In questo caso è molto istruttivo far uso della variabile Q, carica del condensatore, ottenendo così

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\,Q \;=\; 0 \qquad (10.52)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{L\,C}\,Q \;=\; 0 \qquad (10.53)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+\gamma\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,Q \;=\; 0\,, \qquad (10.54)$$

ovvero, essendo Q e V_C proporzionali,

$$\frac{\mathrm{d}^2V_C}{\mathrm{d}t^2}+\gamma\,\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,V_C \;=\; 0\,, \qquad (10.55)$$

con

$$\gamma \;=\; \frac{R}{L} \qquad (10.56)$$

$$\omega_0 \;=\; \frac{1}{\sqrt{LC}}\,, \qquad (10.57)$$

entrambi aventi le dimensioni dell'inverso del tempo. Prima di passare alla soluzione passiamo ad un altro problema fisico descritto da un'analoga equazione differenziale.

10.8.3 Analogia meccanica

È impossibile non riconoscere nelle (10.52)-(10.54) un'analogia delle oscillazioni smorzate della meccanica, come ad esempio quelle del moto di un corpo soggetto alla forza elastica di una molla e di una forza di attrito di viscosità proporzionale alla velocità, ovvero

$$F \;=\; -k\,x-\beta\,v \qquad (10.58)$$

da cui

$$m\,a \;=\; -k\,x-\beta\,v\,, \qquad (10.59)$$

che possiamo riscrivere come

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k\,x \;=\; 0 \qquad (10.60)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\beta}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}\,x \;=\; 0 \qquad (10.61)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,x \;=\; 0\,, \qquad (10.62)$$

con

$$\gamma \;=\; \beta/m \qquad (10.63)$$

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \qquad (10.64)$$

Il caso limite di $\beta = 0$, ovvero $\gamma = 0$, si riduce al ben noto oscillatore armonico ideale.

Data l'analogia fra le due equazioni differenziali, ci interessiamo alla soluzione della generica

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, z \;=\; 0 \tag{10.65}$$

con condizioni iniziali

$$z(0) \;=\; z_0 \tag{10.66}$$
$$\dot{z}(0) \;=\; 0\,. \tag{10.67}$$

Prima di risolvere questa equazione differenziale, analizziamo l'analogia fra i due problemi fisici, in particolare confrontando la (10.52) con la (10.60).

- In un caso siamo interessati alla variazione nel tempo della posizione x di un punto legato all'estremo di una molla, in un altro alla carica Q depositata sull'armatura di riferimento del condensatore. (In entrambi i casi quando la variabile di interesse è nulla il sistema è all'equilibrio.)

- Nel caso meccanico la derivata rispetto al tempo della quantità di interesse rappresenta la velocità, nel caso elettrico la corrente elettrica.

- $\beta\, v$ rappresenta la forza di attrito di viscosità, ovvero il termine che 'brucia' energia, nel senso che se $\beta = 0$ il sistema conserva l'energia meccanica, ovvero la (10.60) si riduce ad un oscillatore armonico ideale. L'equivalente elettrico di β è la resistenza R, la quale consuma energia per effetto Joule.

  In particolare la potenza dissipata per effetto Joule, RI^2 ha il suo equivalente nella potenza per contrastare la forza di attrito, pari a $(\beta v)\cdot v$, ovvero βv^2.

- L è l'analogo della massa (inerziale) m in quanto l'induttanza si oppone alla variazione di intensità di corrente.

- Infine l'analogo della costante elastica k della molla è $1/C$, come già discusso a suo tempo e che ripetiamo: come una molla più è lontana dalla posizione di equilibrio e più è difficile tirarla/comprimerla ulteriormente, così un condensatore più è carico e più 'costa' caricarlo ulteriormente [in quanto il lavoro da compiere per aggiungere dQ è pari a $(Q/C)\,\mathrm{d}Q$]. Questo spiega anche perché l'equivalente della costante elastica è $1/C$: minore è C, maggiore è la tensione ai capi del condensatore a parità di carica applicata e quindi più 'oneroso' caricarlo ulteriormente.

Possiamo finalmente scrivere la seguente tabella di analogie:

$$x \longleftrightarrow Q \tag{10.68}$$
$$v \longleftrightarrow I \tag{10.69}$$
$$a \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{10.70}$$
$$m \longleftrightarrow L \tag{10.71}$$
$$k \longleftrightarrow \frac{1}{C} \tag{10.72}$$
$$\beta \longleftrightarrow R \tag{10.73}$$
$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2}\,L\,I^2 \tag{10.74}$$
$$\frac{1}{2}\,k\,x^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2}\,\frac{1}{C}\,Q^2 \tag{10.75}$$
$$\beta\,v^2 \longleftrightarrow R\,I^2 \tag{10.76}$$
$$\sqrt{\frac{k}{m}} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \tag{10.77}$$
$$\frac{\beta}{m} \longleftrightarrow \frac{R}{L} \tag{10.78}$$
$$\frac{1}{\beta}\sqrt{mk} \longleftrightarrow \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,, \tag{10.79}$$

ove il significato di alcune di queste espressioni sarà chiaro nel seguito.

10.9 Oscillazioni smorzate

Per quanto riguarda la soluzione della (10.65), ricordiamo che il procedimento è quello di partire da una soluzione di prova complessa del tipo

$$\zeta(t) = k\,e^{\alpha\,t}\,, \tag{10.80}$$

la cui parte reale costituisce la soluzione fisica. Esprimendo la (10.65) in termini della (10.80), che diventa quindi

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,\zeta = 0\,, \tag{10.81}$$

otteniamo

$$\alpha^2\,k\,e^{\alpha\,t} + \gamma\,\alpha\,k\,e^{\alpha\,t} + \omega^2\,k\,e^{\alpha\,t} = 0, \tag{10.82}$$

da cui

$$\alpha^2 + \gamma\,\alpha + \omega_0^2 = 0\,, \tag{10.83}$$

denominata *equazione algebrica associata*, le cui soluzioni sono

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\,, \tag{10.84}$$