Capitolo 5

Condensatore e circuito RC

5.1 Modello matematico e analogie

Mettiamo ora in gioco un altro importante componente, il *condensatore*, rappresentato a sinistra di figura 5.1. Il simbolo vuole ricordare la sua realizzazione più 'classica' (e più facile da trattare), ovvero due piani conduttori ('armature') separati da un materiale isolante, anche se tutto quello che diremo di questo nuovo elemento circuitale avrà una validità generale che prescinde da come esso è realizzato.

Il modello matematico del condensatore è molto semplice. Le cariche, uguali e opposte, depositate sulle due armature, e indicate con Q_+ e Q_- nella figura, sono proporzionali alla differenza di potenziale elettrico fra le armature stesse (ciascuna delle quali è considerata equipotenziale in quanto conduttrice):

$$Q_+ = -Q_- \;\; = \;\; C \cdot (V_+ - V_-)\,. \tag{5.1}$$

Viceversa, se esso possiede una carica Q_+ su un'armatura, esso ha necessariamente una carica Q_- sull'altra armatura e una differenza di potenziale

$$V_+ - V_- \;\; = \;\; \frac{Q_+}{C} = \frac{-Q_-}{C} \tag{5.2}$$

fra di esse. Questa banale inversione della relazione precedente ci permette di modellizzare il condensatore *come se fosse un generatore di tensione* (vedi figura 5.1) di forza elettromotrice variabile, proporzionale, istante per istante, alla carica depositata in ciascuna armatura e con opportuna polarità. Infatti,

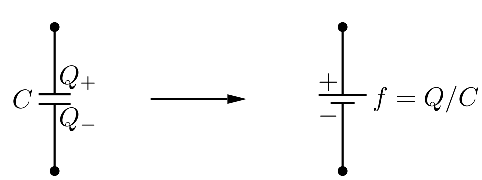


Figura 5.1: Condensatore, a sinistra, e generatore di tensione equivalente

nel seguito prenderemo come riferimento la carica di una delle due armature, riscrivendo così la (5.1) come

$$Q = C \cdot \Delta V\,, \tag{5.3}$$

intendendo quindi che Q è positiva se tale armatura è a potenziale maggiore dell'altra, negativa nel caso opposto. Si noti inoltre come un condensatore, seppur chiamato 'carico', è sempre un oggetto elettricamente neutro (se visto da lontano), in quanto la somma delle cariche sulle due armature è identicamente nulla.

Il fattore di proporzionalità C definisce dalla grandezza fisica *capacità elettrica*, misurata in Farad (F) nel Sistema Internazionale. Ovvero un condensatore di 1 Farad che presenta una differenza di potenziale di 1 Volt fra le armature ha una carica di 1 Coulomb sull'armatura a potenziale maggiore e una carica uguale e opposta sull'armatura a potenziale inferiore. Si noti comunque come questa unità di misura è molto 'grande'[1] e negli usi pratici vengono usati suoi sottomultipli, come il nanofarad (nF, pari a 10^{-9} F) e il picofarad (pF, pari a 10^{-12} F). Per completezza, tanto per avere un ordine di grandezza delle capacità (e di quanto sia un Farad) e anche se tale informazione non verrà usata nel seguito, riportiamo la formula della capacità di un condensatore piano di area S e distanza d fra le armature:

$$C = \epsilon\,\frac{S}{d}\,, \tag{5.4}$$

con ϵ, *costante dielettrica del mezzo* (per 'mezzo' intendiamo il materiale isolante fra le armature), generalmente espressa come la costante dielettrica del vuoto (ϵ_0) moltiplicata per un fattore (ϵ_r) dipendente dal mezzo e sempre maggiore di 1 chiamato *costante dielettrica relativa*, fattore molto prossimo a 1 per l'aria (1.00059). Ad esempio un condensatore composto da due lastre metalliche di dimensioni di un foglio A4 ($210 \times 290\,\mathrm{mm}^2$), distanti lo spessore tipico di tale foglio ($0.10\,\mathrm{mm}$) vale 5.5 nF se fra di loro c'è aria, ma raggiunge circa 10 nF se fra di loro c'è un foglio di carta (ϵ_r della carta comune vale circa 2). [Insomma, per arrivare ad un Farad bisognerebbe mettere in parallelo circa cento milioni di tali 'condensatori A4' (con dielettrico di carta), per una superficie di oltre 600 ettari.]

5.1.1 Capacità elettrica, capacità termica e altre 'capacità'

La (5.1) ci dice che un condensatore con una capacità 'grande' riesce a 'contenere' tanta carica con una piccola differenza di potenziale ai suoi capi. Se, invece, la capacità è piccola, basta poca carica per innalzare di molto la differenza di potenziale fra le armature. È l'analogo di quanto avviene quando forniamo una certa quantità di calore ad un corpo: la sua temperatura varierà in modo inversamente proporzionale alla sua capacità termica:

$$\Delta T = \frac{Q}{C}\,. \tag{5.5}$$

[1] Non c'è niente di intrinsecamente grande nel Farad, così come non c'è niente di intrinsecamente piccolo nel Pascal per misurare la pressione. Sono semplicemente grandi e piccoli su scale antropiche. Si tratta del prezzo da pagare per avere unità di misura connesse con coefficienti unitari a quelle fondamentali del Sistema Internazionale.

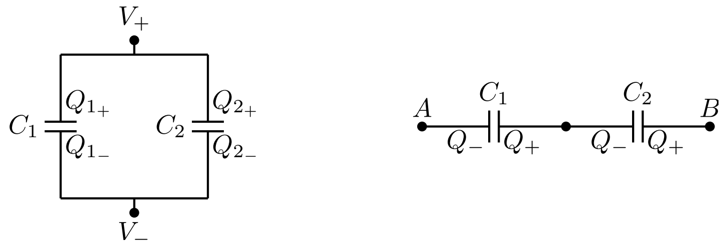


Figura 5.2: Condensatori in serie e in parallelo.

In entrambi i casi, la 'capacità' collega una grandezza intensiva (ΔT o ΔV) con una estensiva (Q, con i rispettivi significati di quantità di calore o carica). Un oggetto di capacità termica molto grande (si pensi al mare) riesce ad assorbire tanto calore innalzando di poco la propria temperatura.

Questa analogia si può estendere and altre capacità se introduciamo altri 'indicatori di livello'. Ad esempio liquidi versati in recipienti cilindrici fanno aumentare il livello ($\rightarrow \Delta h$) di molto o di poco a seconda delle sue dimensioni. Si può verificare che la 'capacità volumetrica', definita come volume di liquido introdotto diviso l'innalzamento di livello corrisponde proprio alla sezione del recipiente.[2] Similmente, un hard disk ha una grande capacità se si può introdurre in esso una grande mole di dati senza che esso modifichi di molto il suo livello di occupazione (ad esempio la barretta che indica quanto un disco è pieno).

5.1.2 Condensatori in serie e in parallelo

Concludiamo la presentazione del condensatore ricavandoci, in analogia a quanto fatto per le resistenze, le regole di combinazione di condensatori in serie e in parallelo.

Cominciamo con condensatori in parallelo, configurazione raffigurata nello schema a sinistra di figura 5.2. Per definizione di parallelo essi hanno fra le armature la stessa differenza di potenziale, $V_+ - V_-$. Quindi la carica sulle armature di ciascun condensatore saranno rispettivamente Q_{1+} e Q_{2+} sul lato V_+ e Q_{1-} e Q_{2-} sul lato V_-. La capacità del condensatore equivalente sarà quindi

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{Q_{1_+} + Q_{2_+}}{V_+ - V_-} = \frac{Q_{1_+}}{V_+ - V_-} + \frac{Q_{2_+}}{V_+ - V_-} \\ &= C_1 + C_2 \,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Nel caso della serie, invece, è la carica che deve essere la stessa nei diversi condensatori, come si capisce osservando nello schema di destra della figura 5.2 la connessione fra C_1 e C_2. Infatti, siccome quando non è applicata alcuna differenza di potenziale fra i punti A e B i condensatori sono scarichi, le

[2]Ad esempio, le capacità dei serbatoi delle raffinerie vengono misurate in metri cubi al cm (m^3/cm) e, per curiosità, i serbatoi della Raffineria di Roma sono di circa 30 m^3/cm, come verificabile facilmente mediante GoogleEarth.

cariche sull'armatura positiva di C_1 e sull'armatura negativa di C_2 non possono che essere uguali e opposte. Quindi, su tutte le armature di condensatori in serie le cariche non possono che avere lo stesso modulo (ricordiamo che ogni condensatore è un oggetto neutro). In questo caso a sommarsi saranno le differenze di potenziale, in quanto $V_B - V_A = Q_+/C_1 + Q_+/C_2$. Ne segue che il condensatore fra A e B ha capacità

$$C_s = \frac{Q_+}{V_B - V_A} = \frac{Q_+}{Q_+/C_1 + Q_+/C_2} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2}\,, \tag{5.7}$$

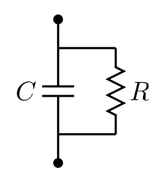
ovvero

$$C_s^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}\,. \tag{5.8}$$

In questo caso si sommano i reciproci. Insomma, come aiuto mnemonico, possiamo riassumere che le regole di combinazione di capacità in serie e parallelo sono le opposte di quelle delle resistenze. E, ovviamente, le regole si estendono naturalmente da due a molti condensatori.

5.1.3 Resistenza parassita

Per completezza notiamo come fra una armatura e l'altra di un condensatore ci potrebbe essere un flusso di corrente dovuto al non perfetto isolamento (si immagini ad esempio un dielettrico non perfettamente isolante o lo stesso involucro esterno dei condensatori usati normalmente nei circuiti, attraverso il quale potrebbe scorrere corrente). Ne segue che, almeno dal punto di vista generale, dobbiamo associare una resistenza posta in parallelo alla capacità,



ma tale resistenza è in genere talmente grande da essere assolutamente trascurabile per quello che riguarda lo scopo di questa introduzione.
(**Appendice con elementi reali?**)

5.2 Corrente elettrica 'attraverso' un condensatore

Finora abbiamo assunto i vari condensatori in qualche modo carichi e abbiamo semplicemente fatto uso della relazione fra carica e tensione che li caratterizza. Vediamo ora cosa succede se colleghiamo un condensatore inizialmente scarico ad un generatore mediante una resistenza (vedi figura 5.3). La presenza della resistenza è molto importante e non soltanto dal punto di vista pratico, a ricordare che anche i fili di collegamento hanno una resistenza, benché piccola. Infatti il modello di un condensatore direttamente collegato ad un generatore non è fisico (provare a pensarci) e genera anche degli assurdi energetici, come vedremo nel paragrafo 5.8.

Nell'istante in cui il condensatore viene collegato, essendo esso inizialmente scarico, la differenza di potenziale fra le armature è nulla e quindi i capi

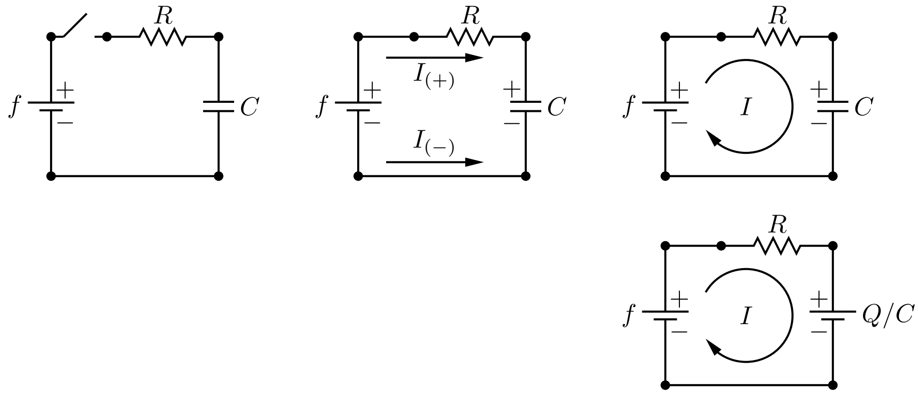


Figura 5.3: Condensatore connesso ad un generatore mediante una resistenza. In senso orario dall’alto a sinistra: situazione iniziale con condensatore scarico; correnti delle cariche libere positive e negative; corrente convenzionale risultante; generatore equivalente con f.e.m istantanea pari a Q/C.

della resistenza si troveranno alla stessa differenza di potenziale del generatore. Comincerà quindi a scorrere una corrente elettrica di intensità $I = f/R$ dal polo positivo del generatore all’armatura ‘superiore’ del condensatore, la quale comincerà quindi a caricarsi positivamente. Nella figura tale corrente è indicata con $I_{(+)}$ in quanto si tratta di corrente ‘convenzionale’ positiva[3] che va dal polo positivo del generatore all’armatura ‘superiore’ (secondo la figura).

È inizialmente meno ovvia la corrispondente $I_{(-)}$ che va dal polo negativo del generatore all’armatura inferiore, in quanto i due punti sono inizialmente allo stesso potenziale. Il motivo fisico è dovuto alle cariche sull’armatura superiore le quali ‘richiamano’, per induzione, cariche opposte sull’altra armatura, come sarà approfondito nel corso di elettromagnetismo. Dal punto di vista modellistico le cose sono molto più facili, in quanto, una volta che si fa fede al modello, possiamo affermare semplicemente che ad una quantità di carica su una armatura ne deve corrispondere una di segno opposto sull’altra e l’entità di tali cariche ci fornisce la differenza di potenziale sulle armature (e viceversa).

Si capisce quindi come l’effetto delle due correnti $I_{(+)}$ e $I_{(-)}$ è quello di una sola corrente che va dal polo positivo a quello negativo del generatore *‘attraversando’* il condensatore. Ovviamente, le cariche elettriche non possono saltare da un’armatura all’altra (a parte piccoli effetti di un’eventuale resistenza parassita, che abbiamo considerato trascurabile). Il significato di questa espressione fra virgolette è che un osservatore esterno che non conoscesse il funzionamento del condensatore vedrebbe cariche entrare nell’armatura supe-

[3]Si noti la differenza fra $I_{(+)}$ e $I_{(-)}$ in questa figura rispetto a I_+ e I_- di figura 1.11. In quella figura I_+ indicava il flusso di cariche mobili positive e I_- quello di cariche mobili negative. In figura 5.3, invece, $I_{(+)}$ rappresenta la somma della corrente delle cariche libere positive (che quindi vanno dal polo positivo del generatore all’armatura superiore del condensatore) e di quella delle cariche libere negative (dall’armatura superiore del condensatore al polo positivo del generatore). Analogo discorso vale per $I_{(-)}$: cariche negative verso il condensatore e positive verso il generatore. Ne segue che, siccome nei normali circuiti a muoversi sono elettroni, negativi, l’effetto risultante sarà che il generatore estrarrà, facendoli passare attraverso di esso, elettroni dall’armatura superiore (che diventerà quindi positiva) per portarli in quella inferiore.

riore e uscire da quella inferiore, *come se* lo attraversassero (tipo i prestigiatori che si fanno passare la bacchetta magica da un orecchio all'altro...).

Infine un altro modo per 'vedere' il fenomeno (rappresentato nel circuito a destra in basso della figura 5.3) è di immaginare il condensatore come un generatore ('batteria') di forza elettromotrice variabile nel tempo in quanto dipendente dalla carica elettrica in esso contenuta. Questa osservazione ci permette di ottenere alcuni risultati interessanti prima ancora di risolvere l'equazione differenziale del modello.

- Al tempo iniziale, $t = 0$, in cui si chiude il circuito, essendo il condensatore inizialmente scarico, il circuito è equivalente a quello banale di un generatore e una resistenza, ne segue quindi:
  - la corrente che scorre nel circuito vale $I(t = 0) = f/R$;
  - la tensione ai capi della resistenza vale esattamente f.
- La corrente seguiterà a scorrere fintanto i due generatori non si bilanciano, ovvero finché la tensione ai capi del condensatore non avrà raggiunto f, ovvero si sarà caricato a $Q(t \to \infty) = C\, f$.
- Se, una volta che il condensatore si è caricato completamente, spegniamo il generatore, ovvero poniamo $f = 0$ (ossia lo sostituiamo con un corto circuito), nell'istante iniziale ci sarà una corrente di scarica di intensità uguale a quella di carica, ma di segno opposto. Anche la tensione ai capi della resistenza sarà uguale e opposta a quella dell'istante iniziale di carica.
  Nel seguito, a mano a mano che il condensatore si scarica la corrente diminuisce (in modulo), mantenendosi proporzionale alla tensione ai capi del condensatore:
  $$|V_R| = |R\,I| \quad \propto \quad V_C\,. \tag{5.9}$$

5.3 Equazioni di carica e scarica

A questo punto possiamo finalmente passare alle equazioni che ci permettono di trovare la dipendenza dal tempo della carica del condensatore, dalla quale segue la tensione ai suoi capi. Approfittiamo per semplificare un po' la notazione. Infatti finora siamo stati sempre accorti ad indicare le differenze di potenziale come ... differenze, chiamando ad esempio la differenza di potenziale ai capi A e B di un resistore come $V_A - V_B$. Possiamo indicarla più semplicemente come V_R a patto di ricordarsi che non si tratta, nonostante il simbolo, di potenziale e non di differenza di potenziale, e di fare attenzione ai segni. Nello stesso modo potremo indicare con V_C la tensione ai capi del condensatore. I segni sono legati al segno della corrente, come indicato in figura 5.4. A questo punto, per ottenere l'equazione del circuito ci dobbiamo ricordare che la somma delle cadute di potenziale sulla maglia è nulla istante per istante, ovvero

$$f - R\,I - V_C \quad = \quad 0\,, \tag{5.10}$$

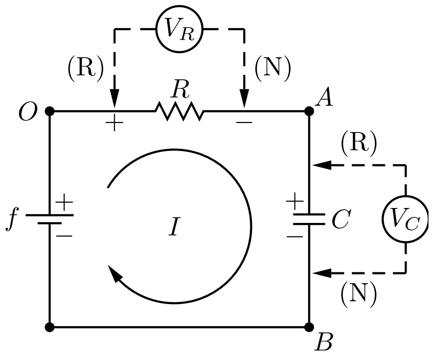


Figura 5.4: Circuito RC con convenzioni dei segni di corrente e tensioni. Per maggiore chiarezza sono anche indicati i voltmetri ideali, con le rispettive polarità (colori dei cavetti, Rosso per positiva e Nero per negativa), per la misura delle tensioni ai capi dei due elementi.

da cui

$$f - R\,I - \frac{Q}{C} \;=\; 0\,, \tag{5.11}$$

e fare uso dalla relazione derivante dal fatto che la corrente che scorre nella resistenza carica il condensatore,[4] ovvero

$$I \;=\; \frac{dQ}{dt} = C\,\frac{dV_C}{dt}\,. \tag{5.12}$$

Ne segue l'equazione differenziale

$$f - RC\,\frac{dV_C}{dt} - V_C \;=\; 0 \tag{5.13}$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{dV_C}{dt} \;=\; -\frac{1}{RC}\,(V_C - f)\;: \tag{5.14}$$

[4]Cosa sarebbe successo se avessimo considerato positivo il verso antiorario della corrente? V_R deve cambiare di conseguenza, mentre V_C rimane lo stesso in quanto è legato alla polarità del generatore. Ne segue quindi

$$-f - R\,I + \frac{Q}{C} \;=\; 0$$

la quale si riconduce ugualmente alla (5.13) in quanto *con questa convenzione una corrente positiva scarica il condensatore*, ovvero $I = -dQ/dt$.

Infine, un altro modo per arrivare alla (5.14) è di valutare la tensione ai capi di R e applicare la legge di Ohm:

$$\begin{aligned} I = \frac{V_0 - V_A}{R} &\;=\; \frac{1}{R}\,(f - V_C) \\ C\frac{dV_C}{dt} &\;=\; \frac{1}{R}\,(f - V_C)\;, \end{aligned}$$

da cui segue la (5.14).

la variazione di tensione del condensatore nell'unità di tempo, ovvero la sua velocità di variazione, dipende linearmente dalla differenza fra il suo valore istantaneo e f, il quale acquista il significato di valore asintotico, in quanto V_c smette di cambiare quando ha raggiunto tale valore (cosa che per altro già sappiamo). Infatti, per $V_C = f$ si ha $dV_C/dt = 0$. Se invece $V_C < f$, la tensione del condensatore aumenta ($\rightarrow$ *carica*) mentre se $V_C > f$ essa diminuisce ($\rightarrow$ *scarica*). Il prodotto RC ha chiaramente le dimensioni di un tempo in quanto a sinistra della (5.14) abbiamo una tensione diviso un tempo e a destra una tensione diviso RC. Come si è soliti fare in questi casi, conviene indicare tale prodotto con τ per ricordarci che si tratta di un tempo, l'unica scala temporale di questo processo (*costante di tempo del circuito*). Si noti infatti come, benché il circuito abbia tre parametri, f, R e C, la soluzione dipende soltanto da due di essi, f e RC. Inoltre, il fatto che il prodotto di una capacità per una resistenza dia un tempo, ci permette di esprimere il Farad in secondi su Ohm, o $\mathrm{s}\,\Omega^{-1}$, particolarmente utile quando tratteremo la corrente alternata (già la sola considerazione dimensionale che moltiplicando una frequenza per una capacità si ottenga una conduttanza suggerisce qualcosa di interessante sul comportamento del condensatore in regime sinusoidale).

5.4 Fenomeni fisici dal comportamento temporale analogo al circuito RC

La soluzione della (5.14) è ben nota, in quanto essa è comune ad altri fenomeni fisici che lo studente ha già incontrato in altri corsi. Approfittiamo quindi per acquistarne una visione d'insieme, aggiungendo anche altri fenomeni dello stesso tipo.

5.4.1 Moto in fluido viscoso

Se su un oggetto agiscono una forza attiva costante (F_A) e una forza di attrito dipendente linearmente dalla velocità, $-\beta\, v$, la forza totale, pari a $F = F_A - \beta\, v$, provoca una variazione di quantità di moto nell'unità di tempo $dp/dt = F_{tot}$, ovvero una variazione di velocità nell'unità di tempo

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_A}{m} - \frac{\beta}{m}\, v \tag{5.15}$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}\,(v - \frac{F_A}{\beta})\,, \tag{5.16}$$

che diventa

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}\,(v - \frac{m\,g}{\beta})\,, \tag{5.17}$$

nel caso in cui F_A sia la forza peso. La velocità limite è quindi F_A/β (o $m\,g/\beta$ nel caso di forza peso) e la costante di tempo vale m/β.

5.4.2 Processi di termalizzazione

Se un corpo avente una certa temperatura T viene posto in un ambiente a temperatura costante T_A, lo scambio termico dipende linearmente dalla differenza di temperatura del corpo rispetto all'ambiente. Chiamando η il coefficiente di proporzionalità, abbiamo che il calore assorbito o ceduto nell'unità di tempo vale

$$\frac{dQ}{dt} = -\eta\,(T - T_A)\,, \tag{5.18}$$

da cui segue una velocità istantanea di termalizzazione

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\eta}{C}\,(T - T_A)\,, \tag{5.19}$$

ove C è la capacità termica. La temperatura limite vale banalmente T_A e la costante di tempo C/η.

5.4.3 Decadimenti radioattivi

Se abbiamo un materiale radioattivo, la frazione ΔN di essi che decade in un intervallo di tempo Δt finito ma 'piccolo' (vedremo fra un attimo rispetto a cosa) è proporzionale al numero di nuclei presenti in quell'istante e al valore di Δt. Chiamando α la costante di proporzionalità abbiamo quindi $\Delta N = -\alpha\, N\, \Delta t$. Nel limite di $\Delta t \to 0$, questa diventa

$$dN/dt = -\alpha\, N \tag{5.20}$$

(nella quale stiamo trattando N come se fosse un numero reale invece di un intero, approssimazione giustificata dalla grandezza dei numeri in gioco), che possiamo riscrivere come

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha\,(N - 0)\,, \tag{5.21}$$

per enfatizzare la stessa struttura formale delle altre equazioni. La costante di tempo vale $1/\alpha$, legata in questo caso al concetto di 'vita media'.

5.4.4 Soluzione dell'equazione differenziale $\dot{z} \propto (z - z_L)$

Per tutti questi processi, riassunti in tabella 4.1, scriviamo l'equazione differenziale che li descrive usando la generica variabile z, espressa in funzione del valore asintotico z_L e della costante di tempo τ,

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\tau}\,(z - z_L)\,. \tag{5.22}$$

Questa equazione ci dice che la variazione nel tempo della generica grandezza z dipende da quanto essa dista dal valore asintotico z_L. Risolviamo la (5.22) per parti scrivendola come

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{dz}{z - z_L} = \int_0^t -\frac{1}{\tau}\, dt'\,. \tag{5.23}$$

	equazione	$t \to \infty$	τ
condensatore	$\frac{dV_C}{dt} = -\frac{1}{RC}\,(V_C - f)$	f	RC
attrito visc.	$\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}\,(v - \frac{F_A}{\beta})$	F_A/β	m/β
termalizzazione	$\frac{dT}{dt} = -\frac{\eta}{C}\,(T - T_A)$	T_A	C/η
decadimenti	$\frac{dN}{dt} = -\alpha\, N$	0	$1/\alpha$
induttore	$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\,(I - \frac{f}{R})$	f/R	L/R

Tabella 5.1: Confronti fra diversi fenomeni che danno luogo ad andamenti esponenziali (il caso dell'induttore sarà visto nel paragrafo 10.3.2).

Abbiamo quindi

$$\log\frac{z(t) - z_L}{z_0 - z_L} \;=\; -\frac{t}{\tau}\,, \tag{5.24}$$

avendo indicato con z_0 il valore iniziale $z(0)$, da cui

$$z(t) \;=\; z_L + (z_0 - z_L)\, e^{-t/\tau}\,. \tag{5.25}$$

Riscriviamo la (5.24) in due modi interessanti, a seconda che z sia, per tempi finiti, maggiore o minore del suo valore limite:

$$\begin{array}{lll} z > z_L: & & \log\left[z(t) - z_L\right] = -t/\tau + \log\left[z_0 - z_L\right] \\ & \to & \log\left[z(t) - z_L\right] = m\,t + q \\ & & \\ z < z_L: & & \log\left[z_L - z(t)\right] = -t/\tau + \log\left[z_L - z_0\right] \\ & \to & \log\left[z_L - z(t)\right] = m\,t + q\;\;, \end{array}$$

ove, in entrambi i casi, la seconda scrittura mostra la dipendenza lineare dal tempo del valore istantaneo meno il valore asintotico o del valore asintotico meno il valore istantaneo. Tale dipendenza può essere messa in evidenza graficando i logaritmi della opportuna differenze in funzione del tempo, oppure usando una scala opportunamente 'compressa' (scala logaritmica), sulla quale ritorneremo nel seguito.

5.5 Carica e scarica del condensatore

Applichiamo ora la soluzione dell'equazione differenziale al caso in cui il condensatore era inizialmente scarico (ovvero il valore iniziale z_0 della generica variabile z sta per $V_{C_0} = 0$) e connesso ad un generatore di tensione

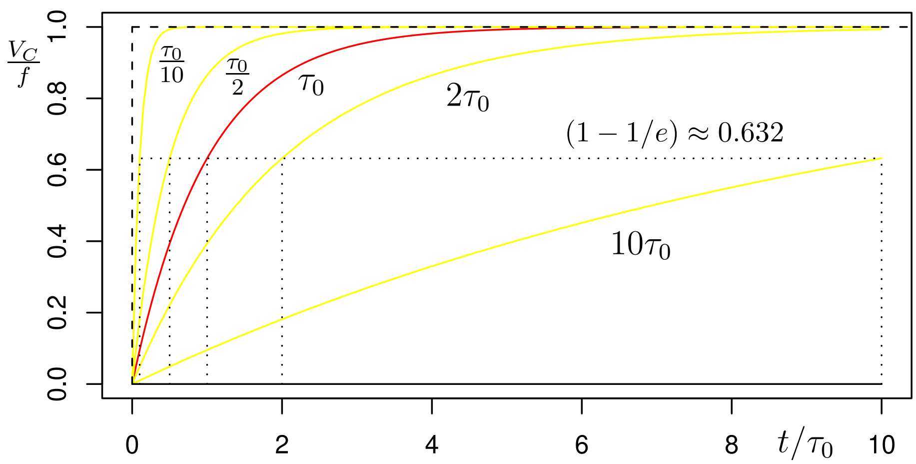


Figura 5.5: Tensione ai capi del condensatore durante la carica per una costante di tempo di riferimento (τ_0) e per processi più o meno rapidi.

f (corrispondente al generico valore asintotico z_L). Dalla (5.25) otteniamo quindi

$$V_C(t) \;=\; f\,(1-e^{-t/\tau})\,, \tag{5.26}$$

riportata in figura 5.5 per vari τ. Dalla (5.26) ci possiamo ricavare immediatamente l'intensità di corrente che scorre nel circuito e quindi la tensione ai capi del resistore:

$$I(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt} \;=\; \frac{f}{R}\,e^{-t/\tau} \tag{5.27}$$

$$V_R(t) = R\,I(t) \;=\; f\,e^{-t/\tau}\,. \tag{5.28}$$

Otteniamo, fra l'altro, quanto previsto precedentemente da considerazioni generali: $I(0) = f/R$ e $V_R(0) = f$. Gli andamenti sono graficati in figura 5.7. In essa si noti innanzitutto come, istante per istante, come la somma delle tensioni a capi di C e quella ai capi di R sia sempre uguale a quella del 'generatore' f (includendo in questo termine anche il caso di scarica, in quanto, come sappiamo, un corto circuito è equivalente a $f = 0$), ovvero $V_C(t) + V_R(t) = f$, come si evince facilmente dalla figura 5.4. Si noti inoltre come il valore di V_R sia proporzionle alla pendenza (non solo in modulo ma anche con il segno!) di V_C in funzione del tempo, cosa dovuta al fatto che $V_R(t) \propto I(t) \propto \frac{dV_c}{dt}$.

Come è noto, dal punto di vista matematico il valore asintotico è raggiunto esattamente soltanto per $t \to \infty$, ma in pratica il processo di carica si stabilizza dopo circa 5-6 τ, corrispondenti alla riduzione della differenza rispetto al valore asintotico al, rispettivamente, 0.7% o 0.2% del suo valore iniziale. Per $t = \tau$ la tensione del condensatore raggiungere il 63.2% del valore finale e questa osservazione rappresenta un utile e rapido modo per valutare sperimentalmente τ dall'osservazione della carica.

Quando il condensatore si è caricato lo si può far scaricare sostituendo il generatore ad un corto circuito, che, come sappiamo sta per $f = 0$. In questo caso, date le condizioni iniziali $V_{c_0} = f$ e $V_C(\infty) = 0$, otteniamo la

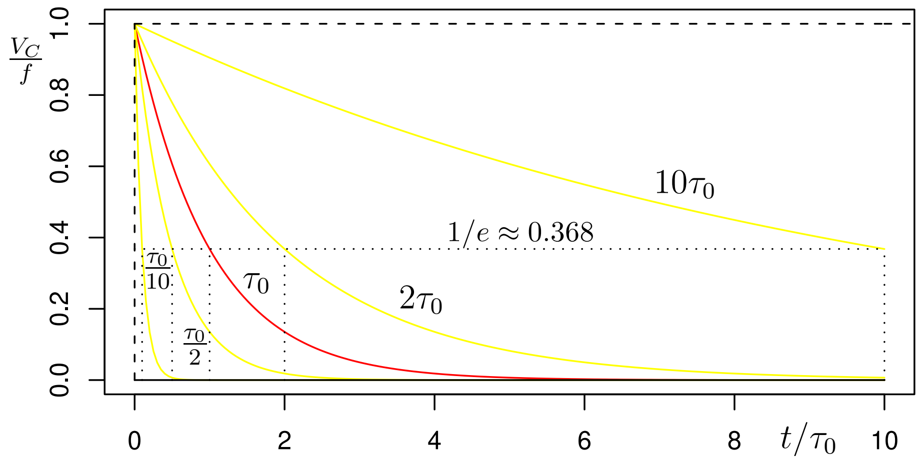


Figura 5.6: Tensione ai capi del condensatore durante la scarica per una costante di tempo di riferimento (τ_0) e per processi più o meno rapidi.

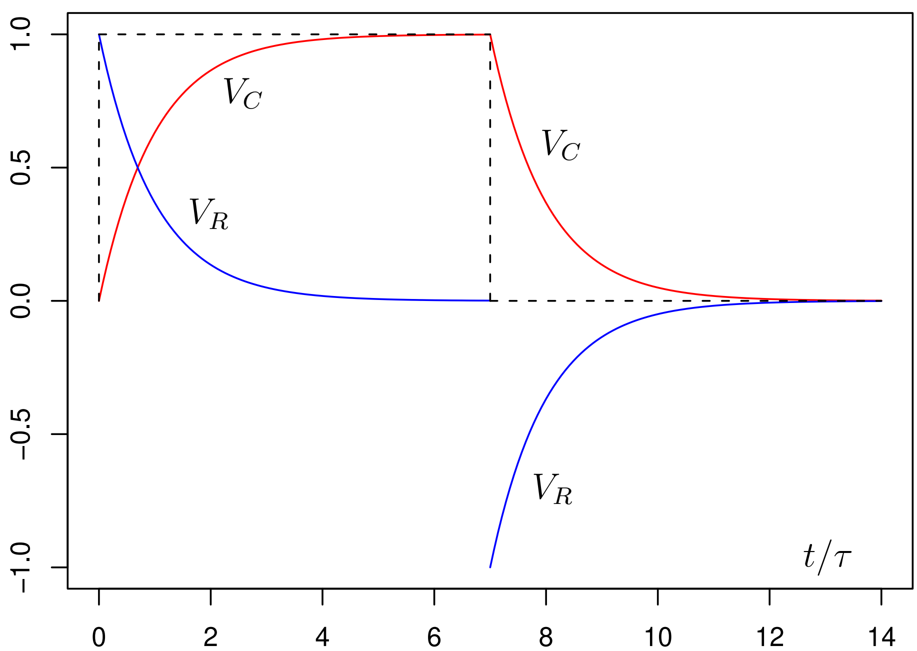


Figura 5.7: Andamento delle tensioni ai capi di C e di R in funzione del tempo in unità τ, assumendo tensione del generatore unitaria.

dipendenza dal tempo delle grandezze di interesse:

$$V_C(t) = f\, e^{-t/\tau}\,, \qquad (5.29)$$

$$I(t) = -\frac{f}{R}\, e^{-t/\tau} \qquad (5.30)$$

$$V_R(t) = -f\, e^{-t/\tau}\,. \qquad (5.31)$$

Il segno della corrente è ovvio: la corrente scorre nel verso antiorario in quanto il condensatore si sta scaricando. In pratica significa che le cariche elettriche negative (elettroni) si stanno riportando sull'armatura inizialmente positiva – positiva in quanto priva di cariche negative. Il segno negativo della tensione ai capi del resistore è consistente con le nostre definizioni e, *soprattutto*, è quanto si misurerebbe ponendo un voltmetro nella configurazione di figura 5.4. Infatti se una corrente (convenzionale) scorre in esso da destra verso sinitra il puntale rosso (R) del voltmetro si troverà ad un potenziale inferiore a quello del puntale nero (N) e un voltmetro digitale indicherà, correttamente, un valore negativo. (Nel caso di un voltmetro analogico, invece, l'ago tenderà ad andare a sinitra, 'sotto zero', e verrà bloccato dalla meccanica.)

Infine, in figura 5.8 mostriamo per completezza che cosa succede ai capi del condensatore se il periodo dell'onda quadra non è sufficiente grande per permettere al condensatore di caricarsi completamente. Non possiamo entrare nei dettagli matematici (*analisi di Fourier*, che gli studenti non conoscono ancora mentre frequentano questo corso) per calcolare $V_C(t)$ nei diversi casi, che comunque avremo modo di osservare sperimentalmente in laboratorio.

5.6 Risposta a onde quadre fra livelli di tensione arbitrari

Trattando il processo di carica e scarica del condensatore abbiamo assunto implicitamente che l'operazione di 'accensione' (circuito collegato al generatore) e 'spegnimento' (generatore rimpiazzato da un corto circuito, ovvero da generatore avente $f = 0$) sia eseguita in qualche modo a mano. Un'operazione del genere è fattibile per RC aventi costanti di tempo molto grandi. Per costanti di tempo 'piccole' (su scala antropica) si fa invece uso di un *generatore di segnali*, al quale accenneremo nel capitolo 8 e rappresentato in figura 5.9 con un simbolo autoesplicativo. Le curve tratteggiate delle figure 5.7 e 5.8 stanno quindi ad indicare delle *onde quadre* la cui tensione vale f in un semiperiodo ed è nulla nel semiperiodo successivo. Ma, più in generale, la tensione fornita da tale 'segnale' *periodico* può oscillare fra due livelli qualsiasi e anche il tempo di permanenza in ciascuno dei due *stati* ('alto' e 'basso') può essere diverso. Un caso interessante è quello di onde quadre *bipolari* simmetriche, in cui le due tensioni valgono $+f$ e $-f$ e sono mantenute un semiperiodo ciascuna, in quanto esso rappresenta il 'default' del generatore di segnali che useremo in laboratorio.

La trattazione della risposta del circuito RC ad una generica onda quadra fra due livelli arbitrari non rappresenta alcuna difficoltà in quanto la (5.25) rappresenta la soluzione generale. (Ricordiamo che è invece importante l'assunzione che ciascuno dei due livelli sia mantenuto per un tempo molto maggiore