

Capitolo 2

Circuiti in corrente continua

In questo capitolo introduciamo dei semplici circuiti composti da soli generatori di tensione e resistori connessi fra di loro, al fine di derivare dei metodi generali per la loro *risoluzione*, ovvero per il calcolo dell'intensità delle correnti che fluiscono nei vari tratti di un circuito e delle differenze di potenziali fra vari punti di esso. Parliamo di *corrente continua* perché per il momento ci concentreremo al caso *stazionario*, ovvero considerando tensioni e correnti indipendenti dal tempo, trascurando quindi quanto succede negli istanti successivi all'accensione.

2.1 Punto della situazione

La figura 2.1 riassume quanto abbiamo appreso nel capitolo precedente. Una batteria da 12 Volt nominali, ad esempio quella delle auto o dei motorini, è collegata ad un 'carico'. Con un voltmetro misuriamo la tensione (ovvero la "differenza di potenziale") ai suoi capi e con un amperometro misuriamo la corrente che scorre attraverso di esso. Le frecce mostrano il verso di percorrenza della corrente convenzionale positiva, la quale, per essere misurata, *deve* attraversare anche l'amperometro. I valori mostrati dagli strumenti sono 12.3 V e 5.35 A. La potenza dissipata dal carico, pari a prodotto di corrente per differenza di potenziale, vale quindi 65.8 W e di conseguenza il carico si scalda, dissipando quindi energia sotto forma di calore, come visualizzato in figura. La differenza fra i 12.3 V misurati e i 12 V nominali non soltanto sta a ricordare che tutte le misure sono soggette a possibili errori ma, e soprattutto, vuole sottolineare come i valori 'nominali' (ad esempio "batteria da 12 V") sono puramente indicativi.

La configurazione di misura di Fig. 2.1 evidenzia chiaramente due importanti aspetti pratici nella *misura simultanea di tensioni e correnti*:

- il voltmetro misura correttamente la tensione ai capi del carico, la quale potrebbe però differire dalla forza elettromotrice del generatore di tensione se la differenza di potenziale fra gli ingressi dell'amperometro non è trascurabile rispetto a quella ai capi del carico;

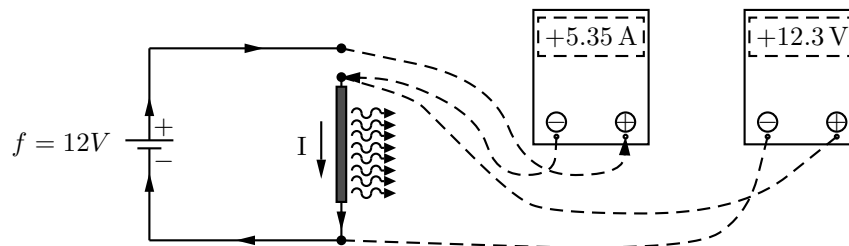


Figura 2.1: Circuito elementare, con applicati voltmetro e amperometro per misurare differenza di potenziale e corrente sul carico.

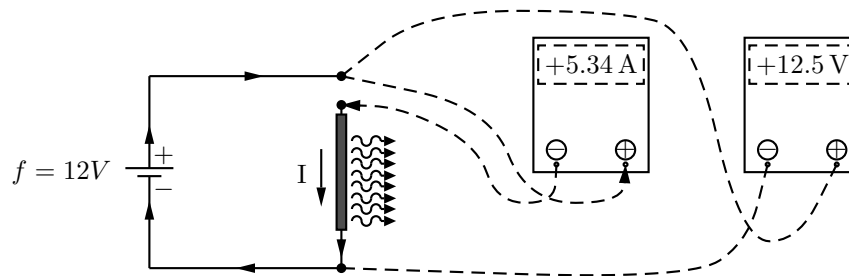


Figura 2.2: Variante della configurazione di figura 2.1 (vedi testo).

- a sua volta, l'amperometro misura 'correttamente' l'intensità di corrente che attraversa il carico soltanto se la corrente che attraversa il voltmetro è trascurabile.

Vedremo nel seguito come gli strumenti di misure elettriche perturbano le misure, ma per ora valeva la pena di segnalare cosa si può imparare, anche se a livello qualitativo, dalla sola osservazione della configurazione sperimentale. Un'altra possibile disposizione degli strumenti, al fine di una misura simultanea di tensione e corrente è quella di figura 2.2. In essa è la corrente che fluisce nel carico ad essere esattamente la stessa che scorre nell'amperometro, mentre il voltmetro misura la tensione del generatore, la quale, come detto, potrebbe differire da quella ai capi del carico. Si noti come nella figura sono stati cambiati i valori letti sui due strumenti, al fine di far notare come nella seconda disposizione ci aspettiamo che la tensione misurata tenda ad aumentare, mentre la corrente a diminuire. Vedremo nel seguito come affrontare quantitativamente questo tipo di problemi.

2.2 Rapporto tensione corrente: legge di Ohm

Un altro fatto empirico, sul quale è basata una delle leggi più importanti dei circuiti elettrici, è che, a parità di carico la *corrente è proporzionale alla differenza di potenziale* applicata. Inoltre il fattore di proporzionalità dipende dal tipo di materiale di cui è composto, dalla sua forma e in genera anche dalla temperatura. In particolare, ci sono materiali che offrono un grande impedimento al passaggio di corrente e sono in prima approssimazione *isolanti*. Ce ne sono altri, ottimi *conduttori*, per i quali una piccola differenza di poten-

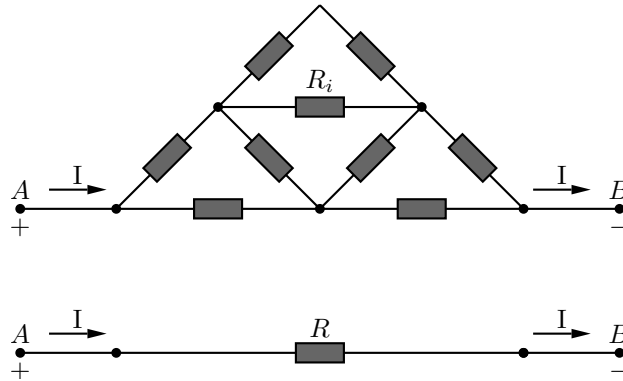


Figura 2.3: La resistenza per andare dal punto A al punto B (“resistenza vista fra A e B ”) è pari al rapporto fra $V_A - V_B$ e l’intensità di corrente che scorre da A a B , indipendentemente da cosa ci sia fra tali punti. Nei casi, come quello raffigurato in figura, in cui all’interno ci sono elementi discreti, ciascuno caratterizzato da una propria resistenza R_i , la resistenza R fra A e B è detta *resistenza equivalente*.

ziale produce una grande intensità di corrente. La caratteristica fisica legata all’impedimento al passaggio di corrente si chiama per ovvi motivi *resistenza (elettrica)* ed è indicata con R . Quindi la suddetta legge empirica, nota come *legge di Ohm*, dice che l’intensità di corrente è proporzionale alla differenza di potenziale applicata e inversamente proporzionale alla resistenza. Ricordando inoltre che la corrente (convenzionale positiva) va dal potenziale maggiore a quello minore, possiamo scrivere

$$I_{A \rightarrow B} = \frac{V_A - V_B}{R_{A \leftrightarrow B}}, \quad (2.1)$$

ovverossia la grandezza fisica *resistenza fra i punti A e B* , ‘qualunque cosa’ ci sia fra A e B , con esclusione di generatori, è pari al rapporto fra la tensione fra A e B e la tensione che scorre da un punto all’altro:

$$R_{A \leftrightarrow B} = \frac{V_A - V_B}{I_{A \rightarrow B}}, \quad (2.2)$$

come mostrato in figura 2.3. Abbiamo indicato la resistenza con il simbolo $R_{A \leftrightarrow B}$ per ricordare che, almeno nei ‘normali’ materiali¹ essa non dipende dal verso della corrente: se scambiamo la polarità della tensione, si inverte il verso della corrente ma l’intensità non cambia, come mostrato in figura 2.4 la quale mostra chiaramente il significato di ‘linearità’ dei cosiddetti ‘comportamenti ohmici’. (In particolare, anche se l’osservazione potrà sembrare banale, tutte le rette hanno pendenza positiva in quanto la resistenza elettrica è una grandezza positiva.)

L’unità di misura della resistenza nel Sistema Internazionale è l’Ohm, simbolo Ω , corrispondente alla resistenza che fa passare un Ampère se si applica la differenza di potenziale di un Volt. Quindi, nell’esempio di Fig. 2.1 la resistenza del carico valeva 2.30Ω .

¹Notevoli eccezioni sono i cosiddetti *semiconduttori*, sui quali si basa tutta la moderna elettronica. Il più semplice caso di essi verrà trattato, seppur da un punto di vista prettamente modellistico, nel capitolo 9.

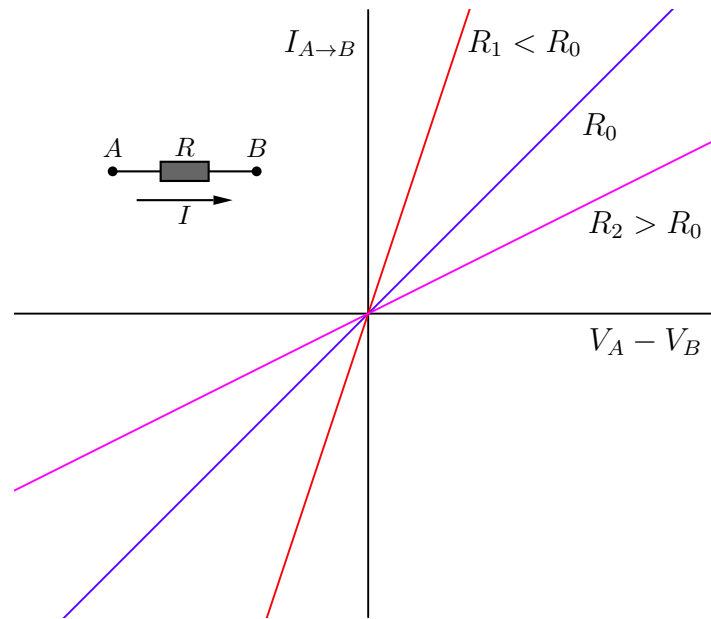


Figura 2.4: Relazione fra tensione e corrente descritta dalla Legge di Ohm.

Un'altra legge empirica (*seconda legge di Ohm*) dice che conduttori cilindrici (ovvero 'filiformi') hanno una resistenza proporzionale alla loro lunghezza e inversamente proporzionale alla loro sezione. Il coefficiente di proporzionalità, caratteristico per ogni materiale ed in genere dipendente dalla temperatura, è chiamato *resistività* ed è indicato con il simbolo ρ :

$$R = \rho \frac{l}{A}. \quad (2.3)$$

La resistività è espressa in $\Omega \cdot m$, come si evince dalla relazione che la definisce. Ad esempio, il rame, metallo comunemente usato nelle connessioni elettriche, ha una resistività di circa $2 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$. [Tabella con esempi]

2.2.1 Flussi e gradienti

(decidere cosa farne)

$$\frac{dQ}{dt} = G \cdot (V_A - V_B) \quad (2.4)$$

$$\frac{dQ}{dt} = k \cdot (T_A - T_B) \quad (2.5)$$

$$\frac{dV}{dt} = k \cdot (P_A - P_B) \quad (2.6)$$

$$\dots \quad (2.7)$$

2.2.2 Conducibilità e conduttività

dire qualcosa per completezza

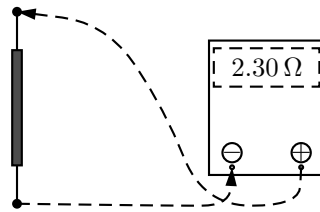


Figura 2.5: Misura di una resistenza mediante la funzione ‘ohmetro’ di un multimetro digitale. Si noti come l’oggetto del quale si vuole misurare la resistenza non sia connesso in un circuito (vedi testo). Si noti inoltre come, nonostante i cavi del multimetro siano collegati agli ingressi designati con + e –, comune alle misure di tensione e corrente, la polarità dei puntali è in questo caso irrilevante (e per questo motivo non sono stati riportati nella figura i simboli dei colori dei cavi) in quanto la resistenza non dipende dal verso di percorrenza (definizione di comportamento ‘ohmico’!)

2.3 Effetto Joule



2.4 Resistenze in serie e resistenze in parallelo – prime considerazioni

La proporzionalità diretta della resistenza dalla lunghezza espressa dalla (2.3) ci insegna che un conduttore cilindrico di lunghezza l e resistenza R , può essere visto come una *serie* di tanti conduttori, ciascuno di lunghezza l_i , con $\sum_i l_i = l$. Avendo ciascuno di essi una resistenza proporzionale a l_i , otteniamo che deve valere, almeno in questo caso, che $R_s = \sum_i R_i$, avendo indicato con R_s la resistenza equivalente della serie.

Un’altra semplice osservazione è che se la resistenza dipende da $1/A$ vuol dire le cariche devono scorrere sull’intera sezione e non, ad esempio sulla sola superficie del filo (altrimenti la resistenza sarebbe inversamente proporzionale alla circonferenza e quindi al raggio). Questa osservazione ci permette di immaginare un qualsiasi conduttore di sezione costante A come tanti conduttori affiancati, ovvero in *parallelo*, con $\sum_i A_i = A$. Possiamo riscrivere quindi la (2.3) come $R_p = \rho l / (\sum_i A_i)$, da cui $R_p^{-1} = \sum_i A_i / (\rho l) = \sum_i R_i^{-1}$, ove R_p sta ad indicare la resistenza del parallelo. In questo caso si sommano i reciproci.

2.5 Misure di resistenza

Un altro strumento del quale per ora accettiamo e apprezziamo l’esistenza è l’*ohmetro*, che, come si evince dal nome, serve a misurare le resistenze. In pratica l’ohmetro è una delle tipiche funzioni di un multimetro. La figura 2.5 lo vede applicato nella misura della resistenza del carico di Fig. 2.1. Si noti come l’oggetto di cui si vuole misurare la resistenza deve essere disconnesso dal circuito. Infatti il principio di misura è basato proprio sulla legge di Ohm. Lo strumento applica una tensione, misura la corrente risultante (le frecce dei cavi di Fig. 2.5 mostrano il verso di tale corrente) e ricava R dal rapporto tensione corrente. Se l’oggetto è connesso (con entrambi gli estremi) al circuito

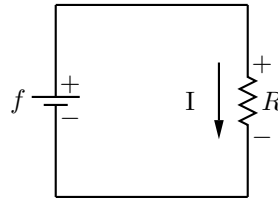


Figura 2.6: Circuito elementare con un solo generatore di tensione e un solo resistore, il quale può eventualmente rappresentare la resistenza equivalente di una configurazione ben più complicata, non necessariamente di ‘resistori’ commerciali ma di qualsiasi cosa attraverso cui le cariche possano scorrere. Chiaramente la differenza di potenziale ai capi di R è pari a f , con la polarità indicata nella figura.

la misura è chiaramente falsata² e addirittura il multimetro potrebbe venire danneggiato nel caso in cui il circuito contenga dei generatori. (Il caso di un solo estremo connesso non è un problema in quanto la corrente prodotta dal multimetro non circola nel resto del circuito e, viceversa, il multimetro non risente di eventuali generatori del circuito.) Si noti inoltre come la difficoltà di misurare i valori di resistenza dei *resistori* saldati nei circuiti è uno dei motivi della loro identificazione a vista mediante un opportuno codice colori.³ Precisiamo inoltre che mentre la resistenza è una grandezza fisica che quantifica l'*impedimento al passaggio di corrente* da un punto all'altro, e quindi possiamo parlare di resistenza fra le punta del naso e punta dell'alluce di una persona, per *resistori* si intendono dei dispositivi commerciali aventi dei valori nominali di resistenza, anche se poi in pratica si usa il termine ‘resistenza’ anche per indicare i resistori. (Lo stesso termine è anche usato per indicare un generico conduttore dotato di ‘resistenza’ elettrica.)

2.6 Circuiti con generatori e resistori posti in serie

A questo punto possiamo cominciare a risolvere semplici problemini, limitandoci a circuiti che formano un solo anello chiuso. Il più elementare di questi è quello riportato in figura 2.6, nel quale cominciamo ad usare il simbolo grafico più comune per le resistenze nei circuiti.

2.6.1 Resistenze in serie e partitore di tensione

Il circuito di figura 2.7 è già più interessante, avendo n resistenze connesse in *serie*, ovvero *attraversate dalla stessa corrente* (il concetto di ‘serie’ è fisico

²Un classico errore è quello di misurare grandi resistenze (al di sopra di centinaia di k Ω) tenendo con le mani i puntali dell'ohmetro: la corrente che attraversa il corpo può infatti essere di intensità confrontabile o addirittura maggiore di quella che attraversa l'oggetto da misurare e la misura può essere completamente distorta.

³Sulle resistenze dei resistori: siccome questo non è un corso per elettrotecnici e visto che il numero di resistori che useremo durante le esercitazioni sarà veramente esiguo è inutile distrarsi a memorizzare il codice dei colori. Comunque, chi è interessato può consultare un sito web, ad esempio <http://it.wikipedia.org/wiki/Resistore>, o cercare qualche programmino in rete (gli utenti di Linux possono usare il pacchetto *gResistor*) o qualche ‘app’ per smathphone.

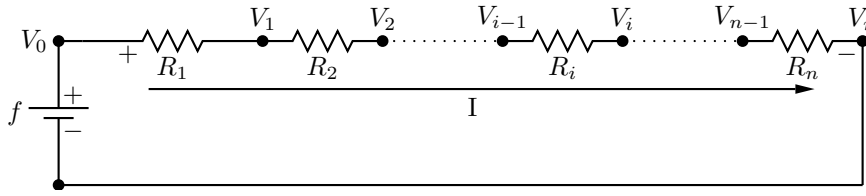


Figura 2.7: Circuito elementare un solo generatore di tensione a cui sono connesse resistenze in serie.

e non grafico!). Abbiamo visto precedentemente un argomento che ci porta a dire che più resistenze in serie sono equivalenti ad una sola resistenza, ma, siccome era legato ad oggetti filiformi omogenei, affrontiamo nuovamente l'argomento in modo del tutto generale. Ricordiamoci che la somma di variazioni di potenziale su un ciclo deve essere nulla⁴, ovvero

$$\sum_i \Delta V_i = 0. \quad (2.8)$$

(Gli estremi delle sommatorie non vengono indicati in questo testo se si evincono dal contesto.) Nel nostro caso, partendo dal polo negativo del generatore e percorrendo il circuito in senso orario,⁵ nel verso della corrente indicato in figura, abbiamo

$$f + (V_1 - V_0) + (V_2 - V_1) + \dots + (V_n - V_{n-1}) = 0, \quad (2.9)$$

in quanto $\Delta V_i = V_i - V_{i-1}$ (si ricorda che i “ $\Delta \dots$ ” sono sempre, detto alla buona, “il dopo meno il prima”). Usando la legge di Ohm e tenendo conto del verso della corrente, abbiamo per ogni resistenza

$$\Delta V_i = V_i - V_{i-1} = -(V_{i-1} - V_i) = -R_i I : \quad (2.10)$$

percorrendo il circuito nel verso positivo della corrente troviamo che ogni resistore provoca *caduta di potenziale*, proporzionale al valore della sua resistenza e a quella dell'intensità di corrente, come rappresentato, con una analogia gravitazionale, in figura 2.8. Se si analizzasse il circuito nel verso opposto a quello di scorrimento della corrente ovviamente si avrebbero degli aumenti di potenziale in quanto si sta ‘risalendo il flusso di corrente’.⁶ Facendo uso della (2.10), la (2.9) diventa quindi

$$f - I \cdot R_1 - I \cdot R_2 - \dots - I \cdot R_n = 0, \quad (2.11)$$

⁴L'analogia gravitazionale aiuta: si pensi ad una passeggiata in montagna. Nell'approssimazione di g costante, le variazioni di potenziale gravitazionale per ogni tappa valgono $\Delta V_{G_i} = g \Delta h_i$ e quando si torna a casa la sera la somma algebrica $\sum_i \Delta V_{G_i}$ deve dare zero, indipendentemente dal percorso. (L'ipotesi di g costante non è essenziale e serve solo a riscrivere le variazioni di potenziale come $g \Delta h_i$, mentre il fatto che la somma dei potenziali su un ciclo si annulli deriva direttamente dal fatto che il campo gravitazionale è conservativo.)

⁵Se il verso di percorrenza fosse stato antiorario avremmo avuto

$$(V_{n-1} - V_n) + \dots + (V_1 - V_2) + (V_0 - V_1) - f = 0$$

e il risultato non cambia.

⁶Per visualizzare queste osservazioni si può pensare ad un ruscello: se si segue il flusso dell'acqua si scende verso potenziali inferiori; se invece si risale la corrente si sale verso potenziali maggiori.

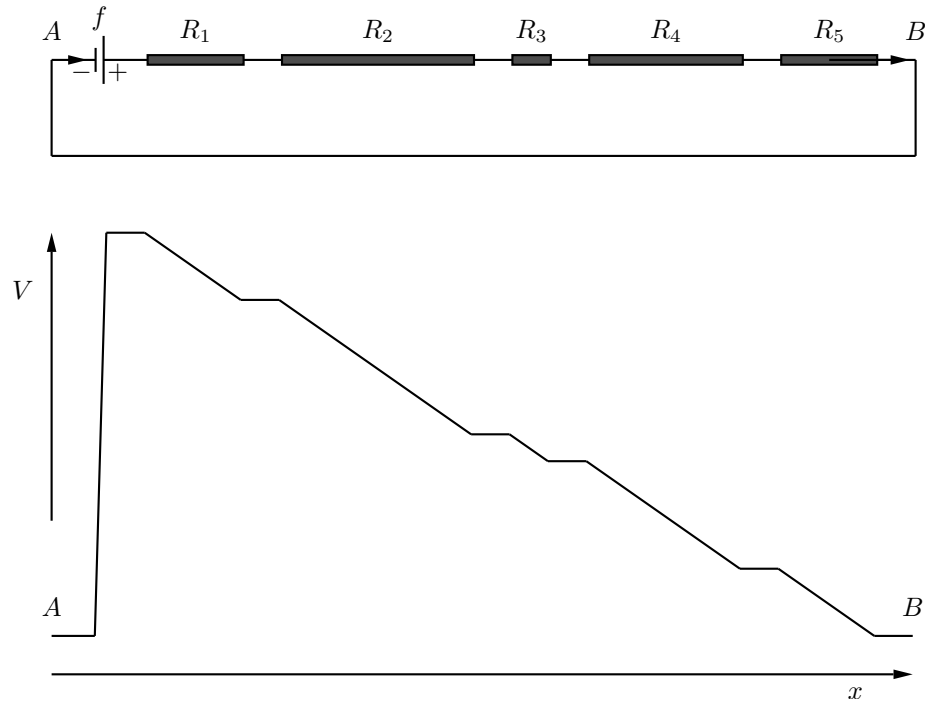


Figura 2.8: Rappresentazione grafica di cadute di potenziale, con i resistori rappresentati come cilindri di pari diametro e quindi aventi resistenza proporzionale alla propria lunghezza.

ovvero

$$f - I \cdot \sum_i R_i = 0, \quad (2.12)$$

dalla quale otteniamo alcuni importanti risultati.

1. Innanzitutto,

$$I = \frac{f}{\sum_i R_i}, \quad (2.13)$$

la quale ci fornisce l'intensità di corrente che scorre nel circuito.

2. In secondo luogo, dalla (2.9) otteniamo banalmente $f + (V_n - V_0) = 0$, ovvero $(V_0 - V_n) = f$. Il rapporto tensione corrente che definisce la resistenza fra 0 e n vale quindi, facendo uso della (2.13),

$$R_{0 \leftrightarrow n} (\equiv R_s) = \frac{V_0 - V_n}{I} = \frac{f}{I} = \sum_i R_i. \quad (2.14)$$

Otteniamo che la resistenza fra il punto 0 e il punto n , ovvero la *resistenza equivalente di una serie*, è pari alla somma delle resistenze.

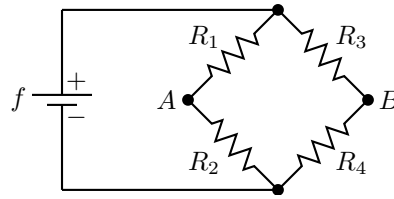


Figura 2.9: Ponte di Wheathstone: trovare la relazione fra le quattro resistenze affinché esso sia ‘bilanciato’, ovvero i punti A e B siano allo stesso potenziale

3. Infine, applicando la legge di Ohm ai capi di ciascun resistore, nota la corrente, abbiamo

$$V_{i-1} - V_i = R_i I = \frac{R_i}{\sum_i R_i} f : \quad (2.15)$$

la tensione ai capi di una serie di resistori si *ripartisce* fra i vari resistori in modo proporzionale alla resistenza di ciascuno di essi, ovvero

$$|\Delta V_i| \propto R_i. \quad (2.16)$$

Anche se è molto semplice, il concetto di *partitore* è uno dei più importanti del corso. Fra l’altro ci dà un’idea dei limiti di validità dell’approssimazione dei fili di collegamento come superfici equipotenziali. Essi hanno infatti resistenze molto inferiori dei quelle dei resistori tipicamente usati nei circuiti e quindi la differenza di potenziale ai loro capi è sostanzialmente nulla. Se per esempio consideriamo un filo di rame di 50 cm e sezione di 1 mm^2 , otteniamo una resistenza di un centesimo di Ohm, trascurabile per i normali circuiti, ma che può non esserlo nel caso di grossi trasferimenti di potenza, come discusso nell’esempio del prossimo paragrafo.⁷

2.6.2 Un’applicazione: ponte di Wheathstone bilanciato

Come esempio del partitore, analizziamo la configurazione detta ‘a *ponte di Wheathstone*’ raffigurata nel circuito di figura 2.9. Ci domandiamo quale deve essere la relazione fra le resistenze affinché esso risulti *bilanciato*, ovvero i punti A e B si trovino allo stesso potenziale e quindi, se venisse posto fra di essi un amperometro, non si osserverebbe scorrimento di corrente. La parola magica ‘partitore’ fornisce al volo la soluzione. Infatti il circuito può essere visto come due partitori di tensione con gli estremi in comune e quindi la condizione richiesta si riflette in pari rapporti delle resistenze a destra e a sinistra, ovvero

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}, \quad (2.17)$$

⁷Il motivo è semplice: grossi trasferimenti di potenza implicano carichi di resistenza piccolissima, la quale può diventare quindi confrontabile con quella dei cavi.

che può essere anche espressa come prodotto delle ‘resistenze opposte’, ovvero $R_1 \times R_4 = R_2 \times R_3$ (anche se è preferibile memorizzare l’uguaglianza dei rapporti in quanto discende immediatamente dal concetto di partitore).

Va da se che la configurazione a ponte di Wheathstone può essere usata per misurare una resistenza incognita se si dispone di due resistenze note e una resistenza variabile (ovviamente dai valori ben accurati).

2.7 Partizione dovuta ai cavi di alimentazione

2.7.1 Un esempio

Immaginiamo di avere una stufetta elettrica che idealmente emanerebbe 1000 W di calore se collegata ad una batteria da 12 V (vedi circuito a sinistra di figura 2.10). Ci si chiede cosa cambia se si tiene conto dell’effetto di cavi di alimentazione non ‘ideali’, ad esempio ciascuno lungo 2 m e diametro 2 mm e resistività $2 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ (rame). La nuova situazione è riportata nel circuito di destra della stessa figura, con i simboli di resistenza minuscoli per ricordare che si tratta di valori piccoli.

Otteniamo che ciascun filo ha una resistenza pari a $r = 11 \text{ m}\Omega$. Valutiamo quindi R dalle ipotesi del problema e dalla formula dell’effetto Joule. Dalla (1.46) otteniamo nel caso ideale ($r = 0$) una corrente di 83.3 A che, essendo causata da 12 V, dà una resistenza di 144 m Ω .

[Approfittiamo, per inciso, per riscrivere, facendo uso della relazione fra tensione e corrente data dalla legge di Ohm, la (1.46) in altri 2 utili modi:

$$P_J = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad (2.18)$$

$$= R I^2 .] \quad (2.19)$$

Tenendo conto del valore finito dei cavi otteniamo invece

$$I_r = \frac{f}{R + 2r} = 72.3 \text{ A} \quad (2.20)$$

e quindi la batteria erogherà una potenza di soli 867 W. Dalla formula del partitore otteniamo che la differenza di potenziale ai capi della resistenza, causata dalle cadute di tensione lungo i cavi, sarà di 10.4 V e quindi la stufetta scaldierà di meno (753 W). Ne segue che i restanti 114 W devono essere dissipati dai cavi, come si può verificare direttamente calcolando $2 \times r I_r^2$.

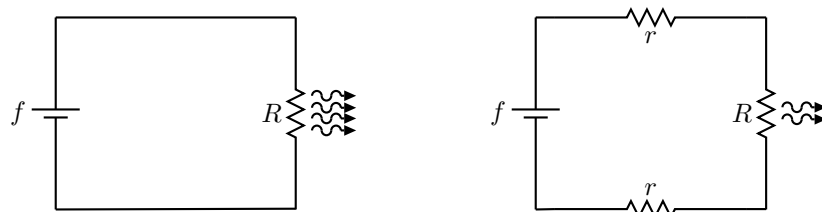


Figura 2.10: Carico resistivo, collegato al generatore da cavi non ideali.

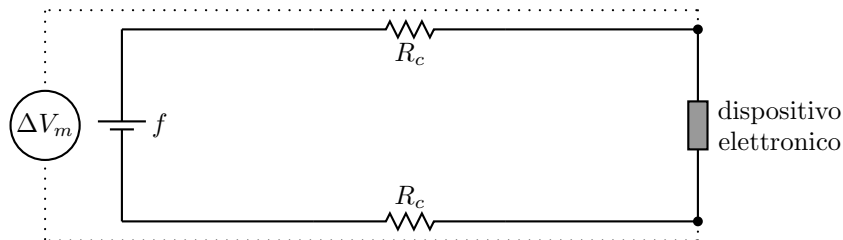


Figura 2.11: Monitor della tensione effettivamente ai capi dell'apparato da alimentare, in quanto $\Delta V_m < f$, dipendente dall'effettivo assorbimento di corrente del dispositivo.

2.7.2 Alcune note sulle applicazioni

L'esercizio appena visto è abbastanza istruttivo per alcuni aspetti pratici di una certa importanza sia in laboratorio che nelle applicazioni domestiche e industriali. Innanzitutto impariamo che i cavi vanno opportunamente dimensionati, tenendo conto delle correnti (tipiche e massime) che li dovranno percorrere. Altrimenti essi si scaldano e, oltre all'ovvio spreco di energia elettrica, possono provocare incidenti se non opportunamente raffreddati. Inoltre le cadute di tensione sui cavi possono far sì che sul carico arrivi una tensione ben inferiore di quella dell'alimentatore. Nel caso della stufetta visto nel paragrafo precedente questo si ripercuote su una minore potenza erogata. Ma la situazione può peggiorare quando il dispositivo alimentato richiede una tensione minima per funzionare. Facciamo qui alcuni esempi

Monitor di tensione sui dispositivi elettronici

A volte può capitare, soprattutto in esperimenti di grandi dimensioni, che i dispositivi elettronici possano essere relativamente molto distanti dagli 'alimentatori' (ovvero dai generatori di tensione). Se tali dispositivi lavorano a bassa tensione (ad esempio le schede di elettronica) le correnti in gioco possono essere elevate. È importante allora sia dimensionare opportunamente i cavi che monitorare la tensione che arriva sulle schede, la quale può differire anche di qualche Volt da quella dell'alimentatore ed inoltre può cambiare se la corrente cambia. Per ovviare a questo secondo problema si può prelevare la tensione che arriva sul dispositivo mediante altri cavi (linee tratteggiate in figura 2.11) nei quali 'virtualmente' non passa corrente (questo è il comportamento di un voltmetro ideale o virtualmente tale) e quindi non provocano caduta di tensione. Ne segue che ΔV_m misurata sul monitor è con grande approssimazione pari all'effettiva tensione di alimentazione che arriva sul dispositivo.

Storielle di cavi 'scadenti'

Sarà capitato a molti l'esperienza, diretta o indiretta, di dover far partire un'auto con la batteria scarica usando la batteria di un'altra auto mediante opportuni cavi di connessione. In questi casi la qualità dei cavi può essere cruciale.

Una volta che non riuscivo a far partire un'auto con degli appositi cavetti acquistati in un centro commerciale, chiesi aiuto ad un elettrauto che fortunatamente aveva l'officina poco distante da dove stazionava la macchina con la batteria scarica. Gli dissi subito che avevo già provato con dei cavetti, al che lui mi chiese dove li avevo presi. Sentendo dove li avevo acquistati mi guardò con aria di sufficienza. "Riportaglieli", disse e mi prestò i 'cavetti' suoi, dall'aspetto più professionale e decisamente più pesanti. L'auto ripartì al primo colpo.

Dopo anni mi trovai invece a dover aiutare un ragazzo in un simile problema il quale aveva fortunatamente in macchina dei cavetti, anche in quel caso di tipo economico con i quali non era possibile mettere in funzione il motorino di avviamento. Chiedemmo in giro altri cavetti e ne ottenemmo un altro paio, ma nemmeno questi andava bene. Risolvemmo il problema utilizzando entrambe le coppie, mettendole opportunamente in parallelo.

Infine, mi è capitato di assistere ad un tentativo di far partire una macchina con la batteria scarica usando due coppie di cavetti poste in serie (a causa di altre macchine parcheggiate c'erano dei problemi ad avvicinare l'auto di soccorso a quella in panne). Dal rumore che si sentiva sembrava abbastanza chiaro che, a causa della lunghezza (e qualità) dei cavi, la tensione che arrivava non era sufficiente ad attivare il motorino di avviamento. Provai a far notare che in quel modo non sarebbero riusciti a far partire la macchina, ma ricevetti un'occhiataccia da parte della persona apparentemente 'esperta' e proseguii.⁸

Perché l'energia elettrica viene trasportata ad alta tensione?

È ben noto il fatto che l'energia elettrica venga trasportata su grandi distanze mediante linee ad alta tensione (centinaia di migliaia di Volt). Anche se si tratta di corrente alternata, cerchiamo di capire il motivo della scelta modellizzando il problema come se si trattasse di corrente continua (vedremo a tempo debito che la sostanza non cambia). Insomma, è come se la centrale elettrica fosse una 'grande batteria' di forza elettromotrice f , il cui valore può essere scelto a piacere (assumiamo l'esistenza di opportuni *trasformatori*). Data la potenza P_0 da trasportare da una centrale ad una città, possiamo quindi scegliere un qualsiasi prodotto $f \times I$, ma essendo R_c la resistenza dei due cavi, la potenza da essi dissipata sarà $R_c I^2$. Conviene quindi diminuire I aumentando f . Si potrebbe anche tentare di diminuire R_c aumentando la sezione dei cavi, almeno fino ad un certo punto, oltre il quale i costi diventano proibitivi. Infatti essendo $P_c = (4 \rho l / \pi d^2) \cdot I^2$, con d il diametro del cavo, ovvero $P_c = (4 \rho l / \pi d^2) P_0^2 / f^2 \propto P_0 l / (d^2 \times f^2)$: usare, al posto dell'usuale alta tensione la tensione casalinga (240 V), richiederebbe cavi di diametro un mi-

⁸La storia continua. Ecco un mail ricevuto nel novembre 2014 da un ex studente del corso: "Le scrivo per ringraziarla dell'aneddoto da lei raccontato a lezione ormai tre anni accademici fa! Questa mattina ho dovuto raggiungere mio fratello a cui si era fermata la macchina per colpa della batteria. Dopo vari tentativi, del tutto fallimentari, in cui la macchina stentava ad accendersi ed emetteva rumori preoccupanti, mi sono ricordato del suo racconto a proposito di cavi scadenti: abbiamo rimediato un altro paio di cavi e, una volta messi in parallelo, la macchina è partita al primo tentativo! La ringrazio quindi per l'aneddoto che mi ha fatto risolvere la situazione e che ci ha fatto risparmiare 50 euro di carro attrezzi!"

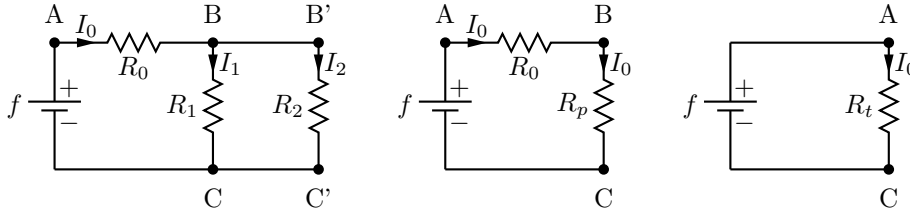


Figura 2.12: Semplice circuito (a sinistra) facilmente risolvibile mediante la riduzione in cascata a resistenze equivalenti. Per la soluzione numerica usiamo i seguenti valori: $f = 12 \text{ V}$; $R_0 = 10 \Omega$, $R_1 = 50 \Omega$ e $R_2 = 15 \Omega$.

gliaio di volte (!) maggiore di quelli che si usano normalmente nelle linee ad alta tensione e la cosa è chiaramente infattibile.

Tornando ad applicazioni ‘consumer’, per lo stesso motivo i cavi elettrici all’interno delle macchine sono di sezione molto maggiore di quelli dell’impianto elettrico domestico e, anche in questo caso, i cavi di alimentazione dei faretto alogeni (che lavorano a 12 V) devono avere sezioni maggiori di quelli delle comuni lampadine.

2.8 Circuiti con maglie e nodi

Per ora ci siamo limitati a semplici circuiti con generatori e resistenze posti in serie. Come abbiamo visto, date le ipotesi di stazionarietà, la corrente era, istante per istante, la stessa in tutti gli elementi del circuito. Questo non è più vero se nel circuito appaiono dei *nodi*, ovvero ‘punti’ di diramazione della corrente elettrica. [precisazione sul concetto di nodo come ‘superficie equipotenziale’]

2.8.1 Circuiti risolvibili con riduzioni a serie e parallelo

Cominciamo con l’esempio di figura 2.12, il quale mostra due nodi nei punti B e C . È abbastanza chiaro che la corrente I_0 erogata dal generatore e che attraversa la resistenza R_0 si suddivide in B nelle correnti I_1 e I_2 , che attraversano rispettivamente le resistenze R_1 e R_2 . Deve quindi valere

$$I_0 = I_1 + I_2, \quad (2.21)$$

semplicemente perché altrimenti ci sarebbe creazione o distruzione di carica in tale punto. Le due correnti riconfluiscono in C .

‘Risolvere’ il circuito significa trovare le tre correnti I_0 , I_1 e I_2 . La conservazione della carica elettrica ci fornisce già l’equazione (2.21). Le altre due equazioni ci possono essere fornite da opportune considerazioni sui potenziali, in analogia con quanto fatto nei casi di circuiti ad un solo anello. È infatti chiaro che ogni anello chiuso ci fornisce delle relazioni fra le correnti legate alle resistenze ed, eventualmente, alle forze elettromotrici. Nell’esempio in

questione otteniamo le seguenti equazioni

$$A-B-C-A \Rightarrow f - I_0 \cdot R_0 - I_1 \cdot R_1 = 0 \quad (2.22)$$

$$A-B-B'-C'-C-A \Rightarrow f - I_0 \cdot R_0 - I_2 \cdot R_2 = 0 \quad (2.23)$$

$$C-B-B'-C'-C \Rightarrow I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 = 0 \quad (2.24)$$

chiaramente fra di loro non indipendenti. Due di queste, unite alla (2.21), ci permettono di risolvere il circuito.

Resistenze in parallelo e partitore di corrente

Invece di buttarci a capofitto sull'algebra, analizziamo un momento la (2.24). Essa ci dice che in un parallelo di due resistenze *la corrente che passa attraverso ciascun resistore è inversamente proporzionale alla sua resistenza*, in formule

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.25)$$

Conoscendo che la somma di I_1 e I_2 deve dare I_0 , otteniamo quindi⁹

$$I_1 = I_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.26)$$

$$I_2 = I_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad (2.27)$$

che possiamo riscrivere come

$$I_1 = I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_1} = I_1 \frac{R^*}{R_1} \quad (2.28)$$

$$I_2 = I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_2} = I_0 \frac{R^*}{R_2}, \quad (2.29)$$

ove R^* , pari a $R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$, è senz'altro una resistenza, di cui bisogna ancora interpretare il significato fisico.

Per capire il significato di R^* riscriviamoci la somma delle correnti $I_1 + I_2$ facendo uso della legge di Ohm e notando, che essendo R_1 e R_2 resistenze

⁹Ci permettiamo di ricordare che da $a : b = c : d$ segue $a : (a + b) = c : (c + d)$. Applicando questa proprietà delle proporzioni alla (2.25) si ottiene

$$\frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

ovvero, essendo $I_1 + I_2$ pari a I_0 ,

$$\frac{I_1}{I_1 + I_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

da cui segue la (2.26) e per analogia la (2.27).

(Questa nota di matematica elementare è dovuta al fatto che gli studenti sembrano aver ignorato le proprietà delle proporzioni e affrontano il problema in modo meccanico, e con più passaggi, facendo uso dei metodi di risoluzione di equazioni.)

parallelo, esse hanno ai loro capi la stessa differenza di potenziale:

$$I_0 = I_1 + I_2 = \frac{V_B - V_C}{R_1} + \frac{V_B - V_C}{R_2} = (V_B - V_C) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.30)$$

Ne segue che la resistenza equivalente fra B e C (*resistenza del parallelo*, che indicheremo con R_p), che per definizione è il rapporto fra la tensione fra i due punti diviso la corrente totale che va da un punto all'altro, vale

$$R_p = \frac{V_B - V_C}{I_1 + I_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}, \quad (2.31)$$

ovvero

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} : \quad (2.32)$$

nei paralleli si sommano i reciproci e quindi R_p è inferiore alla resistenza individuale minima. In particolare, riconosciamo in R^* delle (2.28) e (2.28) R_p .¹⁰

Pensando di porre fra punti B e C del circuito n resistenze in parallelo (vedi figura 2.13) e ripetendo il ragionamento appena fatto, otteniamo la formula generale:

$$\frac{1}{R_p} = \sum_i \frac{1}{R_i}. \quad (2.33)$$

Questa relazione può anche essere ricavata mediante il ragionamento che segue, per il quale si fa riferimento alla figura 2.13. La corrente I_0 si dirama nel nodo A in n correnti I_i , tali che $\sum_{i=1}^n I_i = I_0$, le quali si ricombinano nel nodo B . La resistenza fra i punti A e B è per definizione

$$R_p \equiv R_{A \leftrightarrow B} = \frac{V_A - V_B}{I_{A \rightarrow B}} \quad (2.34)$$

$$= \frac{V_A - V_B}{\sum I_i}, \quad (2.35)$$

¹⁰Per due resistenze abbiamo quindi

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

che possiamo riscrivere come

$$R_p = R_1 \times \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

ovvero anche $R_2 \times R_1 / (R_1 + R_2)$ che evidenzia come, in generale, $R_p < R_i$. In particolare, se nel caso di una resistenza 'piccola' r , in parallelo a una resistenza grande R , otteniamo la formula approssimativa

$$R_p \approx r \times \left(1 - \frac{r}{R} \right).$$

Ad esempio se mettiamo 50Ω in parallelo a 10Ω , la resistenza del parallelo è circa pari a 10Ω diminuita di $1/5$, ovvero del 20%, ottenendo così, con semplici conti a mente il risultato approssimato di 8Ω , contro il valore più preciso di 8.3Ω .

Si raccomanda comunque caldamente di memorizzare la formula (2.33), valida per un numero qualsivoglia di resistori, in quanto sono capitati agli esami dei casi di studenti che calcolavano il parallelo fra n resistenze, con $n > 2$, come il loro prodotto diviso la loro somma, senza nemmeno porsi il problema della dimensionalità del risultato.

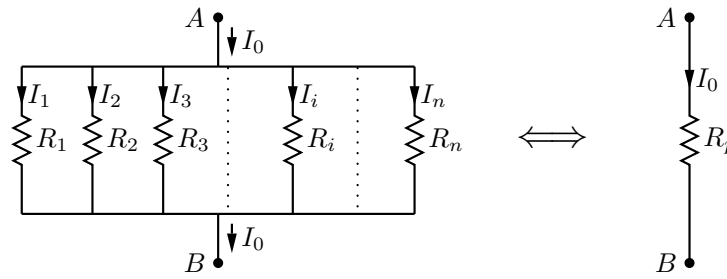


Figura 2.13: Resistenze in parallelo e resistenza equivalente.

da cui

$$\frac{1}{R_p} = \frac{\sum I_i}{V_A - V_B} \quad (2.36)$$

$$= \sum_i \frac{I_i}{V_A - V_B} \quad (2.37)$$

$$= \sum_i \frac{1}{R_i}, \quad (2.38)$$

essendo $R_i = (V_A - V_B)/I_i$. Per ricavarsi la formula generale del *partitore di corrente* è sufficiente calcolarsi la corrente individuale I_i e ricordarsi che la differenza di potenziale ai capi del parallelo è pari alla corrente totale che lo attraversa per la resistenza globale, ottenendo così:

$$I_i = \frac{V_A - V_B}{R_i} = I_0 \frac{R_p}{R_i}, \quad (2.39)$$

ovvero le (2.28) e (2.29) sono estendibili al caso generale. Inoltre, in analogia alla (2.16), possiamo riassumere la proprietà dei partitori di corrente in

$$I_i \propto \frac{1}{R_i}, \quad (2.40)$$

Per finire, consideriamo la (2.39) per valori limite di una resistenza i -ma. Nel limite di $R_i \rightarrow \infty$ l'intensità di corrente va chiaramente a zero (ricordiamo che resistenza infinita e tratto interrotto sono equivalenti). Il limite $R_i \rightarrow 0$ sorprende inizialmente ($I_i \rightarrow \infty?$), ma in realtà il rapporto R_p/R_i tende a 1, in quanto R_p tende a zero come R_i . A parte la semplice prova matematica, dal punto di vista fisico è sufficiente pensare al fatto che se una resistenza del parallelo è 'nulla' (ovvero in pratica 'infinitamente' inferiore alle altre in gioco), tale resistenza *by-passa* tutte le altre e l'intera corrente scorre soltanto attraverso di essa).

Soluzione numerica del circuito d'esempio

Come esempio di applicazione delle formule incontrate diamo la soluzione numerica del circuito di figura 2.12, seguendo lo schema di riduzioni indicato

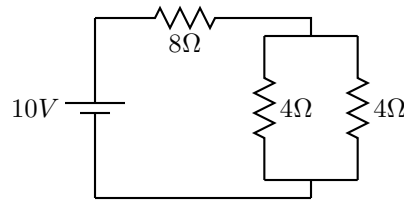


Figura 2.14: Al volo e a mente: quanto valgono tensioni e correnti in questo circuito?

nella figura stessa e usando successivamente la legge di Ohm per ricavarsi la tensione ai capi di R_0 e del parallelo:

$$\begin{aligned}
 R_p &= 11.54 \Omega \\
 R_t &= 21.45 \Omega \\
 I_0 &= 557 \text{ mA} \\
 I_1 &= 129 \text{ mA} \\
 I_3 &= 429 \text{ mA} \\
 V_A - V_B &= 5.57 \text{ V} \\
 V_B - V_C &= 6.43 \text{ V} .
 \end{aligned}$$

[Per esercizio si possono calcolare la potenza erogata dal generatore, le potenze dissipate dai vari resistori (e loro equivalenti) e verificare che il bilancio energetico torna.]

Un rapido test

Prima di andare avanti, provare a risolvere risolvere il circuito di figura 2.14, facendo i conti a mente e valutando le tensioni prima delle correnti.

Derivazione delle formule di combinazione in serie e parallelo da considerazione energetiche

Ricaviamoci ancora una volta le formule della resistenza equivalente di resistenze in serie e in parallelo, usando questa volta delle considerazioni legate all'effetto Joule. Immaginiamo delle resistenze in serie nelle quali – per definizione di serie – scorre la stessa corrente I . La potenza dissipata per effetto Joule da ciascuna di esse sarà $P_i = R_i I^2$ e quindi tutte insieme esse dissiperanno $P = \sum_i P_i = (\sum_i R_i) I^2$, ovvero come una sola resistenza $R_s = \sum_i R_i$.

Nel caso di resistenze in parallelo, essendo invece comune la differenza di potenziale ΔV ai loro capi, è conveniente esprimere la potenza individuale come $P_i = (\Delta V)^2 / R_i$, con potenza totale dissipata pari a

$$P_p = \sum_i P_i = \sum_i \frac{(\Delta V)^2}{R_i} = \left(\sum_i \frac{1}{R_i} \right) \cdot (\Delta V)^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R_p} ,$$

ovvero come una sola resistenza R_p tale che $1/R_p = \sum_i 1/R_i$.

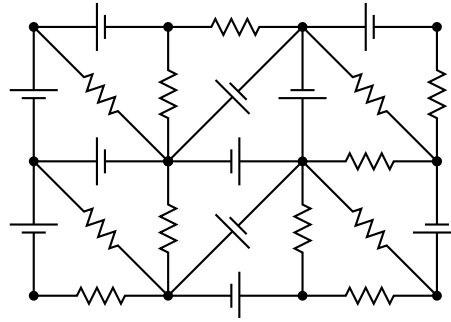


Figura 2.15: Un circuito con molti generatori e molte resistenze in una disposizione non banale. [label ai nodi?]

2.8.2 Leggi di Kirchhoff

La figura 2.15 mostra un circuito tutt'altro che semplice, con 11 generatori e 12 resistori configurati in un modo niente affatto banale. Non essendoci né serie (“resistori attraverso i quali scorre la stessa corrente”) né paralleli (“resistori aventi gli estremi allo stesso potenziale”) abbiamo tante correnti incognite quanto è il numero dei resistori. Come abbiamo visto nell'esempio precedente, non possiamo far altro che utilizzare le equazioni che derivano dalla conservazione della carica e dalle proprietà dei potenziali. Le regole che derivano dall'applicazione di queste due leggi fondamentali sono note in letteratura come *leggi (o principi) di Kirchhoff dei nodi e delle maglie*:¹¹

1. la somma algebrica delle correnti in ciascun nodo è nulla, considerando positive le correnti *entranti* e negative quelle *uscanti*:

$$\sum_i I_i = 0; \quad (2.41)$$

2. la somma delle cadute di potenziale in una maglia è nulla, ove per maglia si intende un *percorso chiuso che partendo da un punto qualsiasi del circuito ritorna allo stesso punto senza passare più di una volta nello stesso elemento*:¹²

$$\sum_i \Delta V_i = 0, \quad (2.42)$$

ove i vari contributi possono essere dovuti a generatori e resistori. In particolare:¹³

¹¹Nota sul termine ‘principio’...

¹²Va da sé che la (2.42), discendendo dalle proprietà dei campi conservativi, non vale soltanto percorrendo una maglia così definita, ma per qualunque percorso chiuso complicato a piacere. Solo che gli infiniti percorsi possibili sono irrilevanti ai fini della determinazione del set di equazioni per risolvere il circuito.

¹³Si raccomanda di memorizzare la (2.42), dal più profondo significato fisico, invece delle formulette pratiche che ne derivano.

- ogni generatore dà un contributo positivo ($+f$) se è polarizzato nel verso di percorrenza della maglia, ovvero nel verso con il quale si passa attraverso i vari elementi; dà contributo negativo ($-f$) nel caso opposto.
- ogni resistenza dà un contributo negativo ($-IR$) se la corrente che la attraversa ha il verso di percorrenza della maglia; dà contributo positivo ($+IR$) nel caso opposto.

Possiamo riscrivere quindi la (2.42) come

$$\sum_i f_i - \sum_j I_j R_j = 0; \quad (2.43)$$

ovvero

$$\sum_i f_i = \sum_j I_j R_j; \quad (2.44)$$

Resta da chiarire come stabilire il verso della corrente in ciascun resistore. Come possiamo conoscerlo a priori? Nei casi molto semplici, come quello del circuito di figura 2.12, lo si evince facilmente dalla polarità del generatore, ma nel caso generale non è possibile capirlo. Si fissano allora dei *versi arbitrari* di scorrimento della corrente e la soluzione del sistema di equazioni ci dirà se 'abbiamo indovinato' (verrà una corrente positiva) o no (verrà una corrente negativa). È comunque inutile perdere tempo a cercare di capire a priori quali sono i versi che daranno correnti positive. Il motivo per cui i versi prescelti sono irrilevanti ai fini delle soluzioni 'fisiche' è implicito nella formulazione della legge di Ohm tenendo conto dei segni della differenza di potenziale e dei versi di scorrimento della corrente.

[**Nota:** alcuni manuali fanno uso delle *correnti di maglia*, combinazioni lineari, con moduli dei coefficienti unitari, delle correnti fisiche. Siccome per un corso introduttivo di questo genere non sono di alcuna utilità ed inoltre, studenti che le avevano studiate su libri vari o in altri corsi mostravano all'esame idee alquanto confuse, esse *non verranno minimamente trattate* in questi appunti.]

2.9 Applicazione all'esempio guida

Per chiarire il senso delle leggi di Kirchhoff e le convenzioni sui versi delle corrente, analizziamo il circuito di figura 2.16, che sarà il nostro *esempio guida* per questa parte del corso. Per le soluzioni numeriche useremo i seguenti valori di resistenze e forze elettromotrici: $R_1 = 45 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$ e $R_3 = 10 \Omega$; $f_1 = 2.1 \text{ V}$ e $f_2 = 1.9 \text{ V}$.

2.9.1 Scelta delle equazioni

Nel nostro circuito ci sono due nodi (A e C) e tre maglie ($ABCA$, $ACDA$ e $ABCD$). Scegliamo i versi delle tre correnti come in figura. Applicando le leggi di Kirchhoff ci ricaviamo quindi le seguenti relazioni fra le correnti:

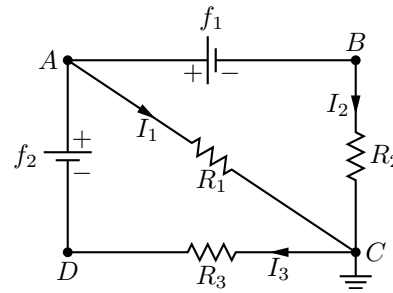


Figura 2.16: Esempio guida per i circuiti in corrente continua: abbastanza semplice per non dare grossi problemi di calcolo, ma abbastanza complicato da non poter essere risolto riducendolo in serie e paralleli. Esso si presta bene anche ad interessanti variazioni. Il simbolo di *terra* (*massa*, *ground*) sotto il punto *C* sta ad indicare che tale punto verrà considerato nel seguito come *riferimento di massa*, ovvero a potenziale zero ($V_C = 0$).

$$\text{Nodo A :} \quad I_3 - I_1 - I_2 = 0;$$

$$\text{Nodo C:} \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$

$$\text{Maglia ABCA:} \quad -f_1 - I_2 R_2 + I_1 R_1 = 0;$$

$$\text{Maglia ACDA:} \quad -I_1 R_1 - I_3 R_3 + f_2 = 0;$$

$$\text{Maglia ABCDA:} \quad -f_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 + f_2 = 0.$$

Otteniamo in totale sei equazioni e tre incognite, chiaro segno che le equazioni non sono fra di loro indipendenti, come si vede al volo nel caso dei due nodi. A questo punto si scelgono tre equazioni indipendenti (ad esempio quella del nodo *A* e quelle delle prime due maglie) e si risolvono con metodo a ‘piacere’ (tipicamente per sostituzione in questi semplici casi).

Soluzione per le correnti

Risolvendo il sistema di equazioni otteniamo il seguente risultato:¹⁴

$$I_1 = \frac{f_1 R_3 + f_2 R_2}{2R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (2.45)$$

$$I_2 = \frac{f_2 - I_1(R_1 + R_3)}{R_3} \quad (2.46)$$

$$I_3 = I_1 + I_2, \quad (2.47)$$

¹⁴Soluzione ottenuta per sostituzione, nell'ordine: nodo *A* ($\rightarrow I_3$), maglia *ACDA* ($\rightarrow I_2$) e maglia *ABCA* ($\rightarrow I_1$). Si sconsiglia di arrivare a soluzioni dirette delle correnti in funzione dei parametri, in quanto è facile commettere errori. Già per circuiti come questo, è preferibile usare il metodo matriciale che descriveremo in seguito, usando poi opportuni software per eseguire i calcoli.

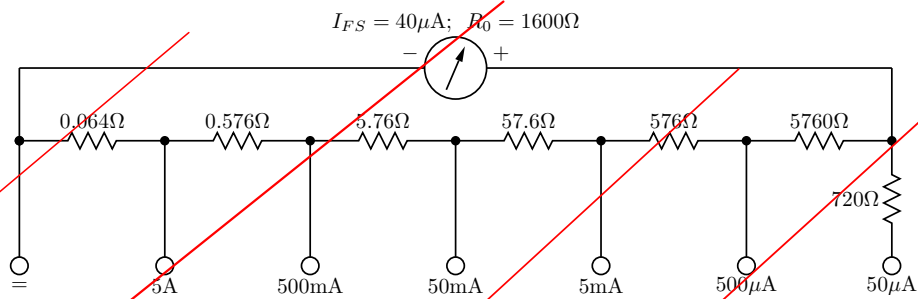


Figura 2.17: Schema elettrico dell'amperometro del multimetro analogico ICE 680 R.

a cui corrispondono le seguenti soluzioni numeriche.

$$\begin{aligned} I_1 &= 40 \text{ mA} \\ I_2 &= -30 \text{ mA} \\ I_3 &= 10 \text{ mA} . \end{aligned}$$

Il segno meno di I_2 indica che la corrente convenzionale positiva va da C a B e non c'è niente di male che sia così. Bisogna solo ricordarsi di fare attenzione ai segni nei conti successivi.

Potenziali nei vari punti del circuito

Come altro esercizio istruttivo, calcoliamoci il potenziale nei vari punti, assumendo che C sia a potenziale nullo (indicato dal simbolo di *massa*). In particolare il potenziale di A è calcolato in tre modi possibili tenendo conto di tutti i percorsi che portano da C ad A :

$$V_B = V_C + I_2 R_2 = -300 \text{ mV} \quad (2.48)$$

$$V_D = V_C - I_3 R_3 = -100 \text{ mV} \quad (2.49)$$

$$V_A = V_C + I_1 R_1 = 1800 \text{ mV} \quad (2.50)$$

$$(\text{=} V_B + f_1) \quad (2.51)$$

$$(\text{=} V_D + f_2) \quad (2.52)$$

2.10 Multimetro analogico

A questo punto siamo in grado di guardare un po' in dettaglio ad un multimetro analogico. Infatti, anche se oggi in laboratorio si usano essenzialmente i più comodi e più precisi multimetri digitali, uno strumento analogico ha una insuperata valenza didattica (oltre, come vedremo, il vantaggio pratico di poter funzionare anche senza essere alimentato).