unidimensionale)

Se ΔE_p si ottiene integrando la forza (con il segno meno!), la forza si ottiene da $E_p(x)$ derivando. Ovvero, essendo la variazione infinitesima di energia potenziale

$$dE_p = -dL = -F dx$$

otteniamo, se forza ed energia potenziale dipendono da x

$$F(x) = -\frac{d}{dx}E_p(x).$$

→ **F1inf** 13.5

30 (Mar 14 maggio)

Problemi in corso + dettagli

- 29.3 (auto fotografata con zoom): vedi appunti lezione precedente.
- 29.5-6 (giro della morte):
 - La forza totale in alto è data da forza peso e reazione vincolare della guida, entrambe rivolte verso il basso (il ruolo della guida è mantenere un oggetto nella parte interna del cerchio):

$$F_T = T + F_p = T + mg.$$

- Essendo la traiettoria circolare, F_T è la forza centripeta, la cui espressione generale dalle variabili cinematiche è data da mv^2/R . Quindi

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{R} &= T + mg \\ T &= m\frac{v^2}{R} - mg. \end{aligned}$$

Affinché ci sia ancora contatto occorre che $T > 0$.

Da questa condizione e dall'espressione di v^2 che deriva dalla **conservazione di energia** meccanica (dalla quota h alla quota $2R$) si ottiene la condizione di altezza minima (h_m) dalla quale deve cominciare a scivolare l'oggetto per poter fare il giro della morte.

(Ovviamente tutto questo trascurando attriti.)

- 29.7 (forza dalla 'forma del potenziale'): punti di equilibrio, stabile, instabile e indifferente.

Ancora lavoro, energia cinetica ed energia potenziale

- Conservazione dell'energia meccanica (solo forze conservative).
- Conservazione dell'energia (caso generale).
- Energia potenziale gravitazionale lontano dalla Terra (o da altro 'attrattore'):
 - Lavoro per andare da R_1 a R_2 :

$$\begin{aligned}L|_{R_1}^{R_2} &= \int_{R_1}^{R_2} F(R) dR \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{GM_T m}{R^2} \right) dR \\ &= \frac{GM_T m}{R} \Big|_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{GM_T m}{R_2} - \frac{GM_T m}{R_1}\end{aligned}$$

il quale dipende solo da R_1 e R_2 e non dal percorso particolare.
Caso interessante:

$$L|_{R_T}^{\infty} = -\frac{GM_T m}{R_T}$$

(lavoro negativo per il motivo che sappiamo).

- Variazione di energia potenziale:

$$\begin{aligned}\Delta E_p|_{R_1}^{R_2} &= -L|_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{GM_T m}{R_1} - \frac{GM_T m}{R_2} \\ \Delta E_p|_R^{\infty} &= \frac{GM_T m}{R} \\ \Delta E_p|_{R_T}^{\infty} &= \frac{GM_T m}{R_T}\end{aligned}$$

(ovviamente positiva).

- Scelta dello zero dell'energia potenziale:
Dalla precedente abbiamo

$$\begin{aligned}\Delta E_p|_{\infty}^R &= -\Delta E_p|_R^{\infty} = -\frac{GM_T m}{R} \\ E_p(R) - E_p(\infty) &= -\frac{GM_T m}{R} \\ E_p(R) &= E_p(\infty) - \frac{GM_T m}{R}\end{aligned}$$

Risulta quindi conveniente e naturale scegliere $E_p(\infty) = 0$, da cui

$$E_p(R) = -\frac{GM_T m}{R}$$

Vedi figura sul sito.

- Energia potenziale è sempre negativa, ma non è un problema: quello che conta sono le sue variazioni (quando un oggetto si allontana E_p cresce; quando si avvicina decresce).

Più precisamente una traslazione del livello di energia potenziale è irrilevante in quanto ‘non fisico’: la forza (quello che veramente conta per la dinamica!) dipende dalla derivata dell’energia potenziale e, come è ben noto, se si aggiunge una costante a una funzione la derivata non cambia.

- Velocità di fuga: la velocità che bisogna imprimere a un corpo affinché vada all’infinito con velocità nulla (trascurando attriti!!):

$$\begin{aligned}\Delta E_c|_{R_T}^{\infty} &= -\Delta E_p|_{R_T}^{\infty} \\ 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= -\left[0 - \left(-\frac{GM_T m}{R}\right)\right] \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{GM_T m}{R}.\end{aligned}$$

- Velocità di impatto per oggetti di velocità iniziale trascurabile: problema opposto → stessa velocità.
- Energia totale di un oggetto soggetto al campo gravitazionale: $E_c + E_p$: se l’energia totale è negativa vuol dire che non riuscirà mai ad allontanarsi a distanza infinita conservando una pur minima energia cinetica: sarà costretto a ricadere sulla Terra → ‘stato legato’.

- Analogie (e differenze) fra forze gravitazionali e forze elettriche.
- Energia potenziale e *potenziale* sia gravitazionale che elettrico.
(Richiamo: forza e campo)
→ **F1inf** 16.4-16.6
→ sul sito per figure dell’energia potenziale per $Q \cdot q > 0$ (caso repulsivo) e $Q \cdot q < 0$ (caso attrattivo).

31 (Gio 16 maggio)

Uso telemetrico della macchina fotografica

- Utilità del raggio notevole passante per il centro di una lente sottile quando $p \gg f$ oggetto molto lontano:
 - l’immagine si forma molto vicino al fuoco della lente:

$$q \approx f;$$
 - per costruzione è sufficiente quindi tracciare il raggio che passa per il centro e una linea ortogonale all’asse e passante per il fuoco.
- Per oggetti molto lontani, la dimensione angolare è uguale, con buona approssimazione, a h/p .

- Se l'oggetto è 'poggiato' sull'asse ottico, come nelle usuali costruzioni, la base della 'freccia-oggetto', la punta della freccia-oggetto e il centro della lente formano un triangolo, da cui

$$\tan \alpha = \frac{y}{p} = \frac{y'}{f},$$

da cui, in termini delle grandezze facilmente accessibili al fotografo,

$$\alpha = \arctan \left(\frac{y'}{f} \right) \approx \frac{y'}{f},$$

ove l'approssimazione vale per 'piccoli angoli'.

- Se invece l'oggetto è centrato nel sensore, ovvero se il suo centro è attraversato dall'asse ottico, abbiamo simili relazioni a partire da $y/2$ e $y'/2$, per le quali valgono le relazioni precedenti, da cui

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{y/2}{p} = \frac{y'/2}{f} \\ \alpha &= 2 \arctan \left(\frac{y'/2}{f} \right) \approx \frac{y'}{f}, \end{aligned}$$

riottenendo nell'approssimazione per piccoli angoli la relazione precedente.

- Un caso particolare interessante è quando y' ha la dimensione massima che può avere sul monitor. Ad esempio, per un 'full format' da 24 mm × 36 mm, le dimensioni massime sono:
 - 36 mm orizzontalmente;
 - 24 mm verticalmente;
 - 43.3 mm lungo la diagonale.

Ne segue che la 'copertura angolare' massima che si può avere con una certa focale f è data (indicando con y'_M) da

$$\alpha_M = 2 \arctan \left(\frac{y'_M/2}{f} \right).$$

Un obiettivo 'grandangolare' ha, come dice il nome stesso, α_M molto grande (vedi immagine sul sito). Ad esempio, un obiettivo da 50 mm ('normale' per una fotocamera 'full frame') ha lungo un'apertura angolare massima, lungo la diagonale, di 47°.

Inoltre, anche se queste formule sono state ricavate in questi due casi particolari, esse seguitano a valere, per oggetti sufficientemente lontani, anche se essi sono distanti dall'asse ottico. **Segue un esempio numerico**

- Un sensore ha dimensioni 13.2 mm × 8.8 mm, con 5472 px × 3648 px ('px' sta per pixel).
- Immaginiamo che in una foto scattata con una focale di 13.3 mm (avendo tale fotocamera uno zoom, la lunghezza focale è variabile) ci sia un oggetto largo 450 px, disposto orizzontalmente.

- Scalando, otteniamo che l'immagine di tale oggetto è larga

$$y' = \frac{450 \text{ px}}{5472 \text{ px}} \times 13.2 \text{ mm} = 1.09 \text{ mm}.$$

(In realtà non è importante conoscere il numero di pixel. Quello che conta è il rapporto fra la grandezza dell'immagine dell'oggetto e quella dell'intera foto, e questo rapporto si può misurare con un metro sul monitor.)

- Ne risulta

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \arctan \frac{y'/2}{f} \\ &= 2 \arctan \frac{0.650 \text{ mm}}{13.2 \text{ mm}} \\ &= 0.082 \text{ rad} \\ &= 4.7. \end{aligned}$$

- Infine, se ci accade di conoscere la larghezza vera dell'oggetto, che ipotizziamo qui essere pari a 20 cm, possiamo valutarne la distanza dall'angolo, ricordando che $\tan(\alpha/2) = (y/2)/p$:

$$p = \frac{y/2}{\tan(\alpha/2)} = 243 \text{ cm}$$

- Ovviamente si poteva anche usare la relazione $y/p = y'/f$ (è una delle relazioni viste precedentemente, nella quale abbiamo semplificato un fattore 2 presente in entrambi i membri), ottenendo

$$\begin{aligned} p &= \frac{y}{y'} \cdot f \\ &= \frac{20 \text{ cm}}{1.09 \text{ mm}} \times 13.2 \text{ mm} = 243 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Unità pratiche di energia e potenza

→ **F1inf** 15.5

Energia potenziale e potenziale

Come i campi (elettrico o gravitazionale) sono “forza su *carica*” (massa o carica elettrica), così si definiscono i *potenziali*, che sono “energia potenziale su *carica*” (massa o carica elettrica). Il vantaggio è che se si conosce la variazione di potenziale, si può calcolare facilmente la variazione di energia potenziale per diverse masse o cariche (a seconda dei due casi).

- Potenziale gravitazione dovuto un ‘punto materiale’ di massa M in un punto distante R :

$$V_G^{(M)}(R) = -\frac{GM}{R}.$$

- Caso speciale in prossimità della superficie terrestre:

$$V_G^{(M_T)}(h) = gh.$$

- Potenziale elettrico dovuto un 'punto materiale' di carica Q in un punto distante R :

$$V^{(Q)}(R) = \frac{kQ}{R}.$$

(Il motivo per cui in questo caso non è stato specificato nel simbolo che si tratta di potenziale elettrico sarà chiaro fra poco.)

- Se conosciamo differenze di potenziale è facile calcolare differenza di energia potenziale di una 'carica' (di massa o di carica):

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= m \cdot \Delta V_G^{(M)} \\ \Delta E_p &= q \cdot \Delta V^{(Q)}\end{aligned}$$

(e se conosciamo ΔE_P ci possiamo valutare le variazioni di energia cinetica).

- Dimensioni e unità di misura dei potenziali: essendo energia su 'carica' saranno, a seconda dei casi, J/kg o J/C.
- Il caso pratico interessante è quello elettrico, in quanto le differenze di potenziali non sono altro che . . . le differenze di potenziali di batterie e di altri 'generatori', la cui unità di misura, il Volt (V) è proprio 1 J/1 C.
- *Elettronvolt*: è pari alla variazione di energia potenziale che una carica elementare (in modulo uguale a quella dell'elettrone) subisce quando attraversa la differenza di potenziale di 1 V. Multipli sono il keV, il MeV e il GeV.

In particolare, se un elettrone va da un punto a potenziale più basso a uno a potenziale più alto, tale che $\Delta V = +1$ V, subirà una differenza di energia potenziale pari a -1 eV, e quindi una differenza di energia cinetica pari a $+1$ eV.

(La conversione eV \rightarrow J è lasciata come esercizio.)

Tensione, corrente massima, potenza massima e 'capacità' (energetica) delle batterie

- Se la carica q (ad esempio 1 C) attraversa la differenza di potenziale ΔV (ad es. 12 V), il lavoro fatto dalla batteria è pari a $q \Delta V$. Se questo succede una volta al secondo la potenza erogata dalla batteria sarà $q/(1 \text{ s}) \cdot \Delta V = I \cdot \Delta V$, avendo indicato con I la corrente elettrica ($1 \text{ A} = 1 \text{ C}/1 \text{ s}$).
→ Quindi la corrente massima che una batteria può fornire, moltiplicata la sua *tensione* (sinonimo di differenza di potenziale) è pari alla potenza massima che la batteria può erogare.
- Un altro dato importante per le batteria sono gli 'ampère-ora' (A·h). Ad esempio 1 Ah indica che la batteria può fornire 1A per la durata di un'ora, oppure 2A per la durata di mezz'ora, etc.

Ne segue che

- essendo l'ampère-ora una corrente per un tempo, questo valore ci dà la carica elettrica che può fluire dalla batteria. Ad esempio da una batteria da 50 A·h possono fluire 180000 C.

- se moltiplichiamo gli ampère-ora per la tensione otteniamo l'energia erogabile, ovvero la sua 'capacità energetica'. Ad esempio una batteria da 5V con una capacità di 2000 mA·h = 2 A·h = 7200 A·s può fornire una energia ('nominale') pari a $5\text{ V} \times 7200\text{ A}\cdot\text{s} = 36\text{ kJ}$, ovvero circa 8.6 kcal.

- Esempi visti in aula:

- Power bank per ricaricare cellulari:
 - * tensione: 5 V;
 - * corrente massima in uscita: 2.1 A ('2100 mA');
 - * 'capacità':²¹ 5.0 A·h ('5000 mA·h').
- Batteria di bici elettrica:
 - * tensione: 24 V;
 - * corrente massima in uscita: non fornita (uhm...);
 - * 'capacità': 7.8 A·h;
 - * energia immagazzinata: 187 W·h, ovvero $\approx 0.2\text{ kWh}$.

Cosa strana: viene fornito un dato in più, ricavabile dagli altri, in quanto

$$\begin{aligned} 24\text{ V} \times 7.8\text{ A} \cdot \text{h} &= 187\text{ (V} \times \text{A)} \cdot \text{h} \\ &= 187\text{ W} \cdot \text{h} \\ &= 0.187\text{ kWh} \approx 0.2\text{ kWh}, \end{aligned}$$

mentre non viene fornita la corrente massima, legata alla potenza massima erogabile.

Introduzione ai circuiti elementari in corrente continua

- Peculiarità dell'elettricità, rispetto alla gravità: generatori; scorrimento di cariche; conduttori per 'trasportare la differenza di potenziale. (**F1inf** 17.4, 17.5)
- Analogie meccaniche (circuito idraulico con pompa e impianto di risalita). Potenza fornita dalla *forza elettromotrice* del generatore e potenza dissipata dalle resistenze (*effetto Joule*, il cui nome non era stato menzionato a lezione, ma era stato detto semplicemente che l'energia rilasciata nelle resistenza scalda) . (**F1inf** 17.7)
- Legge di Ohm (**F1inf** 17.6, 18.2)

Pendolo 'semplice'

- Modellizzazione: massa sospesa puntiforme; filo inestensibile e senza massa.
- Forze in gioco: gravità e reazione vincolare.
- (Opportuna) scomposizione della forza peso, in modo che una componente sia bilanciata dalla reazione vincolare del filo.
- Seconda legge di Newton lungo la direzione tangente alla circonferenza;
 - equazione differenziale che ne deriva;

²¹È legata alla capacità energetica e non va confusa con la 'capacità' dei condensatori!

- equazione differenziale le la (più utile!) variabile α ;
- approssimazione per piccoli angoli ($\sin \alpha \approx \alpha$):
→ riconosciamo oscillatore armonico con $\omega^2 = g/l$.

- A questo punto conosciamo immediatamente la soluzione $\alpha(t)$ nel caso in cui $\alpha(0) = \alpha_M$ e $\alpha'(0) = 0$:

$$\alpha(t) = \alpha_M \cos \omega t,$$

da cui ci si calcola facilmente $\alpha'(t) = d\alpha/dt$.

- **Attenzione** a non confondere la pulsazione ω (costante!) con la **velocità angolare** $\alpha'(t)$, che invece dipende dal tempo (→ esattamente come altre ‘velocità’ in altri oscillatori armonici).
- Una volta nota $\alpha(t)$ e la velocità angolare $\alpha'(t)$ si ottengono facilmente sia la posizione lungo l’arco di cerchio che la velocità:

$$\begin{aligned} s(t) &= l \alpha(t) \\ v(t) = s'(t) &= l \alpha'(t) \end{aligned}$$

- Questioni energetiche:

$$\begin{aligned} E_T = E_p(h) + E_c(v) &= mgh + \frac{1}{2} m v^2 \\ &= mgl(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned}$$

- L’energia totale è costante in assenza di forze di attrito (che il realtà ci sono sempre e quindi l’oscillazione a mano a mano si spegne).
- La velocità nel punto più basso ($\alpha = 0$) può calcolata dalla conservazione dell’energia. Il valore numerico sarà leggermente diverso da quello ottenuto prima a partire dalla velocità angolare. Il motivo è che, come detto, l’equazione temporale $\alpha(t)$, da cui segue $\alpha'(t)$, è un’approssimazione valida per piccole oscillazioni.

Dettagli su “F1inf”: 8.4, 8.5,

32 (Lun 20 maggio)

Ancora moto del pendolo

Analisi delle animazioni sul sito:

- forza peso (freccia marrone verso il basso) e sua componente lungo il filo e trasversale ad esso;
- forza peso, tensione del filo e forza totale (rossa): la forza totale nel punto più in basso è diversa da zero ed è rivolta verso l’alto a causa del movimento rotatorio ($T - mg > 0$) in quanto essa è la forza centripeta nel tratto di movimento circolare;
- accelerazione e velocità.

Misura di distanze e di dimensioni angolari mediante immagini fotografiche

Delucidazioni sui quesiti basati sulla foto del cartello dell'estintore: → da fare!

Secondo e terzo principio della meccanica rivisti

- Quantità di moto ($\vec{p} = m\vec{v}$) e formulazione originaria del secondo principio

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

da cui

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}.$$

La *quantità di moto*, come dice il nome misura *quanto moto* possiede un corpo in movimento. Purtroppo una delle difficoltà è che non c'è un equivalente nel linguaggio comune e si fa uso della locuzione “forza di un corpo in movimento”, che fisicamente non ha alcun senso (al più si può parlare della sua energia, ma questa è altra cosa).

F1inf 9.4

- Impulso della forza ($\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$) e variazione della quantità di moto.

F1inf 9.5.

- Terzo principio e conservazione della quantità di moto totale (limitatamente a due oggetti che formano un sistema isolato, tanto per cominciare).

F1inf 9.6.

- Centro di massa di due ‘punti materiali’ e velocità del centro di massa.

Conservazione della velocità del centro di massa (limitatamente a due oggetti che formano un sistema isolato, tanto per cominciare).

F1inf 9.7.

- Problemi tipici.

Introduzione alla fisica degli urti

- Urto completamente anelastico (si annulla il moto relativo, ovvero i due oggetti rimangono attaccati dopo l'urto): si conserva la quantità di moto (se i due corpi collidenti possono essere assimilabili a un sistema isolato).

Esempio del cosiddetto ‘pendolo balistico’ per misurare la velocità di proiettili.

- Urto perfettamente elastici (tipicamente delle idealizzazioni):

– modellizzazione mediante i due corpi (o almeno uno) dotati di energia cinetica; compressione e trasformazione dell'energia cinetica in energia potenziale elastica, la quale viene rilasciata sotto forma di energia cinetica finale.

– negli urti perfettamente elastici fra due corpi si conserva sia la quantità di moto che l'energia meccanica (sotto forma di energia cinetica iniziale e poi finale).

- Normalmente gli urti sono una via di mezzo, con una parte dell'energia cinetica iniziale trasformata in energia termica, di vibrazione degli oggetti e dell'aria (suono), in deformazioni, etc.

F1inf 11.6, 11.7

Analisi degli urti collineare (1D) perfettamente elastici

- Equazioni dovute alle due leggi di conservazione di quantità di moto e di energia.
- Dalle due deriva la legge della somma delle velocità prima e dopo l'urto

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$$

- Casi speciali in cui uno dei due corpi ha 'inerzia infinita' (molto maggiore dell'altro) e quindi in prima approssimazione non può cambiare velocità (anche se può cambiare quantità di moto!):
 - urto contro un oggetto di massa 'infinita' a riposo;
 - urto subito da un oggetto di massa infinita in movimento: casi in cui l'oggetto di 'piccola massa' era a riposo, si muoveva contro l'altro e nello stesso verso (esempi tratti dal calcio e dal tennis);
- Esperimento dimostrativo in aula di urto di pallina da ping pong contro pallina da golf. Particolarmente interessante quello con la pallina da ping pong ferma sul bordo del tavolo, nel quale si vede facilmente (dalla distanza di caduta) come la velocità finale della pallina da ping pong è circa il doppio dell'altra.

Ancora su energia e potenza – aspetti pratici

Potenza (e prezzo) di elettricità, gas e pellet:

- esempio fornelli a gas:
<http://www.ikea.com/it/it/catalog/products/50156008/>
- esempio termosifoni (chiamate 'rese termiche' nella brochure – si noti la dipendenza da ΔT , differenza fra temperatura del termosifone e temperatura ambiente):
<http://www.faral.com/prodotti/tropical/>
- esempio caldaia:
<http://www.saviocaldaie.it/images/Prodotti/4823.0440.0000%20EVODENS%20HT%20R03.pdf>
- esempio termocamino a pellet:
<http://www.ferrillo.it/pelletaria/356-dea-eco-8-klover.html>
- esempi di pellet:
<https://www.amazon.it/pellet-Holz-austriaco-chiaro-certificato/dp/B0171FJU84/>
<https://www.amazon.it/sacchi-pellet-Italiano-qualit%C3%A0-certificato/dp/B017A5P3A4/>

Nota sulla potenza di centrali idroelettriche: flusso di massa \times differenza di potenziale gravitazionale ($P = \phi_M \Delta V_G$, analoga di $P = I \Delta V$ per i circuiti).

33 (Mar 21 maggio)

Alcune delucidazioni sui problemi

- Come trovare il lavoro incognito delle forze di attrito: i dati forniscono la variazione di energia potenziale e di energia cinetica \rightarrow l'energia mancante è stata 'mangiata' da forze 'passive' (non conservative).
- Nel pendolo per passare dalla quota all'angolo (nota la lunghezza l) è sufficiente fare la costruzione geometrica e usare poi le regolette di base della trigonometria nel triangolo rettangolo.

Altri concetti di base sui circuiti in corrente continua

- Potenza dissipata nelle resistenze (Effetto Joule).
F1inf 17.7 e problema 33.1.d
- Resistenze in serie (e concetto fisico e non grafico di *serie*: devono essere attraversate dalla stessa corrente).
F1inf 17.9
- Resistenze in parallelo (e concetto fisico e non grafico di *parallelo*: devono avere ai loro capi la stessa differenza di potenziale).
F1inf 17.11
- Concetto di *partitore di tensione* in resistenze in serie.
F1inf 17.10 e problema 33.1.b

Delucidazioni sui problemi di urto

Commenti sui modelli, sulla validità delle leggi di conservazione e sui problemi, in particolare su come si possibile che un corpo 'infinitamente più massivo' di un altro (ad es. pareti, collegate a palazzi e alla Terra) riesca ad assorbire quantità di modo senza variare velocità e senza assorbire energia cinetica.

- Se avevano inizialmente velocità nulla

$$v = \frac{p}{M} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$
$$E_c = \frac{1}{2} \frac{p^2}{M} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

- se avevano velocità iniziale diversa da zero la mantengono (avendo 'inerzia infinita' non la possono cambiare).

Legge di Pascal e applicazioni

- Legge di Pascal (per fluidi incompressibili, o 'circa tali'): variazioni di pressione trasmessa in tutto il volume. Cenno alle macchine idrauliche come ulteriore caso di 'moltiplicatore di forza' (con dito su un pistoncino possiamo contrastare la forza di un'auto poggiata su un grande pistone).
- Considerazione sul lavoro dei vari pistoni delle macchine idrauliche (analogia sullo spazio percorso dalla forza 'motrice' rispetto al sollevamento dell'oggetto, nei casi di carrucole multiple, piano inclinato e leve).

Lavoro effettuato con ‘pistone’ su fluidi compressibili

- Lavoro compiuto su un gas (‘fluido compressibile’) da un solo pistone: che fine fa? Riscrittura dell’espressione del lavoro in questo caso: $P dV$ (semplice conseguenza di ‘ $F dx$ ’).
- Lavoro e variazione di energia interna:
 - Abbiamo già visto, con il mulinello di Joule e con le forze di attrito, come il lavoro non cambia solo l’energia meccanica ma se ne ritrova l’effetto in altre forme di energia.
 - Similmente, avevamo visto come la quantità di calore sia una forma di energia trasferita su un corpo.
 - Quindi, se ci limitiamo a calore e al lavoro eseguito su un fluido compressibile (gas), abbiamo

$$\Delta E = Q + L^{(sul\ gas)}.$$

Questa equazione è alla base del primo principio della termodinamica.

- ‘Purtroppo’ in genere la si incontra in una forma leggermente diversa, giustificata dal fatto che nelle macchine termiche forniamo calore e ‘preleviamo lavoro’ (si pensi a una locomotiva)

$$\Delta E = Q - L^{(dal\ gas)},$$

e ovviamente nei libri è assente la specifica ‘(dal gas)’.

- Infine, come è noto, anche se non possiamo approfondire, ‘classicamente’ la variazione di *energia interna* del gas è associata all’energia cinetica delle molecole del gas.

Introduzione ai fluidi in movimento

- Velocità di un fluido incompressibile in un tubo a sezione variabile a regime stazionario, ovvero a portata costante. Il flusso deve essere costante in tutto il tubo, anche se la sezione (A) cambia, come si capisce intuitivamente:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

(Legge di Leonardo).

Fluidi in movimento in tubo orizzontale a sezione variabile

- Abbiamo visto come in un condotto di sezione variabile disposto orizzontalmente la velocità cambia da punto a punto. Anche la pressione potrebbe variare: come? (A maggior ragione, se il condotto non è orizzontale. Cominciamo ad analizzare il caso orizzontale.)
- Bilancio energetico di un liquido (incomprimibile e non viscoso, ovvero trascurando forze di attrito sia all’interno del fluido che fra fluido e pareti) che scorre orizzontalmente *in modo stazionario*, in un tubo di sezione variabile, mediante il ragionamento della “scomparsa” e “riapparizione”. (Per stazionarietà intendiamo che in un punto del tubo la velocità è sempre la stessa, trascurando quindi i ‘transienti’ di quando il fluido comincia a muoversi nel tubo.)

- se la velocità degli elementi dV (o $dm = \rho dV$) di liquido cambia, cambia anche l'energia cinetica associata;
- la variazione di energia cinetica deve essere pari al lavoro compiuto dalle forze di pressione del liquido esterno alla porzione compresa fra le sezioni A_1 e A_2 prese in considerazione;
- il lavoro (infinitesimo) totale vale (con la sezione A_1 a sinistra e A_2 a destra e v diretta da sinistra verso destra):

$$\begin{aligned} dL^{(P)} &= F_1 ds_1 - F_2 ds_2 \\ &= P_1 A_1 ds_1 - P_2 A_2 ds_2 \\ &= P_1 dV_1 - P_2 dV_2 \\ &= P_1 dV - P_2 dV \end{aligned}$$

(in quanto, essendo il liquido incompressibile, $dV_1 = dV_2$, indicato quindi con dV);

- possiamo immaginare lo scorrimento in un piccolo tempo dt come lo spostamento di dV da una sezione all'altra,²² sezioni caratterizzate eventualmente da velocità diverse; l'effetto netto è quello di un volume dV (o massa $dm = \rho dV$) che si sposta da A_1 (ove aveva velocità v_1) ad A_2 (ove ha velocità v_2);
- la variazione di energia cinetica complessiva dell'elemento infinitesimo di fluido dm vale quindi $\frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2$;
- eguagliando la variazione di energia cinetica al lavoro compiuto dalle forze esterne (esterne al liquido compreso fra la sezione A_1 e la sezione A_2 !) si ottiene finalmente

$$\begin{aligned} P_1 dV - P_2 dV &= \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \\ P_1 dV - P_2 dV &= \frac{1}{2} \rho dV v_2^2 - \frac{1}{2} \rho dV v_1^2 \\ P_1 - P_2 &= \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \\ P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 &= P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \end{aligned}$$

ovvero, in generale, per qualsiasi sezione (di tubo disposto orizzontalmente):

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} :$$

se la velocità aumenta la pressione diminuisce;

- riassumendo (per tubo disposto orizzontalmente):
 - * se la sezione diminuisce, la velocità aumenta e quindi la pressione diminuisce;
 - * se la sezione aumenta, la velocità diminuisce e quindi la pressione aumenta.
- Un importante esempio: se una ostruzione diminuisce la sezione di una arteria, la velocità del sangue aumenta, la pressione diminuisce e il tratto di arteria subisce una forza esterna (a causa di maggiore pressione) che la fa comprimere ancor più!

- Tubo Venturi.

²²È con questo che si intende quello che viene chiamato “ragionamento a scomparsa e riapparizione”: ai fini della variazione dell'energia cinetica tutta la parte compresa fra le due sezioni su cui si compiono questi ragionamenti è ininfluente in quanto, punto per punto la velocità è la stessa e quindi anche l'energia cinetica è la stessa.

Introduzione al movimento di un corpo rigido libero di ruotare intorno a un asse

F1Inf par. 22.1, fino in fondo a pag. 123

34 (Gio 23 maggio)

Moto del centro di massa

F1Inf par. 9.8

Teorema di Bernoulli per il fluidi in moto

Continuazione di quanto fatto la scorsa lezione, senza la richiesta che il tubo sia posizionato orizzontalmente:

→ nella variazione di energia cinetica bisogna considerare anche il contributo del lavoro compiuto dalla forza peso, ovvero della variazione di energia potenziale.

- Caso generale, con tubo non necessariamente orizzontale, ma con tutte le altre ipotesi (liquido incompressibile e non viscoso; flusso stazionario):

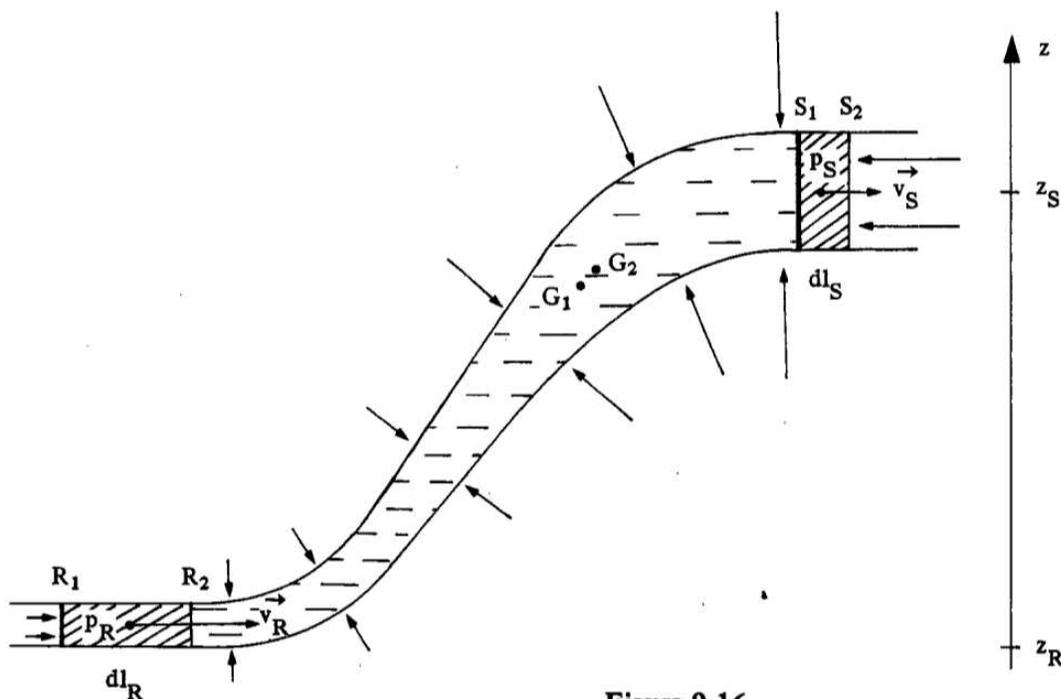


Figura 9.16

Figura 1: Figura illustrativa del ragionamento per arrivare all'equazione di Bernoulli dal bilancio energetico (da Franco Dupré, *Lezioni di Fisica*, Vol. 2, con notazione un po' diversa da quella usata a lezione: le sezioni A_1 e A_2 sono indicate con R e S ; velocità, pressioni e quote in corrispondenza sono indicate con \vec{v}_R e \vec{v}_S , p_S e p_R , z_S e z_R ; gli spostamenti sono indicati con dl_R e dl_S ; G_1 e G_2 indicano il baricentro nei due istanti considerati, anche se non vengono usati in quanto si segue l'espedito di "scomparsa" e "riapparizione"; le frecce ortogonali al tubo indicano infine le reazioni vincolari del tubo, ortogonali al moto e che quindi non compiono lavoro).

- Nel bilancio energetico bisogna tener conto anche del lavoro compiuto dalla forza di gravità.
- Essendo la forza di gravità conservativa, il lavoro può essere valutato dall'opposto della variazione dell'energia potenziale.
- Anche in questo caso tale variazione può essere valutata mediante l'espedito di "scomparsa" e "riapparizione" usato per l'energia cinetica:

$$\Delta E_p \Big|_{h_1}^{h_2} = -L^{(G)} \Big|_{h_1}^{h_2} = -[-dm g (h_2 - h_1)] = dm g (h_2 - h_1).$$

(In pratica, ripetiamo, corrisponde a portare dm da h_1 a h_2 , mentre le restanti sezioni vengono semplicemente 'sostituite'.)

- Il bilancio energetico diventa quindi

$$\begin{aligned} P_1 \frac{dm}{\rho} - P_2 \frac{dm}{\rho} + dm g (h_1 - h_2) &= \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \\ P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 &= P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2, \end{aligned}$$

ovvero, in una sezione qualsiasi,

$$P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante}$$

nota come **equazione di Bernoulli**.

• Esempi notevoli:

- nel caso statico ($v = 0$) essa contiene la legge di Stevino (si noti che in questa trattazione il verso positivo di h è verso l'alto):

$$\begin{aligned} P_1 + \rho g h_1 &= P_2 + \rho g h_2 \\ P_2 - P_1 &= \rho g (h_1 - h_2) \\ P_2 &= P_1 + \rho g (h_1 - h_2) \end{aligned}$$

(Se h_2 è minore di h_1 , ovvero scendendo verso il basso, $h_1 - h_2 > 0$ e quindi $P_2 > P_1$)

- nel caso di un foro (di sezione A_2 piccola) in un recipiente di sezione (A_1) grande tenuto aperto:

- * le pressioni in corrispondenza di A_1 e A_2 sono uguali e pari a quella atmosferica (P_A);
- * essendo $A_1 \gg A_2$ la velocità di discesa del fluido nel recipiente può essere trascurata ($v_1 \approx 0$);
- * ne segue, prendendo h dal livello del foro

$$\begin{aligned} P_A + \rho g h_1 + 0 &= P_A + 0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \\ v_2 &= \sqrt{2 g h_1} \end{aligned}$$

\Rightarrow lo zampillo esce la stessa velocità che avrebbe una goccia caduta da una altezza di h_1 ("teorema di Torricelli").

- Conseguenze (alcune già viste) dell'equazione di Bernoulli:
 - legge di Stevino;
 - teorema di Torricelli (zampillo da parete di grande recipiente);
 - effetto Venturi, ad es.
 - * misuratore di velocità di aerei (benché approssimata);
 - * funzionamento dei vaporizzatori.

Ancora corpo rigido libero di ruotare intorno a un asse

(Continuazione della scorsa lezione)

Concetti nuovi:

- momento della forza (conta solo la componente della forza ortogonale al 'raggio' r_i che congiunge il punto di applicazione all'asse di rotazione);
- momento di inerzia (l'inerzia non dipende solo dalla massa ma dal quadrato della sua distanza dall'asse di rotazione);
- momento della quantità di moto

F1Inf par. 22.1

Analogie fra moto di traslazione e moto di rotazione intorno a un asse

F1Inf par. 22.2

Energia cinetica totale

F1Inf par. 22.2

Nota: se un corpo cilindro o una sfera ruotano su un piano (orizzontale o verticale, purché con attrito in quanto!) velocità traslazionale e velocità angolare sono legate da $\omega = v / R$

Esempi di calcolo di momenti di inerzia

- barra con massa a un estremo (e rotante intorno all'altro estremo);
- con due masse agli estremi (e rotante in un punto intermedio, tipicamente intorno al centro);
- massa su una circonferenza (trascorrendo quella della struttura, come nella ruota di bicicletta mostrata a lezione);
- disco (o cilindro, che in pratica sono la stessa cosa) libero di ruotare intorno al centro (come una ruota): occorre *sommare gli infiniti contributi infinitesimi* al momento di inerzia totale.

F1Inf par. 23.2

35 (Mar 28 maggio)

Prodotto vettoriale

F1Inf par. 22.4 e 23.5 (senza dimostrazioni)

Espressione vettoriale di momento della quantità di moto e momento della forza

Natura vettoriale di \vec{L} e di \vec{M} con dimostrazioni in aula con un 'giroscopio' (vedi anche il video sul sito del corso).

Rotazioni in frenata e in accelerazione di auto e moto. Vantaggi e svantaggi della trazione anteriore e posteriore.

F1Inf par. 23.6 e 23.7

Reinterpretazione delle leve in termini di momenti delle forze

Essenzialmente argomento trattato precedentemente, rivisto in termini di momenti di forze.

F1Inf par. 23.8.

Forza di Lorenz

Come altra applicazione del prodotto vettoriale vediamo, anche per completare l'argomento delle forze che una carica elettrica può subire, la *forza di Lorenz*.

- Bussola realizzata con magnetini e sferette.
- Forza su una carica in moto (solo se in moto!) dovuta a campo magnetico \vec{B} (forza di Lorenz):

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

:

- \vec{F}_L ortogonale al piano definito da \vec{v} e \vec{B} ;
- quindi $d\vec{s} = \vec{v} dt$ è normale a \vec{F}_L : la forza magnetica non compie lavoro, ergo
 - * cambia energia cinetica:
 - * il modulo della velocità rimane costante.
- in una regione di spazio in cui una particella carica è soggetta soltanto a un campo magnetico, essa esegue un moto circolare uniforme, con forza centripeta qvB e quindi accelerazione centripeta qvB/m . Ma essendo a_c legata a v e R dalla ben nota $a_c = v^2/R$, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{q}{m} vB &= \frac{v^2}{R} \\ R &= \frac{m}{q} \frac{v}{B} \end{aligned}$$

A parità di q , v e B il raggio di curvatura è proporzionale alla massa della particelle.
→ *spettrometro di massa*.

- Chiaramente, a questo punto la continuazione diventa un esercizio sul moto circolare uniforme nel quale è la forza centripeta e la forza di Lorentz.
 - velocità angolare ω ;
 - periodo T ;
 - frequenza ν (*frequenza di ciclotrone*).
- ⇒ Quaderno individuale.

Andamento temporale del processo di termalizzazione

Sostanzialmente vedi **F1inf** 16.2, ma scrivendo

$$\frac{dQ}{dt} \propto -(T - T_{eq})$$

- se $(T - T_{eq}) > 0$ il corpo cede calore;
- se $(T - T_{eq}) < 0$ il corpo assorbe calore;
- se $(T - T_{eq}) = 0$ il corpo è in equilibrio termico e quindi $dQ/dt = 0$.

Indicando la costante di proporzionalità con la lettera greca η , l'espressione della quantità di calore 'assorbita' (se positiva, altrimenti è ceduta) nell'unità di tempo diventa

$$\frac{dQ}{dt} = -\eta(T - T_{eq})$$

Quindi, ricordando che $dQ = C dT$,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt} &= -\eta \cdot (T - T_{eq}) \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{C/\eta} \cdot (T - T_{eq}) = -\frac{1}{\tau} \cdot (T - T_{eq}), \end{aligned}$$

con $\tau = C/\eta$ avente le dimensioni di un tempo ('tempo caratteristico').

Indicando con $\Delta T = T - T_{eq}$, differenza fra la temperatura istantanea e quella finale di equilibrio (in alternativa potevamo indicare T_{eq} con T_F), abbiamo, essendo T_{eq} costante,

$$\frac{d}{dt}(T - T_{eq}) = \frac{d}{dt}\Delta T$$

e quindi

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{1}{\tau} \Delta T,$$

equazione differenziale della quale conosciamo bene la soluzione avendola già incontrata in altri problemi ('diminuzione esponenziale negativa'):

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 e^{-t/\tau},$$

ove abbiamo scritto esplicitamente che ΔT dipende dal tempo, mentre ΔT_0 è pari alla differenza di temperatura iniziale, ovvero $\Delta T_0 = T_0 - T_{eq}$.

Quindi la nostra soluzione è data da

$$T(t) - T_{eq} = (T_0 - T_{eq}) e^{-t/\tau},$$

ovvero

$$T(t) = T_{eq} + (T_0 - T_{eq}) e^{-t/\tau}.$$

Come si vede facilmente $T(0) = T_0$ e $T(\infty) = T_{eq}$, ma, come detto in simili occasioni, ciò non significa che dobbiamo aspettare un tempo ‘infinito’ per raggiungere l’equilibrio, ma semplicemente un tempo ‘molto maggiore’ di τ .

Essendo $\tau = C/\eta$, la *costante di tempo di termalizzazione* è proporzionale alla capacità termica del corpo che si vuole termalizzare (l’altro, tipicamente un fluido a temperatura iniziale T_{eq} , viene considerato di ‘capacità termica infinita’, in modo che la sua temperatura non cambi.) Essendo la capacità termica proporzionale a massa e calore specifico dell’oggetto, maggiori sono questi e maggiore è la costante di tempo τ .

La costante η , nella quale non entriamo in dettaglio, è invece legata alla superficie di contatto fra oggetto da termalizzare e fluido termalizzante, in particolare alla conducibilità termica (vedi nota 9 a pag. 82 di **F1inf**).