

Fisica per Scienze Naturali (G. D'Agostini)
— argomenti trattati nelle lezioni(AA 2017-2018) —

Giulio D'Agostini

1 giugno 2018

1 (Mar 6 marzo)

- Introduzione al corso.
- Primo **macrotema**: dalla misura della densità di piccoli oggetti (in aula) alla valutazione della densità di Terra e Luna (e oltre...).
- Introduzione alle **misure di densità** di ‘solidi regolari’.
 - Misura di volume.
 - * modello geometrico (in pratica tutti i modelli sono delle idealizzazioni!);
 - * valutazione del/dei parametro/i del modello;
 - * grandezze fisiche: valore numerico e unità di misura (il solo valore numerico non significa niente!);
 - * leggere al meglio gli strumenti, eventualmente interpolando (a occhio) all'interno delle divisione (“fra le tacche”);
 - Misura di massa:
 - * *principio di misura* (concetto valido in generale);
 - * *cosa intendiamo per massa* (importante per capire il principio di misura che si utilizza).
- Richiede capire alcune leggi fondamentali della Fisica.
- **Massa gravitazionale e massa inerziale.**
 - La *massa gravitazionale* è legata alla legge di Gravitazione di Newton,

$$|\vec{F}| \propto \frac{m_1 m_2}{d^2}, \quad (1)$$

valida per *punti materiali* di massa m_1 e m_2 distanti d ; vale anche per *oggetti sferici* omogenei, per i quali r rappresenta la distanza fra i due centri (e, ovviamente, $d \geq (R_1 + R_2)$, con R_1 e R_2 i due raggi).

Indicando con G la (famosa) *costante di gravità* (si cerchi il valore su Wiki) il fattore di proporzionalità la (1) diventa

$$|\vec{F}| = \frac{G m_1 m_2}{d^2}. \quad (2)$$

- La *massa inerziale* è legata invece al *secondo principio della dinamica* (o “seconda legge di Newton”):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (3)$$

Nota 1: il concetto di *inerzia* è mutuato dal linguaggio comune.

Nota 2: la scrittura (3) è preferibile alla più comune “ $\vec{F} = m\vec{a}$ ”, in quanto nella (3) compaiono a destra le *cause* (forza e inerzia) e a sinistra l'*effetto* (variazione di velocità).

Nota 3: Il *primo principio* (“prima legge di Newton”) può essere considerato un caso particolare del secondo, in quanto

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{‘costante’} \Rightarrow \text{quiete o moto rettilineo uniforme}$$

(**Attenzione:** $\vec{v} = \text{‘costante’}$ non significa semplicemente $|\vec{v}| = \text{‘costante’}$, bensì che non devono variare nel tempo le componenti del vettore \vec{v} !)

- Relazione fra *massa inerziale* (m_I in questo paragrafo) e *massa gravitazionale* (m_G in questo paragrafo):

\Rightarrow maggiore è l’inerzia di un corpo, maggiore è la forza gravitazionale che esso esercita e subisce (vedi “terzo principio”):

$$m_G \propto m_I$$

- * È un fatto sperimentale – in Fisica, come nelle altre Scienze “vince” la teoria che meglio si accorda con l’esperimento, come ci ricorda Feynman:¹



- * Per convenienza si usa lo stesso simbolo, m , per entrambe le masse e il fattore di proporzionalità si ripercuote nel valore numerico di G della (2). Ma dal contesto si capisce se si tratta di massa inerziale o gravitazionale.

- **Terzo principio della meccanica** (“terza legge di Newton” o “legge di azione e reazione”)

Per completezza, vediamo anche il “terzo principio”, che scriviamo sinteticamente come

$$\vec{F}_A^{(B)} = -\vec{F}_B^{(A)}, \quad (4)$$

a parole *la forza su A dovuta a B è uguale e opposta alla forza su B dovuta ad A.*

- Ad esempio, se indichiamo con m la massa di un (piccolo) oggetto in prossimità della superficie terrestre (ad esempio un gessetto) e con M_T la massa della Terra e usando gli stessi simboli per indicare i due corpi:

$$\vec{F}_m^{(M_T)} = -\vec{F}_{M_T}^{(m)}. \quad (5)$$

¹Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics, Volume I*,
http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_toc.html,
http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_01.html.

- Facendo inoltre uso della (2), valida sotto *ragionevoli approssimazioni* (oggetto di massa m in prossimità della superficie terrestre; Terra perfettamente sferica e omogenea; effetti centrifughi trascurabili) e usando un sistema di riferimento (asse z) diretto verso l’alto, avremo

$$F_m^{(M_T)} = -\frac{G m M_T}{R_T^2} \quad (6)$$

$$F_{M_T}^{(m)} = +\frac{G m M_T}{R_T^2}, \quad (7)$$

essendo R_T , ‘raggio’ della Terra (una approssimazione!), la distanza d fra l’oggetto di massa m e il centro della Terra.

- Ma diverse saranno le accelerazioni, a causa delle diverse inerzie:

$$a_m = \frac{F_m^{(M_T)}}{m} = -\frac{G M_T}{R_T^2} \quad (8)$$

$$a_{M_T} = \frac{F_{M_T}^{(m)}}{M_T} = +\frac{G m}{R_T^2} : \quad (9)$$

→ ragione per cui “è il gessetto che cade verso il basso e non la Terra a salire verso l’alto”, pur essendo le due forze uguali in modulo!

• Composizione delle forze

- Se più forze agiscono sullo stesso punto materiale esse **si sommano vettorialmente** (ovvero le varie componenti si sommano fra di loro), sinteticamente

$$\vec{F}_A = \sum_i \vec{F}_A^{(i)},$$

ove l’indice i è esteso a tutte le possibili forze $\vec{F}_A^{(i)}$ che agiscono individualmente su A .

- L’accelerazione risultante sarà ovviamente \vec{F}_A/m_A .
- Se un corpo non ha accelerazione (essere in quiete è un caso particolare) vuol dire che la risultante è nulla.
- Se sappiamo che un corpo è sicuramente soggetto alla *forza peso* e lo vediamo ‘fermo’ (nel nostro sistema di riferimento), come ad esempio il caso del gessetto poggiato sul tavolo, vuol dire che ci deve essere un’altra forza che *si oppone* alla forza peso, ovvero

$$F_m^{(Tavolo)} + F_m^{(Terra)} = 0, \quad (10)$$

o anche

$$F_m^{(Tavolo)} = -F_m^{(Terra)}. \quad (11)$$

(Ma **questa relazione non va confusa con il principio di azione-reazione** espresso dalla (5), trattandosi in questo caso semplicemente di due forze su m che si annullano!)

- **Forza peso in prossimità della superficie terrestre**

Nel caso di oggetti in prossimità della superficie terrestre (e con le approssimazioni specificate sopra) possiamo riscrivere la (6) come

$$F_m^{(M_T)} = -m g, \quad (12)$$

con

$$g = \frac{G M_T}{R_T^2},$$

costante che vale approssimativamente 9.8 N/kg – si noti l’unità di misura: deve essere tale per cui moltiplicando g per una massa si ottiene una forza, la cui unità di misura, ricordiamo, è il newton (‘N’).

- **Corpi in caduta libera**

Nel caso che un punto materiale è soggetto alla **sola forza peso** espressa dalla (12) otteniamo una accelerazione pari a

$$a_m = \frac{F_m^{(M_T)}}{m} = \frac{-m g}{m} = -g. \quad (13)$$

Il motivo per cui nella (13) m si semplifica è dovuto alla *cosiddetta* ‘uguaglianza’ di massa inerziale e gravitazionale (in realtà abbiamo visto che si tratta di proporzionalità: al crescere di m_G aumenta la forza; ma siccome aumenta anche m_I , l’accelerazione è indipendente da ‘ m ’, ignorando i pedici ‘ G ’ e ‘ I ’).

- **Misure di massa**

Tornando finalmente al punto di partenza, che era quello di valutare la massa dell’oggetto di cui siamo interessati alla densità, possiamo usare *virtualmente* due principi di misura.

– Il primo è quello di usare il *secondo principio*, che possiamo riscrivere come

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}},$$

ovvero imprimere una ben precisa forza,² misurare l’accelerazione (attraverso misure di velocità a tempi diversi) e dal loro rapporto ottenere m .

Ma si capisce bene che questo metodo, che fornisce direttamente la massa inerziale, è poco pratico (immaginate al mercato o dal salumiere!).

– Il secondo consiste nel far uso della **forza peso** mettendo un oggetto su una bilancia³ e attendere che il corpo raggiunga lo stato di quiete (quando smette di oscillare). Abbiamo quindi una variante della (11) con ‘Bilancia’ al posto di ‘Tavolo’:

$$F_m^{(Bilancia)} = -F_m^{(Terra)}. \quad (14)$$

Inoltre tali bilance sono tarate direttamente in ‘massa’, ovvero il valore letto è dato direttamente in grammi o chilogrammi (o libbre o, oggi giorno, qualche unità cinese, ma questo è un dettaglio).

² Il fatto che l’unità di misura di forza, il newton (‘N’), sia definito come la forza che, impressa a un oggetto di massa 1 kg, produca una accelerazione di 1 m/s² *potrebbe far pensare a una definizione circolare*. In realtà non è vero in quanto possiamo crearci una scala di forze in altro modo, ad esempio mediante opportune molle (‘dinamometri’) ed effettuare successivamente la conversione in newton.

³Anche le bilance a due piatti fanno uso della forza peso.

Ovviamente, come ben noto, bilance di questo tipo danno valori attendibili solo in prossimità della superficie terrestre, ovvero nelle regioni in cui è valida con buona approssimazione la calibrazione che fornisce *il valore di massa a partire dalla forza che agisce sulla bilancia*. Un caso famoso è l'ipotetico uso sulla Luna in quanto $g_L \ll g$: a parità di m la forza esercitata sulla bilancia sarà inferiore e quindi sul display comparirà un valore di 'massa' molto minore di quello 'vero'.

Un altro caso, che esamineremo in dettaglio nelle prossime lezioni è quando l'oggetto posto sulla bilancia non è soggetto solo alla forza peso (e ovviamente alla reazione del piatto della bilancia). Anche in questo caso il valore di 'massa' letto può essere diverso di quello vero. Si pensi ad esempio filo con il quale l'oggetto da pesare è tirato verso l'altro: la lettura darà quindi un valore di massa inferiore a quello vero.

Domanda su cui riflettere: a parte trucchetti, scherzi o imposture, cos'altro potrebbe spingere verso l'alto l'oggetto da pesare?

2 (Gio 8 marzo)

• Forza di Newton e forza di Coulomb

Al fine di meglio capire il significato delle masse che compaiono nella famosa formula (2) introduciamo anche l'altrettanto famosa legge di Coulomb fra cariche elettriche, in modulo pari a

$$|\vec{F}| = \frac{k |q_1 q_2|}{d^2}, \quad (15)$$

ove k è una costante opportuna (si cerchi su Wiki o si veda sul formulario del corso).

Osservazioni

- A differenza della (2) abbiamo preso il modulo del prodotto delle cariche, in quanto, come *ben noto*, cariche dello stesso segno si respingono, mentre cariche di segno opposto si attraggono.
- Dal confronto fra la (2) e la (15) si nota come le masse (inerziali!) hanno un *significato simile a quello delle cariche elettriche*, con la peculiarità che esse sono tutte dello stesso segno e che la forza è sempre e solo attrattiva.
- L'unità di misura della carica è il coulomb ('C').
 - Ne segue che le *dimensioni fisiche* nel *Sistema Internazionale* (SI) della costante k sono $\text{N C}^{-2} \text{m}^2$ (moltiplicando per coulomb al quadrato e dividendo metri al quadrato dobbiamo ottenere dei newton). Per analoghi motivi, la costante G della gravità deve avere dimensioni $\text{N kg}^{-2} \text{m}^2$.
- Come nel caso della forza di Newton, l'espressione (15) della forza di Coulomb è valida per cariche puntiformi (o oggetti sferici con cariche immobili intrappolate in esso e distribuite omogeneamente all'interno, o anche soltanto sulla superficie esterna⁴).

⁴Nel caso di cariche libere di muoversi, la presenza di un'altro corpo solido non provoca soltanto una forza, ma anche uno spostamento di cariche, e la forza risultante va al di là di quanto possiamo investigare in queste 'poche' lezioni.

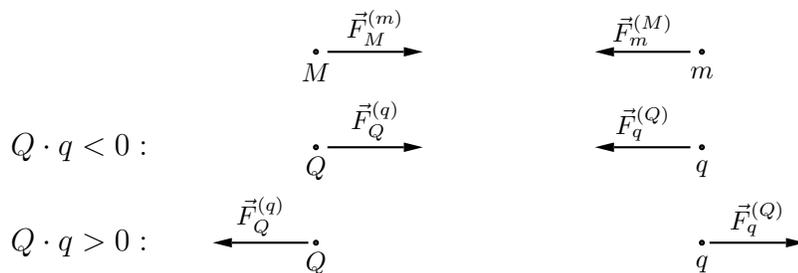


Figura 1: Forza gravitazionale e forza elettrica. L'asse r ha origine nel punto materiale a sinistra ed è orientato verso destra. I versi delle forze sono consistenti con tale convenzione.

- **Tabella di analogia fra forze gravitazionali ed elettriche.** Per essere più precisi, usiamo ora, al posto di d , il simbolo r a indicare una coordinata con origine nell' 'carica' (gravitazionale o elettrica) indicata con la lettera maiuscola (M , o Q , a seconda che si tratti di masse o cariche) e diretto verso quella indicata con la lettera minuscola (m o q), come indicato il Fig. 1. Riscriviamo quindi⁵

$$F_m^{(M)} = -\frac{G M m}{r^2} \quad (16)$$

$$F_q^{(Q)} = \frac{k Q q}{r^2}. \quad (17)$$

Date le due espressioni delle forze (16) e (17), gli effetti dinamici su oggetti 'puntiformi' (o approssimamente tali) derivano dalla ben nota seconda legge di Newton della meccanica, $\vec{a} = \vec{F}/m$, e dal fatto che se su uno stesso punto materiale agiscono più forze, la forza totale è data dalla somma vettoriale delle forze. Ad esempio la forza di attrazione totale fra un elettrone e un protone (si ricorda che queste particelle hanno cariche uguali ed opposte) valgono [con r orientata dal protone (p) all'elettrone (e)]:

$$F_e^{(p)} = -\frac{G m_p m_e}{r^2} - \frac{k Q_e^2}{r^2} \quad (18)$$

$$F_p^{(e)} = +\frac{G m_p m_e}{r^2} + \frac{k Q_e^2}{r^2} \quad (19)$$

da cui si ottengono le rispettive accelerazioni

$$a_e = -\frac{G m_p}{r^2} - \frac{1}{m_e} \frac{k Q_e^2}{r^2} \quad (20)$$

$$a_p = +\frac{G m_e}{r^2} + \frac{1}{m_p} \frac{k Q_e^2}{r^2}. \quad (21)$$

⁵Ricordiamo inoltre – finalmente! – che le costanti G e k valgono rispettivamente

$$\begin{aligned} G &= 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \\ k &= 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}, \end{aligned}$$

anche se, per questioni pratiche, k viene talvolta riscritta come

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

con ϵ_0 , pari a $8.854 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ C}^2 \text{ N}^{-1}$, *costante dielettrica del vuoto* (o più propriamente *permittività elettrica del vuoto*).

Ovviamente, essendo il protone circa duemila volte più ‘pesante’ (‘*massivo*’) dell’elettrone, l’effetto pratico è che sarà l’elettrone a muoversi verso il protone, per lo stesso motivo per cui è la mela (tanto per citare ancora una volta Newton⁶) a cadere. Infatti $a_e/a_p = m_p/m_e \approx 2000$. Inoltre è facile verificare come la forza gravitazionale sia assolutamente trascurabile nelle interazioni fra costituenti della materia, in quanto, ad esempio:

$$F_e^{(p,\text{gravità})}/F_e^{(p,\text{elettricità})} = \frac{G m_p m_e}{k Q_e^2} = 4.4 \times 10^{-40}, \quad (22)$$

essendo $Q_e = -Q_p = -1.602 \times 10^{-19}$ C.

Riscriviamo infine le espressioni delle forze (16) e (17) in modo più generale, usando la notazione vettoriale

$$\vec{F}_m^{(M)}(\vec{r}) = -\frac{G M m}{r^3} \vec{r} \quad (23)$$

$$\vec{F}_q^{(Q)}(\vec{r}) = \frac{k Q q}{r^3} \vec{r}, \quad (24)$$

ricordando che

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{1}{r^2} = \frac{\hat{r}}{r^2}$$

ove, ricordiamo/precisiamo,

- \hat{r} è il versore di \vec{r} , positivo se orientato da M a m o da Q a q [nelle (23) e (24) abbiamo anche esplicitato la dipendenza della forza da \vec{r}];
- nel caso generale 3D, al fine di alleggerire la notazione, abbiamo preferito indicare il modulo di \vec{r} con r anziché con il più rigoroso $|\vec{r}|$.

- **Forze e campi** Può essere interessante (oltre che spesso utile) fattorizzare le espressioni delle forze in due termini: la ‘carica’ che subisce la forza e un fattore che dipende dalla ‘carica’ che la *genera*, dalla sua distanza e ovviamente dalle opportune costanti universali. Questi fattori hanno quindi il significato di *forza per unità di ‘carica’* – elettrica o gravitazionale – e vanno sotto il nome di *campi*. Possiamo quindi riscrivere le (23) e (24) come

$$\vec{F}_m^{(M)}(\vec{r}) = m \cdot \vec{G}^{(M)}(\vec{r}), \quad (25)$$

$$\vec{F}_q^{(Q)}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}^{(Q)}(\vec{r}), \quad (26)$$

ove, chiaramente

$$\vec{G}^{(M)}(\vec{r}) = -\frac{G M}{r^3} \vec{r} \quad (27)$$

$$\vec{E}^{(Q)}(\vec{r}) = \frac{k Q}{r^3} \vec{r}. \quad (28)$$

Un caso notevole, ben noto, anche se raramente posto in questi termini nei manuali scolastici, è quello del caso gravitazionale in prossimità della superficie terrestre, nel

⁶L’episodio mela di Newton sembra veramente avvenuto. Vedi <http://rs.onlineculture.co.uk/accessible/SpreadDetails.aspx?BookID=1807da00-909a-4abf-b9c1-0279a08e4bf2&> <http://blogs.discovermagazine.com/80beats/2010/01/19/1752-manuscript-with-the-real-story-of-newton-and-t>

quale il campo $\vec{G}(R_T)$ ha *intensità* (standard) g , di valore a 9.8 N/kg .⁷ la ben nota accelerazione di gravità standard di valore 9.8 m/s^2 . Esso è diretto verso il basso e quindi possiamo scrivere

$$\vec{G}^{(M_T)}(R_T) = -g \hat{z}, \quad (29)$$

con l'asse z rivolto verso l'alto. In questo modo, come è ben noto, per valutare il modulo della forza basta calcolare mg , invece di dover usare ogni volta l'espressione generale della forza di gravità.

La ragione per cui il campo gravitazione ha dimensioni e significato di accelerazione è dovuto alla ben nota 'uguaglianza' fra massa inerziale gravitazionale ricordata precedentemente: il rapporto fra forza e massa è dal punto di vista di 'causa della forza' un campo e quindi il suo valore andrebbe meglio espresso in N/kg ; dal punto di vista di 'conseguenza della forza' esso invece una accelerazione, la quale si manifesta soltanto se la forza gravitazionale è la sola forza in gioco. Le dimensioni del *campo elettrico* sono, come si evince dalla definizione stessa, Newton su Coulomb (N/C), anche se per ragioni pratiche se ne preferisce un'altra (V/m , "volt su metro"), *come vedremo a suo tempo*.

Per ora i campi possono essere interpretati come dei semplici artifici matematici, in qualche modo utili quando il loro calcolo è facile. Infatti si immagina che in ogni punto intorno ad una 'carica' ci sia un *campo vettoriale*⁸, la cui intensità dipende dalla grandezza della carica 'che lo ha generato' e dal quadrato della distanza del punto dalla carica; la direzione è quella della retta che passa per il punto ove si trova la 'carica' e quello in cui si valuta il campo; il verso punta verso la 'sorgente' nel caso gravitazionale e nel caso elettrico con sorgente negativa, nel verso opposto se è invece prodotto da una carica elettrica positiva, come evidente dalle (27) e (28).

• Altre misure di densità

Effettuiamo ora altre misure di densità, i cui dati sono riportati sul file dei problemi del quaderno individuale. Chiariamo qui le ragioni della scelta dei vari oggetti.

- blocco di legno: 'parallepeipedo' (almeno nel **modello** semplificato);
- piramide: ripasso del volume della piramide (e del cono!);
- uova: solidi non banali, di cui si può misurare il volume sia in modo 'empirico' mediante il principio di spostamento del fluido (grazie alla *non penetrabilità* di tali corpi) che facendo uso di un modello (approssimato!) ellissoidale;
- sassi di forma irregolare: l'*unico* modo (facile) per valutarne il volume è per immersione, come la famosa misura della corona del tiranno di Siracusa da parte di Archimede (episodio a cui è legato il famoso "Eureka!");

⁷Il valore usuale di g è pari a 9.8 m/s^2 , facendo riferimento all'accelerazione in caduta libera. Ma come rapporto forza/massa l'unità N/kg è molto più naturale, anche se ovviamente dimensionalmente equivalente. A tale proposito si fa notare che esistono altri modi per esprimere g , intesa come accelerazione, e che potrebbe agevolare la comprensione da parte degli studenti delle medie e del grande pubblico, evitando di far riferimento ai misteriosi "secondi al quadrato":

- 9.8 (m/s)/s rende molto bene l'idea che ogni secondo la velocità aumenta di $9.8 \text{ m/s} \approx 10 \text{ m/s}$. Quindi $\approx 10 \text{ m/s}$ dopo un secondo, $\approx 20 \text{ m/s}$ dopo due secondi, e così via.
- 35 (km/h)/s fa capire ancora meglio il concetto al grande pubblico.

⁸In generale, l'espressione **campo vettoriale** indica semplicemente che ad ogni punto dello spazio è assegnato un vettore. Se si assegna soltanto un numero abbiamo un **campo scalare**, come ad esempio nel caso delle temperature e pressioni mostrate nelle mappe meteorologiche (nel caso del vento il campo è ovviamente vettoriale in quanto, oltre all'intensità, contano anche direzione e verso).

- blocco di polistirolo: in principio sembra simile al caso del blocco di legno, ma la misura è complicata dal fatto la *spinta di Archimede* sul polistirolo non è affatto trascurabile!

- **Osservazioni di metrologia**

- **Misure dirette:** sono quelle ottenute leggendo il valore direttamente dallo strumento di misura, indipendentemente da quanto complicato esso possa essere e dal fatto che lo strumento possa essere a *lettura analogica* o *digitale* (velocità su tachimetro; temperatura su un termometro; tensione su un voltmetro; densità su un densimetro; etc.)
- **Misure indirette:** sono quelle ottenute a partire da quelle dirette, come stiamo facendo nel caso dei volumi e delle densità. Anche in questi casi si parla di **misura** (“**ho misurato** la densità del polistirolo”) e non di ‘calcolo’ (“ho calcolato la densità del polistirolo”), anche se di calcoli bisogna farne non pochi.
- **Dimensioni** delle grandezze fisiche e **controllo dimensionale:** nei conti le dimensioni vanno riportate in tutti i passaggi e non ‘inventate’ alla fine; se il risultato non ha le dimensioni attese, a parte equivalenze, sulle quali torneremo, è segno che c’è qualche errore nelle formule usate (o nell’uso delle stesse).
- **Cifre significative:** è qualcosa che merita una riflessione e vedremo un po’ alla volta. Per ora, l’indicazione è di *portarsi dietro qualche cifra in più* per non dover rifare i conti e che **la maledetta usanza** scolastica delle **due cifre** dopo la virgola non è basata su alcun fondamento logico/scientifico/metrologico.

- **Equazione di stato dei gas perfetti**

Assunta già ben nota dal corso di Chimica (e dalle superiori), la usiamo qui per valutarci la **spinta di Archimede sui corpi in aria:**

- dati P , V e T (vedi dati su ‘quaderno individuale’) ci ricaviamo n , numero di moli di aria ‘spostate’;
- da ragionevoli assunzioni sulla composizione dell’aria ci ricaviamo la massa del ‘fluido spostato’;
- possiamo finalmente *misurare* la correzione da apportare alla massa del **polistirolo** e quindi anche alla densità ottenute precedentemente;
- e ovviamente *misuriamo* anche la densità dell’aria.

3 (Lun 12 marzo)

- Breve riepilogo della volta scorsa: forza di Newton e di Coulomb; forze e campi.

- **Misure di densità**

Schema concettuale sulla determinazione di $\rho = m/V$

- m : quale ‘massa’? Gravitazionale o inerziale? Come valutarla? (Principio di misura)

- Cosa misura veramente lo strumento? Principio di funzionamento di una bilancia commerciale. Importanza di altre possibili forze che agiscono sul corpo (oltre la forza peso). Caso macroscopico della spinta di Archimede nel caso della misura della massa del polistirolo.
- V : Come si valuta nei vari casi? Modelli geometrici (sono sempre approssimazioni!). Misure per immersione e principio sottostante (incompenetrabilità dei corpi).
- Complicazioni quando si vuole misurare la densità di Terra e Luna.

- **Densità della Terra**

Volume Modello geometrico (approssimato delle Terra). Misura di un meridiano a partire da un suo arco.

→ Eratostene

(Cenno alle misure francesi del XVIII secolo, le ultime delle quali focalizzate alla determinazione della lunghezza del metro, definito come “decimilionesima parte del quarto di meridiano”).

Massa Si effettua invertendo la legge di Newton sulla gravità:

$$(G, m, R_T, F) \longrightarrow M_T.$$

→ Serve G .

Costante di gravità (G) Esperimento di Cavendish, a partire dalla forza esercitata fra due masse note a distanza nota:

$$(m_1, m_2, d, F) \longrightarrow G.$$

(senza dettagli – chi è interessato veda il video linkato in fondo alla pagina web del corso).

- **Altri oggetti celesti:** Sole, Luna, etc. Cominciare a pensarci.
- **Pesa più un chilo di piombo o un chilo di polistirolo?** Non è uno scherzo se si chiarisce il senso della domanda:
 1. Se si pongono, alternativamente, su una bilancia un blocco di piombo e un blocco di polistirolo, ciascuno di massa 1000 g, in quale dei due casi la bilancia indicherà il valore maggiore?
 2. Se si pongono, alternativamente, su una bilancia un blocco di piombo e un blocco di polistirolo, e in entrambi i casi la bilancia indica 1000.0 g, quale dei due oggetti ha la massa maggiore?
- **Esperimento in aula del “dito nell’acqua”:** spinta di Archimede + “azione e reazione”

4 (Mar 13 marzo)

- **Chiarimenti** sulle lezioni precedenti e sui **problemi** in corso.
- Ancora misure di **massa delle uova**: si sono alleggerite di circa 1 grammo in una settimana! (prima o poi potranno galleggiare?)
- **Questioni metodologiche**:
 - Usare unità di misura appropriate per favorire la ‘percezione’ del risultato (ad esempio il volume del blocco di polistirolo, espresso in litri, da veramente un’idea di quanto sia).
 - Valutare se il risultato è ragionevole: un uovo (di gallina) non può pesare né mezzo chilo (una bottiglietta di acqua!) e nemmeno un grammo (un cm^3 di acqua!).
- Formula di **correzione della densità misurata** per tener conto della spinta di Archimede.
 - Bilancio delle forze sul piano della bilancia.
 - Ba bilancia è tarata per fornire un valore di massa nell’ipotesi che ci siano solo due forze sul corpo: la forza peso verso il basso e la forza della bilancia verso l’alto, tali che la loro somma si annulli (da non confondere con la coppia azione-reazione secondo il terzo principio!).
 - Se sono presenti altre forze che agiscono sul corpo (spinta verso l’alto di Archimede; filo che tira verso l’alto; dito che spinge verso il piatto per truffare sul peso; forze elettriche; etc.) il *valore letto* non corrisponderà con il **valore vero**.
 - Nel caso di sola forza peso e spinta di Archimede, avremo che la forza sull’oggetto (verso positivo verso il basso) è pari a $m_V g - m_A g$, con M_V la massa vera e M_A la massa di aria spostata. Ne segue che la bilancia fornirà un valore m_L (‘valore letto’) tale che

$$m_L g = m_V g - m_A g, \quad (30)$$

da cui segue, indicando con ρ la densità vera del corpo, con ρ° quella ‘di prima approssimazione’ e con ρ_A la densità dell’aria:

$$m_L g = \rho V g - \rho_A V g \quad (31)$$

$$\rho V g = m_L g + \rho_A V g \quad (32)$$

$$\rho V = m_L + \rho_A V \quad (33)$$

$$\frac{\rho V}{V} = \frac{m_L}{V} + \frac{\rho_A V}{V} \quad (34)$$

$$\rho = \frac{m_L}{V} + \rho_A \quad (35)$$

$$\rho = \rho^\circ + \rho_A. \quad (36)$$

Quindi la densità vera del polistirolo è pari a quella valutata inizialmente (ignorando Archimede) aumentata della densità dell’aria. Un’altra formula utile è quella che fornisce il fattore di correzione a ρ° :

$$\rho = \rho^\circ \left(1 + \frac{\rho_A}{\rho^\circ} \right). \quad (37)$$

Casi limite:

- * su un corpo di elevata densità la correzione per la spinta di Archimede è trascurabile;
 - * se si mettesse un ipotetico contenitore dalle pareti di massa trascurabile e contenente aria a pressione atmosferica sulla bilancia la lettura sarebbe zero, ovvero $\rho^\circ = 0$, e la sua densità è quindi, giustamente, pari a ρ_A .
-

5 (Gio 15 marzo)

- Problema 5.1 proposto in aula come ‘riscaldamento’.
- **Primo controllo quaderni**
 - Si ricorda che i problemi vanno fatti di volta in volta e che **il quaderno va portato sempre**, per verificare quanto fatto o per recuperare informazioni su di esso nel caso di nuovi problemi collegati a quelli già svolti.
 - Si ricorda inoltre che è buona norma corredare le soluzioni di **figure illustrative** anche se non si è Leonardo.
 - È anche opportuno menzionare in modo schematico su cosa (legge fisica, etc.) è basata la soluzione, mentre è inutile riportare la traccia (al più si può inventare un titolo, ma se si disegna una figura si capisce meglio di cosa si sta parlando).
- Semplice problema di cinematica sulle velocità medie ($\bar{v} = v_m = \Delta s / \Delta t$): → vedi quaderno.
- Ancora sul problema della **pesata piombo/polistirolo**.
Attenzione: nel problema 3.4 c’era un refuso nel valore di densità del polistirolo in quanto l’unità di misura doveva essere kg/m^3 . (Da cui il risultato assurdo!)
- **ABC di cinematica**
 - Dalla velocità media ($\bar{v} \equiv v_m = \Delta s / \Delta t$) alla velocità istantanea: $\Delta t \rightarrow 0$.
Nota: con s indichiamo la generica ‘coordinata curvilinea’, ovvero quella che associamo a una strada o a un sentiero, che possono essere sia dritti che fare curve o avere tratti in salita.
 - Velocità come **pendenza** (*media* o *locale*) della curva in cui viene rappresentata s (sull’asse delle ordinate) in funzione di t (sull’asse delle ascisse).
 - Accelerazione media ($\bar{a} \equiv a_m = \Delta v / \Delta t$) e accelerazione istantanea (quando $\Delta t \rightarrow 0$).
 - Accelerazione come **pendenza** (*media* o *locale*) della curva in cui viene rappresentata v (sull’asse delle ordinate) in funzione di t (sull’asse delle ascisse).
 - Coordinate cartesiane, loro velocità e accelerazione:
da velocità media ($\bar{v}_x = \Delta x / \Delta t$) a velocità istantanea (per $\Delta t \rightarrow 0$);
da accelerazione media ($\bar{a}_x = \Delta v_x / \Delta t$) a accelerazione istantanea (per $\Delta t \rightarrow 0$).
⇒ Idem per le coordinate y e z .
 - Quanto detto precedentemente sulle rappresentazioni grafiche di s in funzione di t e di v in funzione di t si applica alle componenti.

- La rappresentazione vettoriale, con \vec{r} , \vec{v} e \vec{a} rappresenta un modo compatto per indicare le componenti:

$$\vec{r} = \{x, y, z\} \quad (38)$$

$$\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\} \quad (39)$$

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}. \quad (40)$$

Ad esempio, per le velocità medie abbiamo che la notazione

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (41)$$

è equivalente a scrive esplicitamente

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (42)$$

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (43)$$

$$\bar{v}_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (44)$$

e così via.

- Illustrazione dei problemi 5.3 e 5.4

- Ancora (in modo più approfondito) sul concetto di **pressione**: è uno *scalare* (e i campi di pressione della meteorologia sono *campi scalari*).
- Significato della **pressione all'interno di un fluido**: forza su ipotetica *superficie di prova* e sulle pareti.
- **Legge di Stevino** e conseguente **legge di Archimede**.
- Problema del “canottino con incudine” (vedi problema 5.9).

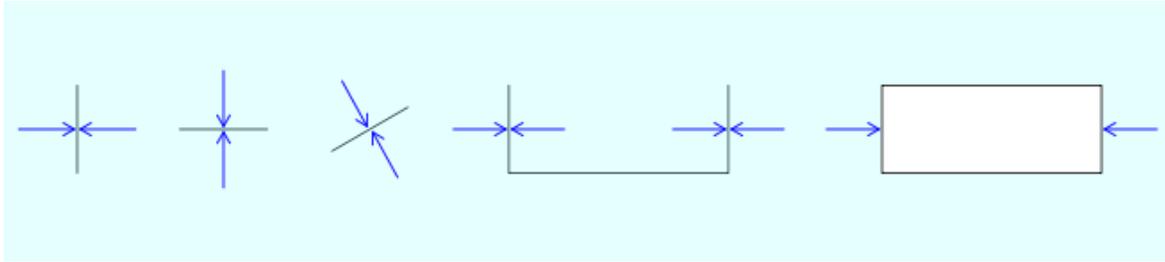


Figura 2: Forze su *superfici di test* dovute alla pressione all'interno di un fluido.

Pressione nei fluidi

Gli aspetti più interessanti e per addirittura intriganti della pressione riguardano i fluidi. Infatti tale grandezza è definita all'interno di gas e liquidi anche senza che siano presenti in maniera palese delle forze applicate su superfici ad esse ortogonali. In particolare la pressione in ciascun punto del fluido è definita mediante esperimenti concettuali, eventualmente verificabili. Si può dire che *la pressione di un fluido sia una proprietà in virtù della quale, data una (piccola) superficie piana, ipotetica o reale, a contatto con esso e comunque orientata, il fluido esercita su di essa una forza ad essa ortogonale la cui intensità è pari al prodotto della pressione per l'area della superficie*. La piccolezza della superficie nella definizione è richiesta in quanto se la superficie *di test* non è perfettamente orizzontale la pressione, come vedremo fra poco, varia da punto a punto. Se il fluido è connesso ad opportuno pistone possiamo misurare la pressione *media* come rapporto fra forza che bisogna applicare al pistone per tenerlo fermo e l'area del pistone a contatto con la superficie (come al solito si stanno trascurando le eventuali forze di attrito, nella pratica tenute a livelli accettabili mediante opportuna lubrificazione).

La figura 2 riporta alcuni esempi nei quali sono mostrate ipotetiche superfici, viste trasversalmente, con le forze dovute alla pressione nei punti i cui terminano le frecce dei vettori-forza. Si noti come le frecce abbiano tutte la stessa lunghezza, ad indicare che le tutte le forze raffigurate in figura hanno tutte lo stesso modulo, in quanto tutti i punti sono presi alla stessa altezza all'interno del fluido.

Il rettangolo chiaro a destra rappresenta infine una superficie chiusa e tale quindi per cui la forza sulle pareti esterne non è compensata da una forza all'interno. (Si noti comunque come, alla stessa quota, le forze esterne di pressione siano uguali e contrarie e quindi la risultante delle forze lungo il piano orizzontale è nulla, come si evince peraltro da argomenti di simmetria.) Si noti come la pressione sia una grandezza scalare in quanto la direzione della forza che deriva è legata alla superficie di test, la quale può avere un orientamento arbitrario.

Ricordiamo che il motivo per cui in genere non ci rendiamo conto della pressione atmosferica è che essa agisce da tutte le direzioni e quindi dà risultante nulla.⁹ Ad esempio la forza totale sul palmo della mano vale circa 1000 N (prendiamo una superficie di circa 100 cm²), pari a quella che agisce sul dorso.

Ma il fatto che le due forze si annullano *non è come se non ci fossero*. La risultante nulla significa ad esempio che la mano non subisce una accelerazione (in quale direzione?), ma lo schiacciamento lo subisce e come! Soltanto che il nostro organismo è fatto per vivere

⁹Non si confondano le forze dovute alla pressione con quelle di resistenza dell'aria!

immersi nell'aria. Ma se essa cambia molto al valore normale se ne accorge, con risultati che possono essere anche letali.

Dopo questa introduzione sul concetto di pressione dei fluidi, passiamo in rassegna i principali aspetti fenomenologici legati a tale grandezza fisica, alcuni peraltro ben noti e che fanno parte della cultura generale.

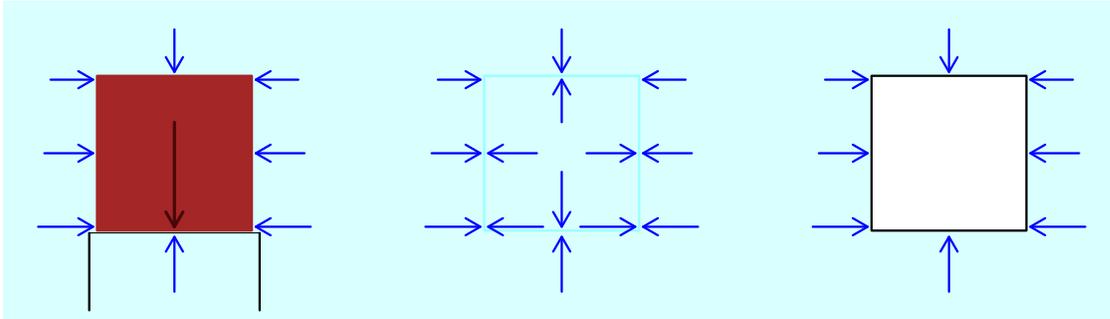


Figura 3: Forze di pressione su oggetti immersi in un fluido

Legge di Stevino e principio di Archimede

Prendiamo un oggetto immerso in un fluido *omogeneo e in equilibrio*, come raffigurato nel disegno a sinistra di figura 3, ove per semplicità è raffigurato un cubo poggiato su un tavolo stilizzato. Le frecce dirette verso le facce del cubo rappresentano le forze dovute alla pressione del fluido sui diversi elementi di superficie. La lunghezza delle frecce aumenta scendendo verso il basso in quanto, come vedremo fra un attimo la pressione aumenta per effetto del peso del fluido sovrastante.

Analisi di una porzione di fluido in condizioni di equilibrio

Per capire cosa succede, conviene partire dal disegno al centro della stessa figura, il quale mostra un cubo all'interno del fluido stesso. Il ragionamento geniale consiste nel dire che se il cubo è in equilibrio con il resto del fluido le forze su di esso si devono equilibrare. Per capire meglio il ragionamento, si immagini un cubo di fluido uguale a quello in cui è immerso, contenuto in un recipiente avente le pareti che abbiano esattamente la stessa densità del fluido. Ne segue che

- la forze laterali si devono bilanciare esattamente;
- la forza dal basso verso l'alto sulla faccia inferiore deve essere maggiore di quella dall'alto verso l'alto sulla faccia superiore per compensare la forza peso del cubo di fluido:

$$F_{\uparrow} = F_{\downarrow} + m_F g, \quad (45)$$

ove abbiamo indicato la massa con m_F per ricordare che si tratta della massa del fluido (all'interno del cubo);

- le pressioni in alto e in basso sono quindi legate dalla relazione

$$P_b = \frac{F_\uparrow}{A} = \frac{F_\downarrow + m_F g}{A} \quad (46)$$

$$= \frac{F_\downarrow}{A} + \frac{(\rho A h) g}{A} \quad (47)$$

$$= P_a + \rho g h, \quad (48)$$

ove abbiamo indicato con h l'altezza del cubo, con A la sua area di base e abbiamo espresso la massa come densità per volume.

Come si capisce bene, l'equazione ottenuta non dipende dalla forma della colonna di fluido, mentre richiedeva che il fluido fosse *stazionario* ('in equilibrio' – forze e pressioni all'interno di liquidi in movimento, specie se in 'moto turbolento', sono più complicate da trattare) e assumeva implicitamente che la sua *densità non dipendesse dalla profondità*.¹⁰ Essa è nota come *legge di Stevino*¹¹ ed è spesso scritta come pressione ad una certa profondità h (' h ' diretto verso il basso!) in funzione alla pressione per $h = 0$:

$$P = P_0 + \rho g h. \quad (49)$$

Essa può essere convenientemente espressa in forma differenziale, ovvero come variazione di pressione per unità di variazione dell'altezza del fluido

$$\frac{dP}{dh} = \rho g. \quad (50)$$

Ad esempio per l'acqua essa vale¹²

$$\left. \frac{dP}{dh} \right|_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ N/kg} = 9.8 \frac{\text{kPa}}{\text{m}} = 98 \frac{\text{mbar}}{\text{m}} \approx 1 \frac{\text{mbar}}{\text{cm}}.$$

Altri valori interessanti sono quelli dell'aria ($\approx 12 \text{ Pa/m}$) e del mercurio ($\approx 1.33 \text{ bar/m}$, ovvero $\approx 1.33 \text{ mbar/mm}$).

Si capisce bene che la forza di Archimede verso l'alto, in caso di corpo completamente immerso nel fluido e facendo uso della (45), è semplicemente pari

$$F_A = F_\uparrow - F_\downarrow \quad (51)$$

e quindi è pari a $m_F g$, ove abbiamo scritto esplicitamente m_F al posto

¹⁰Si parla in questi casi di 'fluidi incompressibili', il che farebbe pensare che non tale formula sia valida per l'aria, visto che tutti sappiamo, gonfiando ruote di auto e di bicicletta, che essa si comprime (l'equazione di stato dei gas ci dice che il numero di moli per volume vale $n/V = P/RT$). La richiesta di 'incompressibilità' di questa formula serve soltanto a garantire che a diverse quote la densità del fluido non cambi per effetto della variazione di pressione fra le due quote. Come vedremo fra poco la variazione di pressione dell'aria con l'altezza vale circa 12 Pa/m , ovvero la sua densità varia di circa una parte su diecimila per ogni metro di dislivello.

¹¹È curioso notare che questo nome sia una frutto di una tradizione italiana e la voce *Legge di Stevino* di Wikipedia ha un corrispondente soltanto sulla versione portoghese. Curiosando fra le versioni inglese e tedesca si vede come la legge porta il nome di Pascal (http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_law e http://de.wikipedia.org/wiki/Pascalsches_Gesetz), mentre in quella francese la (49) è semplicemente chiamato *le théorème fondamental de l'hydrostatique* (http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_Pascal) derivato, insieme alla legge nota in Italia come *legge di Pascal* e che vedremo fra poco (*toute pression exercée sur un liquide se transmet par lui intégralement et dans toutes les directions*), da un 'Principe de Pascal' che suona (curiosamente) così: *Dans un liquide en équilibre de masse volumique uniforme, la pression est la même en tout point du liquide et cela aussi longtemps que ces points sont à la même profondeur.*

¹²Notare $g = 9.8 \text{ N/kg}$!

6 (Lun 19 marzo)

Velocità media per velocità costante in intervalli temporali Δt_i

Ripartendo dal problema 5.1.b del quaderno, abbiamo

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \quad (52)$$

Il caso particolare del problema 5.1.b corrisponde a $\Delta t_1 = \Delta t_2$. La velocità è quindi pari a

$$v_m = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_1}{2 \Delta t_1} = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

media aritmetica delle due velocità.

Nel **caso generale**, si riconosce nella (52) una *media pesata*¹³ delle velocità, con i pesi pari ai tempi di percorrenza a ciascuna velocità, che possiamo estendere a un numero arbitrario di intervallini:

$$v_m = \frac{\sum_i v_i \Delta t_i}{\sum_i \Delta t_i} \quad (53)$$

Velocità media per velocità costante in intervalli spaziali Δs_i

Diverso è invece il caso quando le velocità sono costanti in tratti Δs_i , come nel problema 5.1.a (proposto *giustamente* per primo come 'trabocchetto'). In questo caso abbiamo invece, nel caso di due intervalli Δs_1 e Δs_2

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \quad (54)$$

$$= \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2}{\Delta s_1/v_1 + \Delta s_2/v_2} \quad (55)$$

Il caso particolare del problema 5.1.a corrisponde a $\Delta s_1 = \Delta s_2$. La velocità è quindi pari a

$$v_m = \frac{2 \Delta s_1}{\Delta s_1/v_1 + \Delta s_1/v_2} = \frac{2}{1/v_1 + 1/v_2},$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{1}{v_m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right),$$

media armonica delle due velocità, ovvero *il reciproco della velocità media è pari alla media aritmetica dei reciproci delle due velocità*. Essa è quindi inferiore alla media aritmetica delle velocità. Nel caso particolare in cui una delle velocità è molto inferiore dell'altra, questa 'vince' nella media. Ad esempio, se $v_2 = v_1/\alpha$ (con α grande, ad esempio 100), otteniamo

$$\frac{1}{v_m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1/\alpha} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{\alpha}{v_1} \right) = \frac{\alpha + 1}{2 v_1},$$

da cui

$$v_m = \frac{v_1}{(\alpha + 1)/2} = 2 \frac{\alpha}{\alpha + 1} v_2 \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 2 v_2.$$

Insomma, anche se v_1 è 'infinitamente maggiore' di v_2 la velocità media sarà pari a due volte v_2 .

¹³Si ricorda che è già stata incontrata nel corso un media pesata: quando? E ne vedremo altre.

Velocità media per velocità costante in n intervalli temporali della stessa durata

Ritorniamo al primo caso visto precedentemente e focalizziamo la nostra attenzione al caso di n intervallini della stessa durata Δt . La (53) si riduce allora a

$$v_m = \frac{\sum_i v_i \Delta t}{n \Delta t} = \frac{\sum_i v_i}{n}, \quad (56)$$

ovvero anche in questo caso, come da attenderci, la velocità media è pari alla media aritmetica delle velocità.

Ma lo scopo per il quale ci siamo ricavati questo risultato è in preparazione del problema che affronteremo nel prossimo punto. Immaginiamo che nei diversi intervalli Δt la *velocità vari linearmente*. Ad esempio, nel primo potrebbe essere v_1 , nel secondo $v_1 + \Delta v$, nel terzo $v_1 + 2 \Delta v$, etc., fino a $v_n = v_1 + (n-1) \Delta v$ nell' n -imo intervallo. Le n velocità formano quindi i termini di una *progressione aritmetica*¹⁴ di 'ragione' Δv , la cui somma vale

$$\sum_{i=1}^n v_i = \frac{v_1 + v_n}{2} n, \quad (57)$$

La (56) diventa quindi

$$v_m = \frac{\sum_i v_i}{n} = \frac{1}{n} \frac{v_1 + v_n}{2} n = \frac{v_1 + v_n}{2}. \quad (58)$$

un risultato abbastanza intuitivo:¹⁵ *se la velocità varia nel tempo linearmente,*¹⁶ *la velocità media è pari alla media aritmetica fra la velocità iniziale e quella finale.* Questa osservazione è valida anche quando gli intervalli di tempo diventano molto piccoli, ovvero “nel limite $\Delta t \rightarrow \infty$ ”, e quindi v varia *con continuità* da $v(t_1)$ a $v(t_2)$ o, come si preferisce in fisica, da $v(t_0)$ al generico $v(t)$.

Moto uniformemente accelerato

Se un moto è uniformemente accelerato (o ‘decelerato’, ovvero con a negativa), la velocità varia linearmente con il tempo. Possiamo far quindi uso del risultato appena ottenuto per valutare sia la velocità media che lo spazio percorso.

Caso di $v_0 = v(t=0) = 0$

Con riferimento al problema 5.3, con $v_0 = 0$,

$$\begin{aligned} v(t) &= at \\ v_m(t) &= \frac{0 + v(t)}{2} = \frac{at}{2} \\ s(t) = v_m(t) \cdot t &= \frac{at}{2} t = \frac{1}{2} at^2. \end{aligned}$$

¹⁴Che non l’avesse mai incontrata alle superiori non si spaventi. Il risultato finale è semplice e intuitivo.

¹⁵Ma si faccia attenzione all’intuizione, come ha insegnato il problema 5.1.a!

¹⁶“Nel tempo” è sottolineato, in quanto **se la velocità varia linearmente con la posizione tale relazione non è valida**. Vedremo nel seguito un problema di questo tipo.

Caso generale, con $v_0 \neq 0$

$$\begin{aligned}v(t) &= v_0 + a t \\v_m(t) &= \frac{v_0 + v(t)}{2} = \frac{v_0 + v_0 + a t}{2} = v_0 + \frac{1}{2} a t \\s(t) = v_m(t) \cdot t &= \left(v_0 + \frac{1}{2} a t \right) \cdot t = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.\end{aligned}$$

Ovviamente questo è lo spazio percorso nel tempo t dalla posizione iniziale. Se indichiamo la generica posizione iniziale con s_0 , otteniamo la più generica

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Caso particolare, con $a = -g$ (sola forza peso, riferimento verso l'alto)

Se prendiamo s diretta verso l'alto (a volte indicata anche con z – ma quando il moto è unidimensionale la notazione è “a piacere”, basta capirsi)

$$\begin{aligned}v(t) &= v_0 - g t \\s(t) &= s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}$$

Se avessimo indicato la coordinata verticale con z avremmo avuto, equivalentemente

$$\begin{aligned}v_z(t) &= v_{z_0} - g t \\z(t) &= z_0 + v_{z_0} t - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}$$

o anche (indicando con h l'altezza e semplicemente con v la velocità, visto se si capisce di cosa si sta parlando),¹⁷

$$h(t) = h_0 + v t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Moto in due dimensioni in presenza di sola forza peso

In generale, la velocità iniziale ha sia una componente orizzontale che una verticale. La indicheremo quindi con il vettore

$$\vec{v}_0 = \{v_{x_0}, v_{y_0}\},$$

ove, tanto per fare un po' di ginnastica mentale, e familiarizzare con le notazioni sono di comodo, abbiamo indicato l'asse orizzontale con x e quello verticale con y , ovviamente rivolto verso l'alto, secondo la familiare notazione del piano cartesiano. Essendo la forza peso diretta verso il basso, otteniamo, dalla seconda legge di Newton l'accelerazione:

$$\begin{aligned}\vec{F} = \{F_x, F_y\} &= \{0, -m g\} \\ \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} &= \{0, -g\}.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

¹⁷Si cerchi di non memorizzare le formule, che *sembrano* tante: la sostanza è sempre la stessa, cambia solo la notazione!

- un **moto rettilineo uniforme** lungo x ;
- un **moto uniformemente accelerato** lungo y .

La regola per analizzare il moto in più dimensioni, a partire dalle condizioni iniziali e dalla forza (che eventualmente può dipendere dalla posizione e dal tempo, ma non nel nostro caso elementare) è che **il moto lungo un asse è indipendente da quello lungo gli altri assi, mentre il tempo è comune.**

Esperimenti in aula

- Sul significato di moto con accelerazione verticale costante (sola forza peso!).
- Analisi del moto di oggetto lanciato orizzontalmente (vedi problema 6.3).

Grafici orari (o ‘equazioni orarie’) e ‘pendenze’ delle curve di $s(t)$ e di $v(t)$ in funzione del tempo.

Posizione in funzione del tempo (curva molto variegata alla lavagna).

- *Pendenza media* di s in funzione di t : velocità media.
- *Pendenza locale* di s in funzione di t : velocità istantanea.

Pendenze nulle corrispondono a velocità nulla.

Casi particolari (‘retta’ fr virgolette in quanto si tratta ovviamente di segmenti):

- **Oggetto fermo:** s non varia con il tempo: ‘retta’ parallela all’asse dei tempi (sull’ascissa);
- **Moto a velocità costante:** la curva $s(t)$ è una ‘retta’ più o meno inclinata a seconda della velocità

Velocità in funzione del tempo.

- *Pendenza media* di v in funzione di t : accelerazione media.
- *Pendenza locale* di v in funzione di t : accelerazione istantanea.

Pendenze nulle corrispondono ad accelerazione nulla.

Casi particolari

- **Moto rettilineo uniforme:** v non varia con il tempo: ‘retta’ parallela all’asse dei tempi;
- **Moto uniformemente accelerato:** la curva $v(t)$ è una ‘retta’ più o meno inclinata a seconda della velocità;
- **Sola forza peso:** le rette $v_y(t)$ hanno tutte la stessa pendenza negativa:
 - i possibili valori della velocità iniziale lungo la verticale (v_{y0}) danno luogo a rette parallele, che differiscono per l’intercetta (pari appunto a $v_{y0}(t)$);
 - il caso di $v_{y0} > 0$ corrisponde a oggetti lanciati verso l’alto;
 - il caso di $v_{y0} = 0$ corrisponde a oggetti lasciati cadere;
 - il caso di $v_{y0} < 0$ corrisponde a oggetti scagliati verso il basso;
 - nel caso di $v_{y0} > 0$ l’istante in cui $v_y(t) = 0$ corrisponde al punto più in alto, quando la velocità si annulla per cambiare segno.

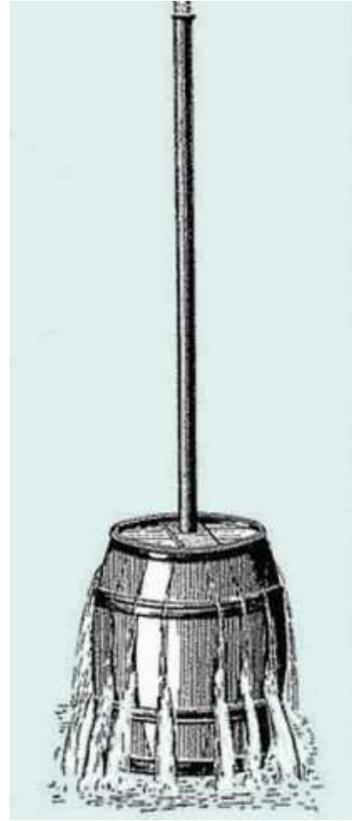


Figura 4: Casi celebri del cosiddetto ‘paradosso idrostatico’. A sinistra, monumento al leggendario “Eroe di Haarlem”. A destra esperimento della ‘botte di Pascal’.

Ancora idrostatica

Paradosso idrostatico

Tornando alla **Legge di Stevino**, Eq.(49), si noti come l’aumento dipende soltanto dall’altezza della ‘colonna’ di fluido e non dalla massa di fluido in essa contenuto (né tantomeno dalla forma – il fatto che nel nostro ragionamento siamo partiti con un cubo e abbiamo poi implicitamente esteso il discorso ad un parallelepipedo retto di base quadrata è assolutamente irrilevante, in quanto abbiamo fatto uso soltanto della sezione della ‘colonna’, che si semplifica, e della sua altezza).

Questo fatto è abbastanza controintuitivo, tanto da essersi meritato secoli fa l’appellativo di *paradosso idrostatico*. Una dimostrazione plateale fu fatta da Pascal, il quale dimostrò come la colonna d’acqua contenuta in un tubo relativamente sottile poteva sfondare una botte se la colonna fosse stata sufficientemente elevata, come illustrato artisticamente in figura 4. La figura mostra anche il monumento al leggendario “Eroe di Haarlem”, la cui storia è raccontata all’interno del libro per ragazzi ‘Pattini d’Argento’. Il ragazzo olandese, essendosi accorto che una diga stava cedendo, turò la falla con un dito, rimanendo tutta la notte al freddo in attesa dei soccorsi. (La ‘straordinarietà’ del fatto è, a parte il gesto eroico del bambino, come il dito di un bambino potesse opporsi ai “milioni e milioni” di tonnellate di acqua del Mare del Nord.)

7 (Mar 20 marzo)

Ancora lanci orizzontali

Delucidazioni sull'esperimento della lezione scorsa.

Problema della 'incudine' a bordo e a fondo

Nel primo caso sposta un volume di acqua pari al suo peso, nel secondo pari al suo volume. (Vedi foto sul sito del corso.)

Problema analogo: come cambia il livello dell'acqua del del ghiaccio, inizialmente galleggiante, si scioglie in essa? (Vedi problema 7.2)

Velocità di oggetti in orbita circolare

- Cannone di Newton (vedi dettagli sul sito del corso).
- Calcolo della velocità di corpo in orbita radente intorno alla Terra (ovviamente caso idealizzato, trascurando montagne e, soprattutto, atmosfera).
 - Ad un certo istante la traiettoria è tangente alla superficie terrestre, e quindi ortogonale al raggio. Per comodità ci concentriamo su un punto 'in alto', con tangente orizzontale, come da figura a lezione.
 - In un 'piccolo' tempo t il punto materiale si sposta orizzontalmente di vt .
 - Nello stesso tempo 'cade' verso la Terra di $gt^2/2$.
 - Il punto materiale è in orbita circolare se dopo il tempo t si ritrova alla stessa distanza dal centro della Terra. Da quel momento tutto ricomincia da capo (il punto materiale cade all'infinito, ma si sposta orizzontalmente all'infinito e così rimane sempre alla stessa distanza dal centro della Terra).
 - Il punto iniziale, quale in cui termina dopo t e quello diametralmente opposto (diametro terrestre) rispetto al punto iniziale formano un **triangolo rettangolo**, con ipotenusa il diametro terrestre e altezza pari a vt .
 - A questo diametro applichiamo il secondo **teorema di Euclide** (altezza media proporzionale fra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa):

$$\left(\frac{1}{2}gt^2\right) : (vt) = (vt) : \left(2R_T - \frac{1}{2}gt^2\right) \quad (59)$$

che, essendo $gt^2/2 \ll 2R_T$ possiamo scrivere come

$$\left(\frac{1}{2}gt^2\right) : (vt) = (vt) : (2R_T) \quad (60)$$

da cui

$$v^2 t^2 = \frac{1}{2}gt^2 2R_T = gR_T t^2 \quad (61)$$

$$v = \sqrt{gR_T}, \quad (62)$$

ove, ricordiamo, che g ha in questo caso il significato di *accelerazione centripeta* (verso il centro della traiettoria circolare).

- Altre osservazioni importanti:

- Inizialmente la velocità era orizzontale. Dopo che il corpo è avanzato orizzontalmente di vt cadendo di $gt^2/2$ si ritrova sulla superficie della Terra e prosegue *orizzontalmente rispetto alla verticale in quel punto*. Questo accade, istante per istante, durante l'orbita circolare.
 - Il vettore velocità è 'sempre' ('istante per istante') tangenziale alla traiettoria (circolare) e quindi ortogonale al raggio (nel punto dove il punto materiale si trova a un dato istante).
 - L'accelerazione è sempre diretta verso il centro della Terra – è centripeta! – ed è quindi sempre ortogonale alla velocità.
- Facendo quindi uso dei vettori \vec{r} (dal centro della traiettoria circolare al punto dove si trova il punto materiale) e dei vettori \vec{v} e \vec{a} , rispettivamente velocità e accelerazione, abbiamo

$$\begin{aligned}\vec{v} &\perp \vec{r} \\ \vec{a} &\perp \vec{v} \\ \vec{a} &\parallel\!\!\!\! \downarrow \vec{r},\end{aligned}$$

ove il simbolo ' $\parallel\!\!\!\! \downarrow$ ' sta per 'antiparallelo'. Possiamo scrivere la condizione di antiparallelismo anche come

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}, \quad (63)$$

in cui la *grandezza fisica* di proporzionalità (non è semplicemente una costante numerica per questioni dimensionali!) ha *valore numerico* positivo e dimensione fisica di un tempo alla meno due.

- Nel seguito daremo un nome e, soprattutto, un significato fisico a ω (che ha dimensioni dell'inverso di un tempo) e vedremo le *conseguenze generali* (ovvero che vanno ben oltre il moto circolare uniforme) della relazione (63), che collega in tal modo accelerazione e posizione.

Accelerazione centripeta in un moto circolare uniforme

La relazione appena ottenuta è **valida per qualsiasi moto circolare a velocità costante** v ("moto circolare uniforme") su una circonferenza di raggio R e con accelerazione centripeta a :

$$v = \sqrt{aR}, \quad (64)$$

da cui, a secondo delle grandezze a noi note, otteniamo le altre due relazioni collegate

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{R}} \quad (65)$$

$$R = \frac{v^2}{a} \quad (66)$$

Di queste relazioni, quella in grassetto è particolarmente importante in quanto, note v e R da osservazioni geometriche e cinematiche otteniamo l'accelerazione centripeta e quindi la forza centripeta (questa volta veramente " $F = ma$ ").

Massa del Sole

A questo punto, possiamo far uso di questa relazione per valutare la massa del Sole a partire dai dati orbitali della Terra (vedi **problema 7.4**), ricordando che

$$a_c(\text{T} \rightarrow \text{S}) = \frac{F_T^{(S)}}{M_T} = \frac{G M_\odot}{d_{T-S}^2} \quad (67)$$

Ancora sulle uova

- Nuova misura della massa delle due uova: seguita a diminuire;
- uovo quasi ellissoidale (acquistato per caso in un supermercato).

E, per inciso, a proposito del volume dell'ellissoide: $V = 4/3 \pi a b c$, con a , b e c i tre semiassi (nell'uovo due assi sono uguali), può essere riscritta come $V = 4/3 \pi r_m^3$, con r_m una sorta di 'raggio medio', quello della sfera che ha lo stesso volume dell'ellissoide. Ovvero

$$r_m = (abc)^{1/3} : \quad (68)$$

questo 'raggio medio' è quindi una *media geometrica* dei tre semiassi.

Problema delle tracce di pioggia inclinate

(Chiarimenti sul problema in corso.)

Ancora lanci di punti materiali soggetti alla sola forza di gravità

- Dalle equazioni orarie per $x(t)$ e $y(t)$ alla equazione delle **traiettoria**: ci si ricava t invertendo l'espressione di $x(t)$ e lo si inserisce in $y(t)$: si ottiene una equazione $y(x)$.
- Sul diverso significato di $x(t)$, $y(t)$ e $y(x)$ (quest'ultima è la 'traccia' che si vede!)
- Motivo per cui $y(x)$ ha la stessa forma (parabolica) di $x(t)$: x è semplicemente proporzionale a t e quindi passare da $y(t)$ a $y(x)$ è equivalente a cambiare la scala delle ascisse.
- Tipico problema di gittata, dalle condizioni iniziali che danno modulo delle velocità (v_0) e angolo (θ) rispetto al piano orizzontale: ci si riconduce a quanto abbiamo visto a partire da v_{x_0} e v_{y_0} , calcolando le componenti le componenti del vettore velocità iniziale:

$$v_{x_0} = v_0 \cos \theta \quad (69)$$

$$v_{y_0} = v_0 \sin \theta. \quad (70)$$

⇒ Si veda **problema 7.5**.

Dettagli sui passaggi equazioni orarie → nel caso di lanci di oggetti sotto l'influenza della sola forza peso

Per semplicità poniamo a zero le coordinate del punto di partenza (ridefinirlo in seguito è facile).

$$x = v_{x_0} t \quad (71)$$

$$y = v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (72)$$

Dalla prima equazione ci ricaviamo il tempo, $t = x/v_{x0}$, e lo sostituiamo nella seconda:

$$y = v_{y0} \cdot \left(\frac{x}{v_{x0}} \right) - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_{x0}} \right)^2, \quad (73)$$

nella quale si riconosce una parabola passante per l'origine (termine in x , termine in x^2 e assenza di 'termine noto').

Nota: in queste lezioni non ci 'divertiremo' a fare lo studio di questa funzione, anche se matematicamente semplice. Preferiamo invece partire dalle equazioni orarie e capire 'fisicamente' cosa sta succedendo, come ad esempio nel **problema 7.5**.

8 (Lun 26 marzo)

Ancora idrostatica

Sull'innalzamento di livello dell'acqua a causa di scioglimento del ghiaccio galleggiante su di essa

Fatto esperimento?

Spinta verso l'alto di corpi immersi in fluidi

Ritorniamo ora al disegno a sinistra di figura 3. Innanzitutto capiamo adesso come mai le frecce che indicano le forze di pressione aumentano di lunghezza a mano a mano che scendiamo, mentre hanno pari lunghezza a parità di quota. Immaginiamo quindi di togliere il piano di appoggio. Va da se che l'oggetto cade (altrimenti a cosa sarebbe servito il piano?). Ma ragioniamo in maniera del tutto generale, anche aiutati dal disegno a destra della stessa figura, che mostra un cubo vuoto ma dalle pareti indeformabili e di peso trascurabile (le solite idealizzazioni della Fisica che aiutano a ragionare). È infatti importante distinguere le forze che agiscono su un singolo elemento di parete, che devono essere compensate dalla struttura del solido o da forze di pressione di un eventuale altro fluido all'interno, da quelle che agiscono sull'intero oggetto. Per quello che ci interessa al momento stiamo assumendo che l'oggetto resista alle forze esterne e constatiamo soltanto che le forze esterne orizzontali alla stessa quota si annullano. Restano soltanto le forze lungo l'asse verticale, delle quali ecco l'inventario:

- c'è naturalmente la forza peso, diretta verso il basso (nulla nel caso a destra di solido idealizzato perfettamente vuoto) e che scriveremo quindi come $-mg$, ovvero $\rho_c V g$, ove ρ sta per la densità del *corpo immerso nel fluido*;
- c'è quindi la forza sulla parete superiore, diretta verso il basso e che vale quindi $-P_{sup} A$;
- c'è infine la forza sulla parete inferiore, diretta verso l'alto e pari a $P_{inf} A$.

La forza totale lungo l'asse z , diretto verso l'alto, sarà quindi pari a

$$F_z = -mg - P_{sup} A + P_{inf} A. \quad (74)$$

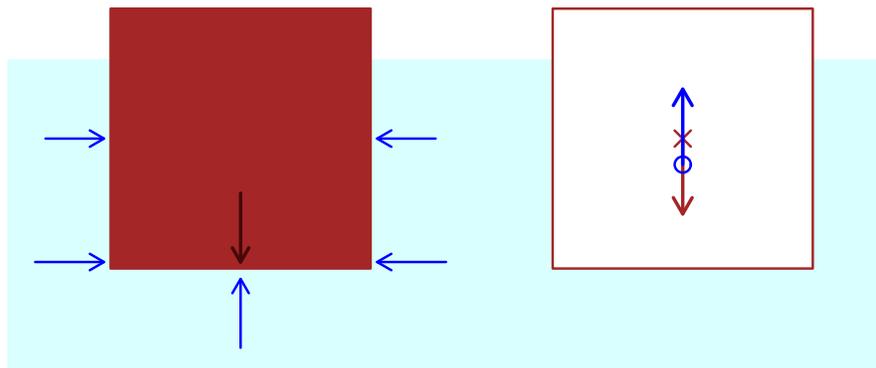


Figura 5: Analisi delle forze su un corpo galleggiante. In particolare il disegno a destra mostra i punti di applicazione di forza peso e spinta di Archimede (il corpo è disegnato bianco solo far vedere meglio le frecce associate alle due forze).

Facendo uso della legge di Stevino otteniamo quindi, indicando con ρ_f , V_f e m_f densità, volume e massa del fluido:

$$F_z = -m g + (P_{inf} - P_{sup}) A \quad (75)$$

$$= -m g + (\rho_f g h) A \quad (76)$$

$$= -m g + (\rho_f h A) g \quad (77)$$

$$= -m g + m_f g. \quad (78)$$

In particolare, si può dimostrare¹⁸ come l'ultimo, importante risultato non dipende dalla forma del corpo. Si tratta infatti niente di meno che del famoso *principio di Archimede*, ovvero che *un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari alla forza peso del fluido spostato*.¹⁹

Condizione di galleggiamento

Un corpo galleggia se la parte che affonda nel liquido è tale da causare una spinta che controbilanci esattamente la forza peso, come mostrato nel disegno a sinistra di figura 5. Esprimendo la massa totale come densità per volume e indicando con x la frazione di volume immerso nel fluido, la forza totale è data da

$$F = -\rho_c V g + \rho_f (x V) g = (\rho_c - x \rho_f) \cdot V g, \quad (79)$$

¹⁸Capiamo bene come i “si può dimostrare” possano risultare antipatici. In questo caso si tratta soltanto di ‘divertirsi’ a scomporre le forze di pressione agenti su superfici oblique e mostrare come l’effetto totale è quello dell’enunciato del principio di Archimede.

¹⁹Per il momento, anche se per parlare di volume spostato stiamo necessariamente pensando a corpi estesi, consideriamo la risultante delle forze applicate come se agissero su un ‘punto materiale’. In generale, si può dimostrare che la spinta di Archimede può essere vista agire **lungo una retta verticale che passa per il centro di massa del liquido spostato** (il ‘baricentro’). Questa nota è importante quando il corpo è disomogeneo, come ad esempio una scatola sigillata in cui ci sono all’interno oggetti messi alla rinfusa e aventi densità diverse, come ad esempio attrezzi da lavoro, palle da tennis e quant’altro. In questo caso, se si posiziona orizzontalmente la scatola in un liquido, il centro di massa del volume spostato non corrisponderà generalmente con il centro di massa dell’insieme degli oggetti contenuti nella scatola. Forza peso e spinta di Archimede non agiranno sulla stessa retta e il risultato sarà non soltanto una spinta verso l’alto ma anche una ruotazione, la quale continuerà fintanto che i due centri di massa non risulteranno allineati lungo la verticale.

la quale deve essere nulla se il corpo è in equilibrio, ovvero

$$(\rho_C - x \rho_f) \cdot V g = 0, \quad (80)$$

da cui

$$x = \frac{\rho_c}{\rho_f}, \quad (81)$$

con la condizione che x deve essere compreso fra zero (si pensi ad un blocco di polistirolo sull'acqua, che è 'praticamente' tutto fuori dall'acqua) a 1 (caso limite di galleggiamento, corrispondente a liquido in equilibrio con se stesso).

(Il disegno a destra di figura 5 mostra in particolare i punti di applicazione delle forze, al fine di far notare come a causa di qualsiasi perturbazione che faccia ruotare leggermente il corpo le due forze formeranno una *coppia* che accentuerà la rotazione. Anche se non potremo entrare nei dettagli accenniamo soltanto al fatto che se i corpi galleggianti esistono significa che dopo un certo angolo di rotazione il sistema tenderà a tornare indietro, anche se qualsiasi disturbo tende a farlo dondolare. Per lo stesso motivo se il corpo galleggiante è per esempio un parallelepipedo la situazione più stabile sarà quella in cui le facce maggiori sono orizzontali.)

Sull'innalzamento di livello dell'acqua a causa di scioglimento del ghiaccio galleggiante su di essa

E ora, risolviamo finalmente il problema dello scioglimento di ghiaccio galleggiante:

- quando il ghiaggio è a galla sposta un volume di acqua che ha una massa uguale alla sua;
- quando il ghiaccio si è sciolto aggiunge un volume di acqua . . . che ha una massa uguale alla sua.

⇒ il livello di acqua nel recipiente resta immutato!

Orbite circolari intorno a un oggetto di 'grande massa'

(Due importanti, ma ragionevoli approssimazioni che fanno comunque capire le cose)

Terza legge di Keplero (per orbite circolari)

- Ripartiamo dall'espressione che ci dà l'accelerazione centripeta, usata ad esempio per determinare la velocità di ipotetica orbita radente intorno alla Terra e la massa del Sole.
1.a nota importante: non si "uguaglia la forza centripeta alla forza di gravità", come si sente dire spesso, bensi la forza centripeta è (in questo caso) la forza di gravità. Il altre parole, 'forza centripeta' è il nome che si dà a una qualsiasi forza (gravitazionale, elettrica, magnetica, elastica etc.) il cui effetto è quello di curvare un punto materiale lungo un tratto di orbita circolare.
2.a nota importante: la massa dell'oggetto orbitante non compare nelle equazioni (avendone assunta la massa molto minore dell'altro) a causa della (oramai) ben nota storia della 'uguaglianza' di massa gravitazionale ed inerziale.
- Periodo di rotazione, data la velocità e il raggio del cerchio (banale esercizio, già fatto nelle prime lezioni).

Mettendo insieme le cose si arriva alla ben nota legge.

Altri oggetti orbitanti di interesse

- Stazione orbitale ISS (stasera **spettacolare passaggio**, meteo permettendo).
 - Sulla *bufala* degli “astronauti in assenza di gravità”.
⇒ Problema 8.2.
 - Quello che manca è la resistenza del pavimento.
⇒ Problema 8.4.
 - Cenni agli effetti fisiologici sugli astronauti che stanno a lungo in “caduta libera”, ovvero senza la spinta verso l’alto del pavimento.
→ esperimento dei due cancellini che cadono: ⇒ Problema 8.4.
- Satelliti geostazionari (quelli, ad es. per vedere la TV).
Come orientarsi senza bussola, grazie alle antenne paraboliche (almeno in Italia e Europa!).
- Luna (ancora, ma vista come un qualsiasi oggetto orbitante intorno alla Terra).

Sui diversi modi per ‘descrivere’ il moto circolare uniforme

- Numero di giri in funzione del tempo: tempo per compiere un giro: periodo (T),
- Spazio percorso lungo la circonferenza in funzione del tempo.
- Angolo, espresso in gradi, spazzato in funzione del tempo (con possibilità di andare oltre i 360 gradi).
- Angolo, espresso in radiante, spazzato in funzione del tempo, (con possibilità di andare oltre 2π).
Definizione del radiante.
- Relazioni fra le diverse grandezze:

$$\begin{aligned} 1 \text{ giro} &\rightarrow 2\pi R \\ 1 \text{ giro} &\rightarrow 360 \text{ gradi} \\ 1 \text{ giro} &\rightarrow 2\pi \text{ radianti} \end{aligned}$$

- Relazioni fra le diverse grandezze (con riferimento a Fig.6 e omettendo la velocità angolare espressa in gradi)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \frac{2\pi R}{1 T} \rightarrow \mathbf{v} = \frac{\mathbf{2\pi R}}{\mathbf{T}} \quad (82)$$

$$\nu = \frac{\Delta \text{giri}}{\Delta t} \rightarrow \frac{1 \text{ giro}}{1 T} \rightarrow \nu = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \quad (83)$$

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \rightarrow \frac{2\pi \text{ rad}}{1 T} \rightarrow \omega = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{T}} \quad (84)$$

- Altra relazione importante: siccome ad ogni giro si spazzano 2π radianti, se in un moto circolare uniforme la frequenza vale ν (giri al secondo), allora la velocità angolare varrà $2\pi \nu$ (radianti al secondo):

$$\omega = \mathbf{2\pi \nu}. \quad (85)$$

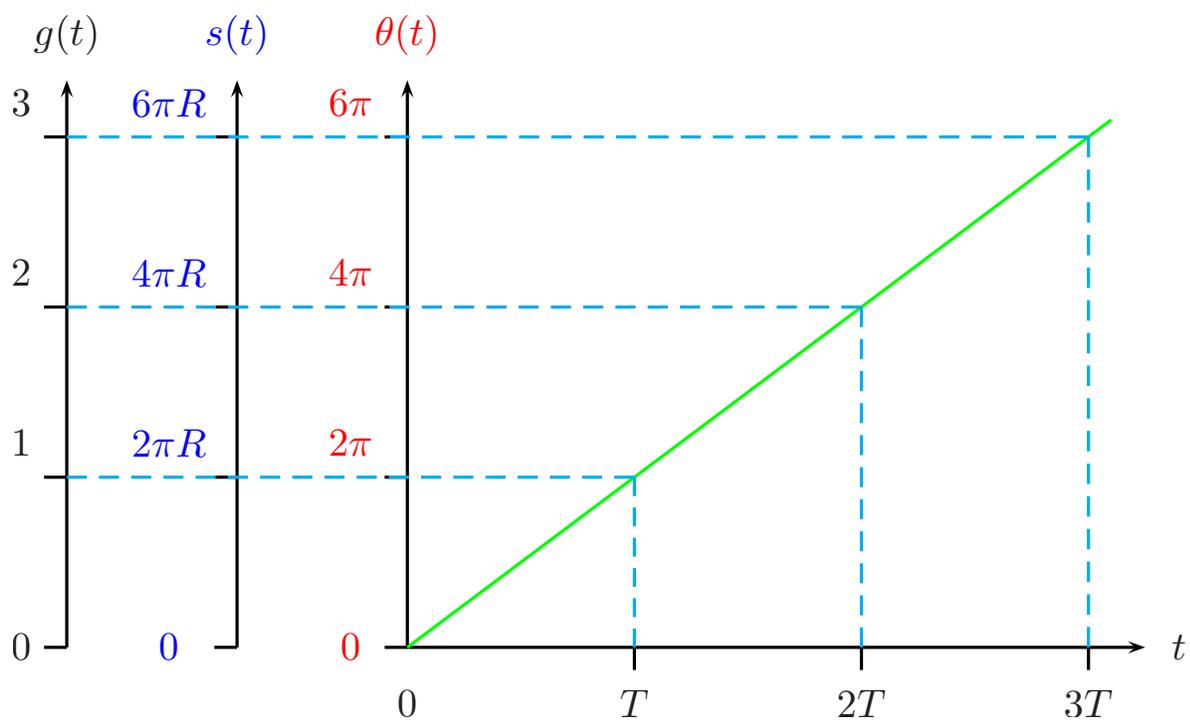
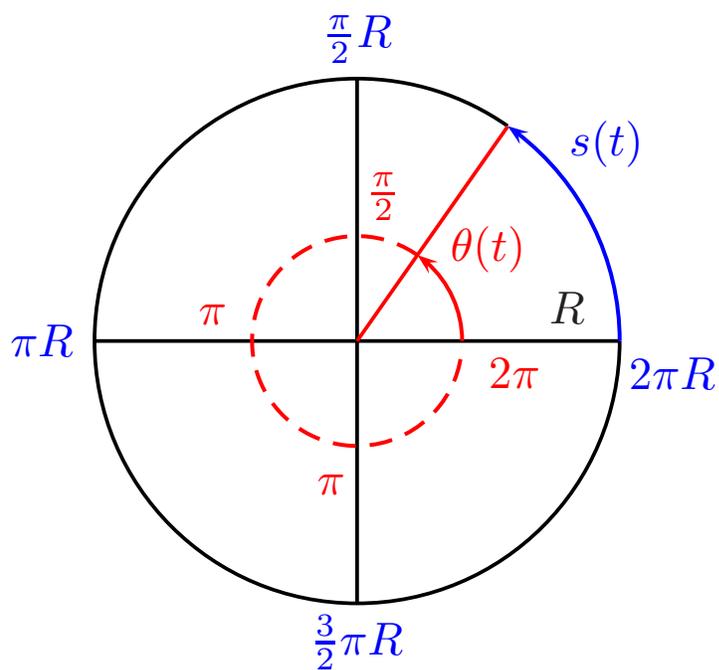


Figura 6: Moto circolare uniforme: formalismo ed equazioni orarie di dell'angolo, dello spazio percorso e del numero dei giri

9 (Mar 27 marzo)

Riconsegna quaderni individuali

Vedi raccomandazione sull'apposito file.

Ancora su orbite circolari, legge della gravità di Newton e terza legge di Keplero

- Chiarimenti sui problemi assegnati.
- Un altro modo per riscrivere la terza legge di Keplero è

$$\frac{R^3}{T^2} = K_{\odot}, \quad (86)$$

ove K_{\odot} è una costante che dipende dalla massa del Sole.

- In modo equivalente, in caso di satelliti orbitanti intorno alla Terra possiamo scrivere

$$\frac{R^3}{T^2} = K_{\oplus}, \quad (87)$$

e così via.

Per trovare K_{\odot} , K_{\oplus} (o anche K_{J} , per Giove), basta usare i dati orbitali di un oggetto orbitante (vedi **problema 9.5**).

Ancora su seconda e terza legge di Newton.

E ancora una volta: non confondere due forze che danno risultante nulla con la coppia azione-reazione secondo il terzo principio.

- Esempio del gessetto (G) sulla scrivania (S), il quale risente della forza peso dovuta alla Terra (scriviamo M_T per evitare confusione con il simbolo T che usiamo per la reazione vincolare della scrivania) e, palesemente (sta fermo!), della reazione vincolare della scrivania:

$$\begin{aligned} F_G^{(M_T)} &= -mg \\ F_{(M_T)}^G &= -F_G^{(M_T)} = mg && [3^\circ \text{ principio}] \\ F_G^{(S)} &\equiv T \\ F_S^{(G)} &= -F_G^{(S)} && [3^\circ \text{ principio}] \\ F_S^{(G)} &= -T \\ F_G^{(tot)} &= F_G^{(M_T)} + F_G^{(S)} \\ &= F_G^{(M_T)} + T \\ F_G^{(tot)} &= F_G^{(M_T)} + T = 0 && [\text{risultante forze nulla delle forze su } G] \\ &\Rightarrow T = -F_G^{(M_T)} = -(-mg) = mg \\ F_S^{(G)} &= -T = -mg. \end{aligned}$$

Se invece la risultante è diversa da zero, ovvero piano di appoggio e 'gessetto' subiscono accelerazione, $T \neq mg$ (prossimo punto).

- Valutazione della reazione vincolare (ad esempio tavoletta su oggetto posto su di essa) dalle osservazioni cinematiche (\rightarrow problema 8.4).
- Esempio pratico: se la busta della spesa si sta squarciando abbassarla, non alzarla!

Test di autovalutazione

In particolare

- Problema 18, sul “mattoncino che pesa un mattone più un terzo di mattone”: soluzione grafica e significato delle varie operazioni (appesantire/alleggerire entrambi i piatti, cambiando il campo gravitazionale; aggiungere/togliere la stessa cosa da entrambi i piatti).
 - Problema 19 è in realtà la soluzione del 18 (!).
 - Problemi 20-27 per abituarsi a ‘riscalare’ mediante debite proporzioni.
 - Problemi 43-44: test (deludente) sulle conoscenze delle derivate.
-

10 (Gio 5 aprile)

Uovo crudo e uovo sodo

- Altre misure di massa delle due uova. (Gli assenti si facciano dare i valori dai presenti)
- L’uovo lessato è stato poi buttato a causa dell’odore insopportabile. Come mai quello crudo si è conservato meglio? (Nessun odore!)

Primo andamento esponenziale

Problema sul quale ritorneremo: come varia la velocità in funzione del tempo se la velocità è proporzionale allo spazio percorso?

Aristarco di Samo

- misura della dimensione della Luna dall’ombra della Terra durante l’eclisse parziale;
- misura della distanza Terra-Luna dal transito nel ‘cilindro’ d’ombra (approssimazione!);
- misura della distanza Luna-Sole (e quindi Terra-Sole) da triangolazione quando la luna è al primo o ultimo quarto.
 - Difficoltà della misura.
 - Aristarco ottenne una distanza Terra-Sole circa $40\times$ la distanza Terra-Luna (errata di quasi un fattore 10, a causa della difficoltà della misura): implicazioni sulle dimensioni del Sole (vedi prossimo punto sulle dimensioni angolari).

Triangoli simili, trigonometria e triangolazioni

- Richiamo alla definizione del radiante.
- Angolo (in radianti), seno e tangente per piccoli angoli.
- Diametro angolare di Sole e Luna.
- Stima di distanze 'a occhio' (braccio teso con pollice trasversale): vedi quaderno individuale, sia per problemi che per le 'cose da sapere.'
- Esperimenti in aula sulla distanza osservatore-estintore e sull'altezza del soffitto.

Approssimazioni per piccoli angoli

(“ $\epsilon \ll 1$ ”, $\epsilon < 0.1$ va “abbastanza” bene):

$$\begin{aligned}\sin \epsilon &\approx \epsilon \\ \tan \epsilon &\approx \epsilon \\ \cos \epsilon &\approx 1 - \epsilon^2/2 \quad [“\approx \approx 1”]\end{aligned}$$

(L'ultima approssimazione è giustificata da una regola generale che vedremo nel prossimo punto.)

Digressione su approssimazioni

$$\begin{aligned}(1 \pm \epsilon)^2 &\approx 1 \pm 2\epsilon \\ \sqrt{1 \pm 2\epsilon} &\approx 1 \pm \epsilon \\ \sqrt{1 \pm \epsilon} &\approx 1 \pm \epsilon/2 \\ \frac{1}{1 \pm \epsilon} &\approx 1 \mp \epsilon,\end{aligned}$$

da cui segue (ricordando che siamo interessati a ‘piccoli angoli’ e quindi scartiamo a priori la soluzione $\cos \epsilon = -\sqrt{1 - \sin^2 \epsilon}$),

$$\cos \epsilon = \sqrt{1 - \sin^2 \epsilon} \approx \sqrt{1 - \epsilon^2} \approx 1 - \epsilon^2/2.$$

Applichiamo infine l'approssimazione $\sqrt{1 \pm \epsilon} = 1 \pm \epsilon/2$ ai triangoli rettangoli nei quali il *cateto* b è *molto minore dell'altro cateto* (a). Indicando con c l'ipotenusa, abbiamo

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right]} \\ &= a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \approx a \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right].\end{aligned}$$

Se ad esempio $b/a = 1/10$ avremo $c \approx a(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{100})$, ovvero c è maggiore di a solo del mezzo per cento, ovvero $c \approx a$.

Campo gravitazionale in prossimità della

Come cambia il campo gravitazionale (e quindi l'accelerazione di gravità per un corpo in caduta libera) al variare dell'altezza (solita approssimazione di Terra sferica e omogenea e trascurando effetti centrifughi)?

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(R_T + h) &= -\frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \\ &= -\frac{GM_T}{R_T^2(1 + h/R_T)^2} \approx -\frac{GM_T}{R_T^2(1 + 2h/R_T)} \approx -\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{h}{R_T}\right) \\ &\approx g \left(1 - 2\frac{h}{R_T}\right) \end{aligned}$$

Ad esempio, per $h = 400$ km (stazione orbitale ISS) abbiamo $h/R_T = 0.063$, ovvero il rapporto fra il campo gravitazionale 'lassù' (la ISS gira!) e quello al suolo vale 0.87, ovvero invece di essere 9.8 N/kg vale *circa* 8.6 N/kg. La caduta libera nel primo secondo vale quindi circa 4.3 m, contro i 4.9 in prossimità della superficie terrestre. (Controllare il valore ottenuto con quello calcolato precedentemente → quaderno individuale).

11 (Lun 9 aprile)

Primi integrali

- **Check conoscenze integrali elementari**
- **Aria del triangolo rettangolo** (con cateto lungo 'adagiato' su asse x):

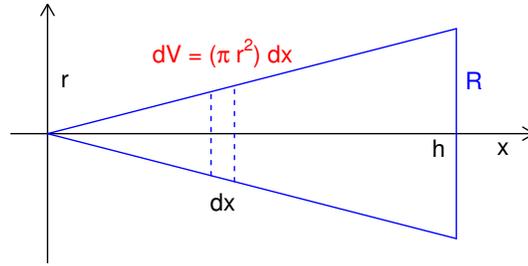
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{h}{b}x \\ dA &= h(x)dx \\ A &= \int_0^b \frac{h}{b}x dx = \\ &= \frac{h}{b} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{h}{b} \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{bh}{2}. \end{aligned}$$

- **Volume di un cilindro.** Siamo quindi pronti a passare ad un solido di rotazione. Il caso più banale è il cilindro di raggio di base R e altezza h , la cui sezione lungo l'asse è costante e il volume del tratto infinitesimo dx vale $dV = \pi R^2 dx$. Il volume totale vale quindi

$$V = \int_0^h \pi R^2 dx = \pi R^2 [x]_0^h = \pi R^2 h,$$

che si riduce alla famosa "superficie di base per altezza".

- **Volume di un cono.** Passiamo finalmente al primo caso non banale, quello di un cono.



In questo caso si tratta di sommare ‘fette circolari’ di raggio crescente, come indicato in figura. Prendendo la variabile x lungo l’asse del cono a partire dal vertice, il raggio del dischetto alla posizione x cresce linearmente, ovvero

$$r = \alpha x$$

ove α vale R/h , in quanto dobbiamo avere $r(x = h) = R$.²⁰ Il dischetto di spessore infinitesimo nella posizione x avrà quindi superficie $\pi r^2(x) = \pi \alpha^2 x^2$ e volume

$$dV = (\pi r^2) dx = \pi \alpha^2 x^2 dx.$$

Il volume totale sarà quindi

$$V = \pi \alpha^2 \int_0^h x^2 dx = \pi \alpha^2 \frac{h^3}{3}$$

che possiamo riscrivere come

$$V = \frac{1}{3} \pi (\alpha h)^2 h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

ovvero, come qualcuno ricorderà, “un terzo della superficie di base per l’altezza”. Capiamo finalmente l’origine del ‘misterioso’ fattore $1/3$, derivante dal fatto che, a parità di angolo di apertura del cono, l’area di base cresce quadraticamente con la distanza dal vertice. E per questo motivo il volume della piramide è dato da una formula analoga.²¹ Si presti comunque attenzione alla (88), la quale, benché inusuale (nel senso che non si trova nei formulari), è molto istruttiva: essendo $\alpha = R/h$ fissato dall’apertura del cono, essa ci dice che coni di pari apertura hanno volumi proporzionali al cubo dell’altezza (e quindi al cubo di qualsiasi altra dimensione lineare, in quanto, fissata l’apertura, ciascuna di esse è proporzionale all’altezza²²).

²⁰Si noti come il coefficiente α sia *legato* all’apertura del cono, ma non corrisponde esattamente all’angolo di apertura, anche se la lettera greca potrebbe indurre a tale interpretazione. Chi a questo punto ricorda un po’ di trigonometria, che comunque rivedremo nel seguito, riconoscerà in $\alpha = R/h$ la tangente dell’angolo di *semiapertura*, ovvero $\frac{R}{h} = \tan \frac{\theta}{2}$, con θ l’angolo di apertura.

²¹Per una piramide a base quadrata le varie fette hanno sezione quadrata e il loro lato cresce linearmente allontanandoci dal vertice, ovvero $l = \alpha x$, ove $\alpha = L/h$, con L il lato della base. La superficie delle fette cresce quindi quadraticamente, ovvero $S(x) = l^2(x) = \alpha^2 \cdot x^2$, e quindi il volume, per α fissato, crescerà con il cubo dell’altezza:

$$V = \int_0^h dV = \int_0^h \alpha^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \alpha^2 h^3,$$

che possiamo riscrivere come $1/3 L^2 h$.

²²Ad esempio potremmo riscrivere la formula del volume come $1/3 \times (\pi R^3/\alpha)$.

Pozzo per il centro della Terra

Forza all'interno delle Terra (assunta di densità uniforme):

- conta solo la sfera da 0 a r (distanza dal centro della Terra dove si trova il punto materiale);
- gusci sferici non producono forza di gravità al loro interno
- $a(r) \propto F(r) \propto -V(r)/r^2 \propto -r^3/r^3$, ovvero

$$a(r) = \frac{d^2 r}{dt^2} \propto -r$$

cosa ci ricorda? \rightarrow derivata seconda rispetto al tempo di $A \cos(\omega t + \varphi)$.

Generica forza del tipo $F(x) = -kx$

$$\begin{aligned} F(x) &= -kx \\ a(x) &= -\frac{k}{m}x \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}x \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\omega^2 x \end{aligned}$$

avendo indicato con ω^2 la costante positiva k/m .

Riconosciamo una forma nota, e quindi una possibile soluzione è

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Moto circolare uniforme nel piano cartesiano

In genere,

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta \\ y &= R \sin \theta. \end{aligned}$$

Nel caso di moto circolare uniforme $\theta \propto t$, ovvero $\theta = \omega t$, da cui

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(\omega t) \\ y(t) &= R \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Come **esercizio** trovare le velocità e le accelerazioni delle coordinate.

12 (Mar 10 aprile)

Esercizio di riscaldamento

Ombra di palo verticale (legato alla misura della latitudine).

Continuare su quaderno.

Uovo crudo

Ulteriore misura di massa (64.16 g)

Ancora approssimazioni

- Teorema di Pitagora nel caso che un cateto sia molto più lungo dell'altro: l'ipotenusa differisce di poco dal cateto maggiore:

$$c/a = \sqrt{1 + (b/a)^2} \approx 1 + (b/a)^2/2$$

se ad esempio $b/a = 0.1$, l'ipotenusa differisce da a soltanto dello 0.5%.

Diametri angolari

Chiarimenti e altri esempi. Conto esatto e approssimazione per piccoli angoli [vedi ad es voce *Angular diameter* su wiki inglese, anche se usa D per distanza e d per diametro (e δ per angolo)]

Dettagli del calcoli del pozzo per il centro della Terra

- Dimostrazione del perché oggetti all'interno di gusci sferici omogenei non risentono della forza di gravità: è dovuto al fatto che la forza decresce con il quadrato della distanza (e quindi vale anche per forze elettriche)
- Soluzione (vedi anche lezione scorsa)

$$a(r) = \frac{d^2 r}{dt^2} = - \left(\frac{4}{3} \pi \rho G \right) \cdot r$$

Altre forze (dall'esperimento della bottiglietta tirata mediante elastico)

- Forza di attrito statico: come le reazioni vincolari, dipende dalla forza con la quale si sta tirando/spingendo un corpo nel tentativo di spostarlo. Ma non può superare un massimo, il quale dipende dal coefficiente di attrito (statico) μ_S , proprietà delle superfici di contatto, e della forza ortogonale alla superficie:

$$F_{AS} < \mu_S F_N .$$

- Forza di attrito dinamico: ha invece un preciso valore, dipendente di nuovo dalle proprietà delle superfici di contatto (\rightarrow coefficiente di attrito dinamico, μ_D) e della forza ortogonale alla superficie:

$$\vec{F}_{AD} = -\mu_D F_N \hat{v} .$$

(è sempre opposta al verso di moto)

- Forza elastica: dipende dall'allungamento rispetto alla posizione di equilibrio mediante una costante (k , *costante elastica*):

$$F_E = -kx .$$

Per come è fatta, si vede che è una *forza di richiamo* (anche $F(r)$ nel pozzo per il centro della Terra è una forza di richiamo, perché si oppone agli spostamenti, in entrambi i versi, rispetto al punto in cui la forza è nulla: \rightarrow *punto di equilibrio*).

13 (Gio 12 aprile)

Moto circolare, prodotto scalare etc.

- Riepilogo di quanto fatto precedentemente com, in particolare osservazioni sui vettori $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$: vettori rotanti su un piano, con \vec{v} ortogonale a \vec{r} e \vec{a} (e quindi, essendo su un piano, \vec{a} antiparallelo a \vec{r} : \rightarrow accelerazione centripeta!).
- Dettagli del moto circolare in coordinate cartesiane: oscillazioni sinusoidale delle coordinate.
- Lunghezza ('modulo') dei vettori rotanti: $|\vec{r}|$ fisso; $|\vec{v}|$ cresce con ω ; $|\vec{a}|$ cresce con ω^2 :

$$\begin{aligned}v &= \omega R \\ a &= \omega^2 R.\end{aligned}$$

(È un semplice esercizio mostrare come si riottengono le relazioni che già conosciamo esprimendo ω in funzione di T o di ν .)

- Prodotto scalare e applicazione ai vettori del moto circolare uniforme per dimostrare che \vec{v} e \vec{r} sono ortogonali istante per istante.
- Dettagli del moto per il centro della Terra:
 - determinazione dei parametri A e φ della soluzione generale facendo uso delle condizioni iniziali $r(0) = R_T$ e $v(0) = 0$;
 - $r(t)$, $v(t)$ e $a(t)$; in particolare si noti come $a(0) = -g$, osservazione che ci permetterà di scrivere $\omega^2 R_T = g$;
 - si riconosce così facilmente l'uguaglianza di ω (e quindi di T) con il problema dell'orbita radente.

Molla

Dimostrazione in aula e dettagli della soluzione: vedi **F1inf**.

14 (Lun 16 aprile)

- Da equazione oraria a velocità e accelerazione mediante derivate (vedi problema 14.5).
- Da accelerazione a velocità ed equazione oraria mediante integrali. (vedi problema 14.6).
- Analisi della forza molla rispetto al punto di equilibrio: vedi su **F1inf**.
- Sul significato di ω : è una velocità angolare solo per moti circolari. In sistemi oscillanti è la *pulsazione*. Restano comunque valide le relazioni con T e ν .
- Composizione e scomposizione delle forze.
- Analisi del moto su piano inclinato.
Scomposizione della forza peso:
 - la componente lungo il piano tende a far scivolare l'oggetto (a meno di impedimenti);

- la componente normale al piano è bilanciata dalla reazione vincolare, ma è responsabile della forza di attrito (a meno che il coefficiente di attrito non sia esattamente nulla).
- Attrito statico e dinamico su piano inclinato, con esperimento dimostrativo in aula. Misura di μ_S dall'angolo 'di stacco'.
- Forza di resistenza dell'aria, nel caso (molto approssimativo. ma mostrato per la sua semplicità) *semplificato* di forza del tipo $-\beta\vec{v}$.
 - Caso di caduta in aria:

$$F = mg - \beta v$$

$$a = g - \frac{\beta}{m}v.$$

Velocità limite: quella a cui è nulla l'accelerazione (e quindi la velocità non cambia più).

- Caso di veicolo a folle su strada pianeggiante (senza ulteriori forze di attrito oltre quella dell'aria schematizzata approssimativamente come $-\beta\vec{v}$): v ariazione di velocità nell'unità di tempo:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}v.$$

Come deve variare v con il tempo affinché sia valida tale relazione con la sua derivata rispetto al tempo?

Dettagli su **F1inf**.

15 (Mar 17 aprile)

Note: ora che il calcolo differenziale è (abbastanza) sotto controllo, per alcuni argomenti si può far riferimento agli appunti online **F1inf**²³, in particolare, fino alla lezione attuale:

- 2.2-2.4 Fig. 1-2
- 5.2-5.5
- 6.2, Tab. 1, Tab. 2 (solo grandezze che abbiamo già incontrato)
- 6.3-6.7
- 7.1-7.4
- 8.2.1-8.3, 8.5 (a parte il pendolo)
- 9.1, 9.3; 10.4 fino a Eq. (201)

²³ https://www.roma1.infn.it/~dagos/F1_06-07/lezioni.pdf

Leggi esponenziali

- Soluzione del problema dell'auto a folle frenata dalla resistenza dell'aria.:
Dalla relazione fra dv/dt e v stessa si riconosce la legge esponenziale $v = v_0 e^{-t/\tau}$, con $\tau = m/\beta$.
- Altri andamenti esponenziali, sia crescenti che decrescenti:
 - tacchino esponenziale

$$\frac{dm}{dt} = \alpha m$$

la cui soluzione è $m = m_0 e^{\alpha t}$;

- popolazione di batteri con tasso di 'crescita' α , che eventualmente può anche essere negativa (più morti che nati nell'unità di tempo) o nulla (popolazione stabile: i morti equagliano i nati):

$$dN = \alpha N dt$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N$$

la cui soluzione è $N = N_0 e^{\alpha t}$.

- Tempo di raddoppio $t_{\times 2}$ o di dimezzamento $t_{1/2}$ e loro relazione con la costante di tempo τ (vedi problemi 15.1 e 15.2).
 - se è una crescita esponenziale: dopo ogni τ la grandezza aumenta di un fattore e (circa 2.7); dopo ogni $t_{\times 2}$ raddoppia.
 - se è una decrescita esponenziale: dopo ogni τ la grandezza diminuisce di un fattore e (ovvero si riduce a $1/e \approx 37\%$ del valore precedente); dopo ogni $t_{1/2}$ si dimezza.

(A parte conto esatto, lasciato come esercizio, va da sé che τ è inferiore sia a $t_{\times 2}$ che a $t_{1/2}$ per quanto appena detto.)

Quanto ci scalda il sole? Quanto ci illumina?

Introduzione a questioni energetiche e di illuminamento.

- Costante solare (circa 1.4 kW/m^2 , fuori dell'atmosfera) e irraggiamento a terra del sole (circa 1000 W/m^2 , superficie ortogonale ai raggi del sole).
- Lumen, e relazione con la potenza (W): efficienza luminosa \rightarrow vedi 'copertina'.

Calore e temperatura: dalle sensazioni fisiche alle grandezze metrologiche

- Dalla sensazione di caldo e freddo alla scala termometrica (i sensi possono essere ingannevoli per motivi che vedremo).
- Esperimento concettuale di acqua portata piano piano (fornendo calore costantemente) dalla fase solida all'ebollizione:
 - durante i cambiamenti di fase la temperatura si mantiene stabile;

- le ‘pendenze’ dT/dt sono diverse nella fase solida e in quella liquida (fenomeno a cui attribuiremo un significato).
- Digressione sulla fisica in cucina:
 - quando la pasta sta cuocendo mantenere il fornello al minimo (leggero bollore), visto che la maggiore ‘potenza’ non serve ad aumentare la temperatura ma solo a consumare gas o elettricità (e a riempire la cucina di vapore);
 - cottuta al forno è da esterno a interno;
 - cottura al microonde avviene approssimativamente in tutto il volume interno (a meno che l’oggetto da cuocere non sia troppo grande); essa si basa su agitazione termica delle molecole di acqua (essenzialmente);
 - vantaggio di pentola a pressione: si riesce a raggiungere una temperatura superiore ai 100 gradi (anche se solo di una decina o qualche decina di gradi velocizza il processo di cottura);
 - problema della cottura della pasta in alta montagna (quello che cuoce la pasta non è l’ebollizione, ma la temperatura elevata – a pressione molto bassa l’acqua può bollire anche a qualche decina di gradi!)
 - vantaggio di cottura in olio (a parte questioni organolettiche): si raggiungono temperature superiori; importanza del tuffo in olio molto caldo affinché si crei la crosticina e il cibo rimanda internamente asciutto.
(Cenno alla tecnica della doppia frittura delle patatine... ma stiamo andando fuori argomento.)

16 (Gio 19 aprile)

Radiazione solare

- Dalla costante solare ci siamo calcolati (problema ...) la potenza totale emessa dal Sole (basta moltiplicare 1400 W/m per la superficie della sfera centrata nel Sole e che ha un raggio pari alla distanza Terra-Sole).
- Da questa è possibile calcolare la potenza per unità di superficie irradiata dalla superficie del Sole.
- Esiste una legge fisica (*legge di Stefan-Boltzmann*, che prendiamo per buona) la quale ci dà la potenza per unità di superficie irradiata da un cosiddetto “*corpo nero*” di superficie A alla temperatura T (che non è detto che sia nero! il colore dipende dalla temperatura):

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4$$

ove $\sigma \approx 5.7 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ (temperatura in kelvin). Da questa legge ci possiamo valutare la temperatura della superficie solare (\rightarrow problema ...).

- inoltre c’è un’altra legge che collega la lunghezza d’onda in cui c’è il massimo di emissione alla temperatura (*legge di Wien*):²⁴

$$\lambda_{max} \cdot T = 2.90 \times 10^{-3} \text{ K m}$$

²⁴Attenzione: λ_{max} è la lunghezza d’onda per la quale c’è il massimo di emissione, e non la lunghezza d’onda massima dello spettro. Quindi la corrispondente frequenza è anche designata come ‘max’, ovvero

(a questa legge è legata la famosa ‘temperatura colore’ che si trova nelle confezioni delle lampadine).

- Il dettaglio dello spettro di frequenze a una certa temperatura è dato dalla legge di Max Planck (mostrata qualitativamente con figura, vedi anche ‘copertina’ sul sito del corso).
- Termometro a infrarossi (mostrato in aula) e suo principio di funzionamento (basta misurare l’intensità di radiazione a due-tre frequenze e ottenere la temperatura dallo spettro di Plank che meglio si accorda con le misure, il tutto fatto ‘istantaneamente’ mediante circuito elettronico).
- Sull’inesattezza della dicitura caldo/freddo delle lampadine: come le lampadine dalla luce giallognole sono chiamate ‘calde’ mentre quelle bianche sono ‘fredde’, quando la *temperatura colore* riportata sulle confezioni delle prime (p.es. 3200 K) è inferiore delle seconde (anche oltre 6000 K)?

Onde elettromagnetiche e generalità su onde sinusoidali

- Spettro visibile (semiquantitativo, vedi wiki (https://it.wikipedia.org/wiki/Spettro_elettromagnetico)).
- Relazione fra frequenza e lunghezza d’onda di radiazione elettromagnetica di qualsiasi tipo (la deriveremo fra breve):

$$\lambda \nu = c,$$

con c velocità della luce nel vuoto (‘ c ’ come *celeritas*):

$c = 299792458$ m/s (**esatta!** – ricordarsi 3.00×10^8 m/s, o ‘300000 km/s’ va più che bene per le applicazioni pratiche.)

- Onde sinusoidali

$$f(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x).$$

- oscillazione in funzione del tempo a x fisso;
- oscillazione in x a t fisso (si immaginino tanti osservatori dislocati in vari punti.
- la periodicità in t è data dal periodo, $T = 2\pi/\omega$.
- in modo analogo, la periodicità in x è data dalla lunghezza d’onda $\lambda = 2\pi/\beta$;
- β è quindi una *specie di pulsazione* nella coordinata x .²⁵

In funzione di t e di x , l’onda si muove nello spazio.

- Velocità dell’onda: a che velocità bisogna andare per osservare sempre un massimo?(o un minimo, o qualsiasi altra ‘fase’)
→ l’argomento della funzione coseno deve essere costante.

$$\omega t - \beta x = \text{costante},$$

$\nu_{max} = c/\lambda_{max}$ in virtù della relazione che vedremo nel seguito.

Attenzione: controllare gli appunti: mi potrebbe essere sfuggito un ν_{min} al posto di ν_{max} , ma non ne sono sicuro.

²⁵In letteratura β è in genere indicato con k , qui evitato perché a prima vista sembrerebbe una generica ‘costante’.

condizione che si traduce in²⁶

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\omega t - \beta x] &= 0 \\ \omega - \beta \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \omega - \beta v &= 0 \\ v &= \frac{\omega}{\beta},\end{aligned}$$

da cui, essendo $\omega/2\pi$ e, ricordiamo, $\lambda = 2\pi/\beta$, ovvero $\beta = 2\pi/\lambda$,

$$v = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda,$$

relazione che avevamo mostrato sopra nel caso di $v = c$.

(Possiamo infine riscrivere la funzione $f(x, t)$, sostituendo $\beta = \omega/v$, come

$$\begin{aligned}f(x, t) &= A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x\right) \\ &= A \cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{v}\right)\right]\end{aligned}$$

o anche

$$\begin{aligned}f(x, t) &= A \cos\left[2\pi\nu \left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \\ &= A \cos\left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v}\right)\right]\end{aligned}$$

e

$$f(x, t) = A \cos\left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

riportate per completezza in quanto si possono incontrare in letteratura, ma da non tentare minimamente di memorizzare – quella di partenza va più che bene per capire cosa succede.).

Calore e temperatura

Riepilogo e chiarimenti

- termometri e scale termometriche;
- 'principio zero' della termodinamica: equilibrio termico;
- fattori che influenzano la percezione umana del 'caldo' e del 'freddo': conducibilità termica e capacità termica (con divagazioni su patate al cartoccio e saune...);
- passaggi di stato e "punti fissi" per le scale termometriche;

²⁶Come si vede, $f(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x)$ dà luogo a un'onda che viaggia con velocità positiva (nel verso crescente delle x). Se avessimo avuto invece $f(x, t) = A \cos(\omega t + \beta x)$ avremmo ottenuto una velocità negativa, in quanto la velocità sarebbe stata $v = -\omega/\beta$. Queste onde sono anche chiamate, rispettivamente, *progressive* ($v > 0$) e *regressive* ($v < 0$), ma questo è un dettaglio irrilevante per queste lezioni.

- capacità termica e calore specifico: definizione della caloria (e quindi anche della chilocaloria).

⇒ **F1inf** 14.6

Equilibrio termico fra due corpi a temperature iniziali diverse e che formano un *sistema isolato* (non ci sono dispersioni di calore verso l'esterno).

⇒ **F1inf** 14.7

17 (Lun 23 aprile)

Ancora su andamenti esponenziali

- Ancora su elazione fra legge esponenziali crescenti e decrescenti e tempo di dimezzamento e di raddoppio.
- Relazione fra progressione geometrica e leggi esponenziali.
 - I valori a intervalli di tempo distanziati τ formano una progressione geometrica con ragione e o $1/e$, a seconda che l'esponenziale sia crescente o decrescente.
 - In un esponenziale negativo i valori a intervalli di tempo distanziati $t_{1/2}$ formano una progressione geometrica con ragione $1/2$; In un esponenziale positivo i valori a intervalli di tempo distanziati $t_{2\times}$ formano una progressione geometrica con ragione 2 .
- Fisica della datazione con il carbonio 14.

Delucidazioni sui problemi in corso

- Per valutare la temperatura sulla superficie del Sole occorre calcolare la radiazione solare per unità di superficie (sulla superficie del Sole), la quale è collegata a T mediante la legge di Stefan-Boltzmann.
(*En passant*: bilanciamento del bianco nelle foto.)
- Nel problema del *tacchino esponenziale* il dato di *voracità* iniziale (quando la massa valeva m_0) indicava $v_0 = \left. \frac{dm}{dt} \right|_{m_0}$.

Siccome, per definizione di tacchino esponenziale $\frac{dm}{dt} = \alpha m$ per qualsiasi istante, deve anche valere per $m = m_0$, ovvero

$$v_0 = \left. \frac{dm}{dt} \right|_{m_0} = \alpha m_0,$$

da cui si ricava α , e quindi $m(t)$ e $v(t)$.

Ancora scambi termici

⇒ (F1inf 14.7)

- Misura di calore specifico: basta utilizzare opportunamente la relazione che regola lo scambio di calore fra due corpi in approssimazione di sistema isolato.
- Misura della capacità termica del recipiente ('calorimetro'): idem, tenendo che anche il recipiente si riscalda o si raffredda.

Calore latente di fusione e di ebollizione

⇒ F1inf 16.1

Andamento temporale del processo di termalizzazione

Sostanzialmente vedi F1inf 16.2, ma scrivendo

$$\frac{dQ}{dt} \propto -(T - T_{eq})$$

- se $\Delta T > 0$ il corpo cede calore;
- se $\Delta T < 0$ il corpo assorbe calore.

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt} &= -\eta \cdot (T - T_{eq}) \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{C/\eta} \cdot (T - T_{eq}) = -\frac{1}{\tau} \cdot (T - T_{eq}).\end{aligned}$$

Possiamo mettere questa equazione a confronto con quella che avevamo trovato nel caso di attrito di viscosità ($F = -\beta v$):

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{C/\eta} \cdot (T - T_{eq}) = -\frac{1}{\tau} \cdot (T - T_L) \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{m/\beta} \cdot (v - \frac{F_M}{\beta}) = -\frac{1}{\tau} \cdot (v - v_L),\end{aligned}$$

che possiamo scrivere in modo generico come

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot (z - z_L),$$

ove z è la generica grandezza fisica che varia con il tempo. Possiamo ricondurre questa *equazione differenziale* a una ben nota se effettuiamo un cambiamento di variabili, introducendo $\theta(t) = z(t) - z_L$. Essendo z_L una costante otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\theta(t) &= z(t) - z_L \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{dz}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{\tau} \cdot \theta,\end{aligned}$$

la cui soluzione sappiamo essere

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

e quindi

$$\begin{aligned}(z(t) - z_L) &= (z_0 - z_L) \cdot e^{-t/\tau} \\ z(t) &= z_0 + (z_0 - z_L) \cdot e^{-t/\tau}.\end{aligned}$$

Alcuni casi particolari:

- Caduta di un oggetto in aria (con velocità iniziale nulla)

$$\begin{aligned}z &\rightarrow v \\ z_0 &\rightarrow v_0 = 0 \\ z_L &\rightarrow v_L = \frac{mg}{\beta} \\ v(t) &= v_L \cdot (1 - e^{-t/\tau}).\end{aligned}$$

- Veicolo frenato da resistenza dell'aria: già visto, ma riscriviamo la soluzione usando la soluzione generale:

$$\begin{aligned}z &\rightarrow v \\ z_0 &\rightarrow v_0 \\ z_L &\rightarrow v_L = 0 \quad (\text{asintoticamente il veicolo si ferma}) \\ v(t) &= v_0 \cdot e^{-t/\tau}.\end{aligned}$$

Vedi anche **F1inf** 16.2.2, 19.5, 19.6 e 19.7 facendo attenzione ai **simboli diversi** e al fatto che la soluzione dell'equazione differenziale è stata ottenuta in un modo più formale (ma quella con la trasformazione di variabile è più elegante e intuitiva).

18 (Mar 24 aprile)

Secondo e terzo principio della meccanica rivisti

- Quantità di moto ($\vec{p} = m\vec{v}$) e formulazione originaria del secondo principio

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

da cui

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}.$$

La *quantità di moto*, come dice il nome misura *quanto moto* possiede un corpo in movimento. Purtroppo una delle difficoltà è che non c'è un equivalente nel linguaggio comune e si fa uso della locuzione “forza di un corpo in movimento”, che fisicamente non ha alcun senso (al più si può parlare della sua energia, ma questa è altra cosa – ne parleremo fra breve).

F1inf 9.4

- Impulso della forza ($\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$) e variazione della quantità di moto.
F1inf 9.5.
- Terzo principio e conservazione della quantità di moto totale (limitatamente a due oggetti che formano un sistema isolato, tanto per cominciare).
F1inf 9.6.
- Centro di massa di due ‘punti materiali’ e velocità del centro di massa.
Conservazione della velocità del centro di massa (limitatamente a due oggetti che formano un sistema isolato, tanto per cominciare).
F1inf 9.6.
- Problemi tipici.

Lavoro e variazione di $mv^2/2$

- Definizione del lavoro come somma dei contributi (e non delle componenti – il lavoro è uno scalare!): caso generale e caso particolare di forza costante.
- Richiami sul prodotto scalare, in particolare sui due modi per calcolarlo.
- Interpretazione di $F \cdot ds \cos \theta$ come prodotto di ds per la componente di \vec{F} lungo ds .
- Lavoro e variazioni di $mv^2/2$ (a cui daremo un nome che probabilmente già conoscete).
F1inf 9.9 e 10.4-10.6
- Esempi (**F1inf 10.2**):
 - Lavoro della forza di gravità (mg) quando un corpo cade da un’altezza h : variazione di v .
 - Lavoro di reazione vincolare è sempre nullo in quanto F_v e $d\vec{s}$ sono ortogonali.
 - Lavoro della forza di attrito dinamico è sempre negativo in quanto forza e spostamento sono opposti.
Caso speciale di moto su un piano con attrito: $L = -\mu_D mg \cdot \Delta s$, a cui corrisponde, quando il corpo si è fermato, $\Delta(mv^2/2) = 0 - mv_0^2/2$:
→ problemi tipici consistono in calcolarsi: Δs da v_0 e μ_D ; v_0 da Δs e μ_D ; μ_D da v_0 e Δs .
 - Per ovvi motivi la forza di attrito statico non compie lavoro.
 - Lavoro della forza di una molla da x_m a 0, da 0 a $-x_M$ e da x_m a $-x_M$: variazione di v nei tre casi.
 - La forza centripeta non compie lavoro in quanto, istante per istante, $\vec{F}_c \perp \vec{v}$ e quindi, essendo $d\vec{s} = \vec{v} dt$, anche a $d\vec{s}$.

Ancora sull’esperimento a lunga durata con le uova

- Quello crudo ‘originale’ pesa 61.9 g: galleggia?
- Quello sodo ‘circa ellissoidale’ non puzza ancora (chiaramente si è mantenuto meglio di quello che abbiamo già buttato).

19 (Gio 26 aprile)

Moto del centro di massa

- La variazione di velocità del centro di massa è influenzata solo da forze esterne al sistema: come se fosse un punto materiale con l'intera massa del sistema concentrata in esso.

F1inf 9.8

Problema sul lavoro compiuto dalla forza di gravità da infinito a R_T

Fare con calma l'integrale, facendo attenzione al segno della forza.

Lavoro, energia cinetica, energia potenziale, energia termica

- F1inf 9.9 (rileggendo $mv^2/2$ come energia cinetica).
- F1inf 10.2 (rivedere).
- F1inf 10.3
- F1inf 10.7, 10.8 (senza fare i problemi in dettaglio: su quali avreste difficoltà? Riguardano tutti questioni trattate nelle ultime lezioni!)
- F1inf 13.4.
- F1inf 14.5, 15.1, 15.2.

20 (Gio 3 maggio)

Forze conservative e energia potenziale

- Il lavoro fatto dalla forza di gravità non dipende dal percorso.
(E quindi anche per la forza elettrica fra cariche, avendo la stessa struttura)
- Idem per la molla.

⇒ **forze conservative**

- L'energia potenziale è definita solo per forze conservative.
- In presenza di sole forze conservative si conserva l'*energia meccanica* somma di energia cinetica e potenziale.
- Energia totale di un corpo orbitante (e significato del segno – simile discorso sul segno vale per elettroni 'intrappolati' in atomi).
- Dalla funzione di energia potenziale alla forza.
- Forme di energia potenziale. Punti di equilibrio.
- Ancora sull'energia della forza di gravità in prossimità della superficie terrestre: equivalenza di ' mgh ' e della formula generale.
- Conservazione di energia nel caso generale: energia meccanica più energia termica.

- Unità di misura di energia (joule, kwh, cal, kcal, Btu) e di potenza (W, HP, Btu/h, kcal/h).

Riferimenti:

- **F1inf** 10.7, 13.5, 14.1-14.4, 15.2, 15.3, 15.5.

21 (Lun 7 maggio)

Ancora su energia, quantità di calore, lavoro e potenza

- Non confondere energia (proprietà dei corpi) con lavoro e quantità di calore, legati a *trasferimenti di energia*.
- La potenza è, a seconda dei casi, misurabile come dE/dt , dL/dt o dQ/dt .
- Energia interna: può essere aumentata o fornendo calore, o mediante lavoro (\rightarrow mulinello di Joule):

$$\Delta E = Q + L$$

(anche se in termodinamica si incontra la formula in cui L compare con il segno meno: il motivo è “tecnologico”, in quanto nelle *macchine termiche* il *lavoro è considerato positivo* se prodotto dalla macchina, negativo se è la macchina a subirlo).

- Potenza di una forza che mantiene un oggetto a velocità costante (in quanto c'è un'altra forza resistenza: se v è costante la forza totale deve essere nulla):

$$P = \frac{dL}{dt} = F \frac{ds}{dt} = F \cdot v.$$

(caso unidimensionale).

- Caso speciale, per vincere una forza di viscosità del tipo $-\beta v$: $P = \beta v^2$. (**F1inf** 15.4)
(Ma in realtà l'attrito dell'aria va come v^2 e quindi la potenza per mantenere un oggetto a velocità costante v è proporzionale v^3 .)
- Potenza per andare a velocità costante in salita: $P = (mg \sin \theta) \cdot v$.
- Riscaldamento prodotto dalle persone.
- Ancora sulle unità pratiche di energia e potenza (**F1inf** 15.5).
- Potenza di centrali elettriche.

Energia potenziale e potenziale

Come i campi (elettrico o gravitazionale) sono “forza su *carica*” (massa o carica elettrica), così si definiscono i *potenziali*, che sono “energia potenziale su *carica*” (massa o carica elettrica). Il vantaggio è che se si conosce la variazione di potenziale, si può calcolare facilmente la variazione di energia potenziale per diverse masse o cariche (a seconda dei due casi).

- Potenziale gravitazione dovuto un ‘punto materiale’ di massa M in un punto distante R :

$$V_G^{(M)}(R) = -\frac{GM}{R}.$$

- Caso speciale in prossimità della superficie terrestre:

$$V_G^{(M_T)}(h) = gh.$$

- Potenziale elettrico dovuto un 'punto materiale' di carica Q in un punto distante R :

$$V^{(Q)}(R) = \frac{kQ}{R}.$$

(Il motivo per cui in questo caso non è stato specificato nel simbolo che si tratta di potenziale elettrico sarà chiaro fra poco.)

- Se conosciamo differenze di potenziale è facile calcolare differenza di energia potenziale di una 'carica' (di massa o di carica):

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= m \cdot \Delta V_G^{(M)} \\ \Delta E_p &= q \cdot \Delta V^{(Q)}\end{aligned}$$

(e se conosciamo ΔE_p ci possiamo valutare le variazioni di energia cinetica).

- Dimensioni e unità di misura dei potenziali: essendo energia su 'carica' saranno, a seconda dei casi, J/kg o J/C.
- Il caso pratico interessante è quello elettrico, in quanto le differenze di potenziali non sono altro che . . . le differenze di potenziali di batterie e di altri 'generatori', la cui unità di misura, il Volt (V) è proprio 1 J/1 C.
- *Elettronvolt*: è pari alla variazione di energia potenziale che una carica elementare (in modulo uguale a quella dell'elettrone) subisce quando attraversa la differenza di potenziale di 1 V. Multipli sono il keV, il MeV e il GeV.
In particolare, se un elettrone va da un punto a potenziale più basso a uno a potenziale più alto, tale che $\Delta V = +1$ V, subirà una differenza di energia potenziale pari a -1 eV, e quindi una differenza di energia cinetica pari a $+1$ eV.
(La conversione eV \rightarrow J è lasciata come esercizio.)

Tensione, corrente massima, potenza massima e 'capacità' (energetica) delle batterie

- Se la carica q (ad esempio 1 C) attraversa la differenza di potenziale ΔV (ad es. 12 V), il lavoro fatto dalla batteria è pari a $q\Delta V$. Se questo succede una volta al secondo la potenza erogata dalla batteria sarà $q/(1 \text{ s}) \cdot \Delta V = I \cdot \Delta V$, avendo indicato con I la corrente elettrica ($1 \text{ A} = 1 \text{ C}/1 \text{ s}$).
 \rightarrow Quindi la corrente massima che una batteria può fornire, moltiplicata la sua *tensione* (sinonimo di differenza di potenziale) è pari alla potenza massima che la batteria può erogare.

- Un altro dato importante per le batterie sono gli 'ampère-ora' (A·h). Ad esempio 1 Ah indica che la batteria può fornire 1A per la durata di un'ora, oppure 2A per la durata di mezz'ora, etc.

Ne segue che

- essendo una corrente per un tempo, ci dà la carica elettrica che può fluire dalla batteria, ad esempio da una batteria da 50 A·h possono fluire 180000 C.

- se moltiplichiamo gli ‘ampère-ora’ per la tensione otteniamo l’energia erogabile, ovvero la sua ‘capacità energetica’. Ad esempio una batteria da 5V con una capacità di 2000 mA·h = 2 A·h = 7200 A·s può fornire una energia (‘nominale’) pari a $5\text{ V} \times 7200\text{ A}\cdot\text{s} = 36\text{ kJ}$, ovvero circa 8.6 kcal.

Sistemi meccanici a ‘moltiplica’ di forza

- Carrucole multiple: la minore forza con cui si tira è compensata dalla maggiore lunghezza della corda da tirare.
- Piano inclinato: minore forza è compensata da maggiore cammino da percorrere:

$$(mg \sin \theta) \cdot l = mgh.$$

- Leva (trattazione valida per piccoli angoli): chiamando l_1 il braccio resistenza (dalla parte dell’oggetto da sollevare) e F_x la forza incognita; h l’altezza di cui si solleva il corpo e h' lo spostamento della forza applicata al ‘braccio potenza’, essendo $h/l_1 = h'/l_2$, il lavoro fatto dalla forza F_x vale

$$F_x h' = F_x h \frac{l_2}{l_1}.$$

Affinché esso sia uguale a quello sollevando direttamente l’oggetto, ovvero mgh , otteniamo

$$\begin{aligned} F_x h \frac{l_2}{l_1} &= mgh \\ F_x &= \frac{l_1}{l_2} mg \end{aligned}$$

(“Datemi un punto di appoggio e vi solleverò la Terra!”)

22 (Mar 8 maggio)

Circuiti elementari in corrente continua

- Peculiarità dell’elettricità, rispetto alla gravità: generatori; scorrimento di cariche; conduttori per ‘trasportare la differenza di potenziale’. (**F1inf** 17.4, 17.5)
- Legge di Ohm (e seconda legge di Ohm). (**F1inf** 17.6, 18.2)
- Misure di tensione, di resistenza e di corrente mediante *multimetro* elettronico.
- Potenza fornita dalla *forza elettromotrice* del generatore e potenza dissipata dalle resistenze (*effetto Joule*). Analogie meccaniche (circuitto idraulico con pompa e impianto di risalita). (**F1inf** 17.7)
- Resistenze in serie e in parallelo **F1inf** 17.9, 17.11)

Misura di potenza (meccanica) umana

Esperimento durante l'intervallo: tempo impiegato a salire di corsa tre rampe di scale, per un dislivello totale di circa 4.5 metri:

- ragazzo, $m \approx 78$ kg, $t \approx 3.95$ s;
- ragazza, $m \approx 60$ kg, $t \approx 4.30$ s.

Problemi di urto collineari fra due corpi che formano un sistema isolato

- Legge di conservazione generale: *la quantità di moto totale del sistema si conserva sempre* in quanto è *conseguenza del terzo principio*.
- *L'energia meccanica* (leggi 'cinetica', se ci disinteressiamo del breve tempo di interazione durante l'urto, nel quale può entrare in gioco anche l'energia potenziale) *si conserva solo in urti perfettamente elastici*.
- Ruolo dei corpi di 'massa infinita' negli urti: \rightarrow possono assorbire quantità di moto senza variare velocità (e quindi senza variazioni di energia cinetica):

– Se avevano inizialmente velocità nulla

$$v = \frac{p}{M} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$
$$E_c = \frac{1}{2} \frac{p^2}{M} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

– se avevano velocità iniziale diversa da zero la mantengono (avendo 'inerzia infinita' non la possono cambiare).

- Esempi di urti completamente elastici (i due corpi rimangono attaccati).
- Urti perfettamente elastici:
 - Regola di inversione delle velocità relative (o della somma delle velocità prima e dopo l'urto per ciascun punto materiale).
 - Casi notevoli nei quali uno dei due punti materiali ha 'inerzia infinita' rispetto all'altro.
 - Esperimenti in aula (anche se non perfettamente elastici):
 - \rightarrow in particolare urto di pallina da golf in moto contro pallina da ping pong ferma:
 - * la pallina da ping pong schizza in avanti con una velocità maggiore di quella da golf;
 - * verificando i punti di impatto delle palline sul pavimento si osserva che effettivamente la pallina da ping pong aveva una velocità dopo l'urto circa doppia di quella dell'altra pallina (si ricorda che durante il 'volo' la velocità orizzontale non cambia e che la distanza orizzontale percorsa è proporzionale alla velocità iniziale).

(**F1inf** 11.6, 11.7)

23 (Gio 10 maggio)

Circuiti elementari in corrente continua

- Cenni alla risoluzione generale di circuiti: leggi di Kirchhoff (e loro ragione fisica). (F1inf 18.1)

Ancora urti

Chiarimenti sulla legge delle somme delle velocità iniziali e finali, interpretazione come “legge di inversione delle velocità” nell’urto.

- Applicazioni ai problemi assegnati e variazioni su di essi.

Problemi di parziale conservazione dell’energia meccanica.

Ancora su energia e potenza – aspetti pratici

Potenza (e prezzo) di elettricità, gas e pellet:

- esempio fornelli a gas:
<http://www.ikea.com/it/it/catalog/products/50156008/>
- esempio termosifoni (chiamate ‘rese termiche’ nella brochure – si noti la dipendenza da ΔT , differenza fra temperatura del termosifone e temperatura ambiente):
<http://www.faral.com/prodotti/tropical/>
- esempio caldaia:
<http://www.saviocaldaie.it/images/Prodotti/4823.0440.0000%20EVODENS%20HT%20R03.pdf>
- esempio termocamino a pellet:
<http://www.ferrillo.it/pelletaria/356-dea-eco-8-klover.html>
- esempi di pellet:
<https://www.amazon.it/pellet-Holz-austriaco-chiaro-certificato/dp/B0171FJU84/>
<https://www.amazon.it/sacchi-pellet-Italiano-qualit%C3%A0-certificato/dp/B017A5P3A4/>

Nota sulla potenza di centrali idroelettriche: flusso di massa \times differenza di potenziale gravitazionale ($P = \phi_M \Delta V_G$, analoga di $P = I \Delta V$ per i circuiti).

Ancora su calore e luce: altre grandezze fotometriche

- La quantità di luce non va confusa con l’energia necessaria a produrla.
- Il *flusso luminoso*, o ‘potenza luminosa’, misurato in lumen (lm), indica quanta luce viene emessa, attraversa una certa superficie, o viene assorbita, per unità di tempo;
- Il parametro che fornisce l’efficienza delle sorgenti luminose è espresso in lm/W.
- La *quantità di luce* indica invece, quanta luce arriva. Essa è misurata in ‘lumen \times secondo’ (lmcdots), detto anche *Talbot*.

- L'*intensità luminosa*, misurata in candele (cd) indica invece il flusso luminoso per unità di angolo solido ('per' nel senso di "flusso luminoso diviso l'angolo solido": lo stesso flusso luminoso ('stessi lumen') emessi in un cono più piccolo ('angolo solido minore') caratterizzano una sorgente di maggiore intensità. Esso può dipendere dalla direzione di emissione, come si può facilmente immaginare pensando che lampade e lampadari risultano più o meno luminose a seconda da che direzione le si guardano (e in alcune direzioni l'intensità può essere addirittura nulla, come per fari, faretti e torcie).

$$1 \text{ cd} = 1 \text{ lm} / 1 \text{ sr}$$

- Angolo solido in *steradiani* (sr), in analogia ad angolo in radianti: *rapporto fra porzione di area di una sfera e il quadrato del raggio*:
 - È adimensionale (come il radiante);
 - l'angolo solido sotteso dall'intera superficie del cerchio è pari a 4π sr, in quanto $(4\pi R^2)/R^2$;
 - un cono di **semi**apertura θ definisce un angolo solido di

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta)$$

(Si verifica subito che un emisfero ha angolo solido 2π sr e l'intera sfera 4π sr).

- L'*illuminamento*, misurato in lux (lx), indica infine il flusso di luce per unità di superficie dell'oggetto illuminato.

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm} / 1 \text{ m}^2$$

- Per avere un'*idea* dell'illuminamento si possono usare i sensori sugli smart (si cerchi ad esempio *luxmetro* sugli app store).

Sulla sensibilità *logaritmica* di vista e udito

- Decibel in acustica:

$$SPL = 10 \log_{10} p^2/p_0^2 = 20 \log_{10} p/p_0$$

(<https://it.wikipedia.org/wiki/Decibel#Acustica>)

- Ugualmente, ci possiamo vedere (più o meno bene), da unità (e anche frazioni, come quando illuminati da luna piena) di lux fino a un centinaio di migliaia di lux.

→ sia per la vista che per l'udito, non siamo sensibili a piccole variazioni dello stimolo (sia esso la pressione acustica o flusso di luce che raggiunge la retina), ma richiede almeno (grosso modo) un suo dimezzamento o raddoppiamento.

(Si pensi, per chi ne sa qualcosa di fotografia, che l'*esposizione* si cambia, a parità di *diaphragma*, dimezzando o raddoppiando i tempi di esposizione, che per essere valutata richiede *esposimetri*, in quanto l'occhio umano si adatta facilmente e a malappena si accorge di un fattore 2 nell'illuminamento).

Torniamo all'idrostatica

- Breve riepilogo.
- Vasi comunicanti.
- Tubo a U come 'barometro differenziale' (per misurare variazioni di pressione rispetto a una pressione di riferimento).

24 (Lun 14 maggio)

Ancora lux e lumen

- Misura di illuminamento eseguita in aula.

Ancora urti elastici

- Caso di urto collineare contro oggetto fermo: dettagli lasciati come esercizi.

Tubo a U

- Misura differenziale di pressione.
- Moto della colonna di fluido nella colonnina (trascurando gli attriti)

Scoperta del vuoto

- Esperimento di Berti (a Roma!) e barometro di Torricelli: "osservazione del vuoto".
- Macchine da vuoto (cenni) e *emisferi di Madgeburgo*.

Legge di Pascal e applicazioni

- Legge di Pascal (per fluidi incompressibili, o 'circa tali'): variazioni di pressione trasmessa in tutto il volume. Cenno alle macchine idrauliche come ulteriore caso di 'moltiplicatore di forza (con dito su un pistoncino possiamo contrastare la forza di un'auto poggiata su un grande pistone).
- Considerazione sul lavoro dei vari pistoni delle macchine idrauliche (analogia sullo spazio percorso dalla forza 'motrice' rispetto al sollevamento dell'oggetto, nei casi di carrucole multiple, piano inclinato e leve).

Lavoro effettuato con 'pistone' su fluidi compressibili

- Lavoro compiuto su un gas ('fluido compressibile') da un solo pistone: che fine fa? Riscrittura dell'espressione del lavoro in questo caso: $P dV$ (semplice conseguenza di ' $F dx$ ').

Introduzione ai fluidi in movimento

- Velocità di un fluido incompressibile in un tubo a sezione variabile a regime stazionario, ovvero a portata costante in ciascuna sezione del tubo (Legge di Leonardo).

25 (Mar 15 maggio)

Rivoluzione di Io intorno a Giove e della Terra intorno alla Luna

Un esercizio propedeutico.

Ancora tubo a U

Misura differenziale di pressione.

Oggetti in rotazione rispetto a un asse fisso:

- Lavoro delle forze e variazione di energia cinetica;
- dipendenza dell'accelerazione angolare da
 - forze ‘trasverse’ e loro punto di applicazione (distanza dall'asse di rotazione);
 - masse e loro distanza dall'asse di rotazione.
- **Momento delle forze**;
- **Momento di inerzia**;
- **Tabella di analogie** fra moto unidimensionale e moto di rotazione.

Dettagli su **F1Inf** Lez. 22.1-22.3 (pp. 122-126), con un certo numero di errata (a parte banali errori di battitura):

p. 123, riga 4: “ $vec{F}_i$ ” $\rightarrow \vec{F}_i$;

formule (507) e (509): “ $d\theta_i$ ” \rightarrow “ $d\theta$ ” (essendo il corpo rigido, l'angolo di rotazione a parità di tempo è lo stesso per tutti i punti; lo stesso vale per la velocità di rotazione ω).

formula (521): c'è un ω di troppo e, nella riga successiva, “ $L = I\omega$ ” $\rightarrow L = I\omega$;

formula (524): “ $\frac{d^2v}{dt^2}$ ” $\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}$.

Si noti inoltre come il lavoro venga indicato da W ('work'), in quanto il simbolo L sarà usato per il momento della quantità di moto. Alcuni esempi notevoli:

- asta degli equilibristi e aste (stecche, scope, etc.) in equilibrio su un dito: il grande momento di inerzia rallenta velocità di rotazione, permettendo all'equilibrista o al giocoliere di effettuare opportune manovre di correzione.
(Si tratta di situazioni di equilibrio instabile.)
- Ballerine, pattinatrici e tuffatori: come cambiare la velocità di rotazione avvicinando o allontanando gli arti dal busto.

Fluidi in movimento in tubo orizzontale a sezione variabile

- Abbiamo visto come in un condotto di sezione variabile disposto orizzontalmente la velocità cambia da punto a punto. Anche la pressione potrebbe variare: come?
(A maggior ragione, se il condotto non è orizzontale. Cominciamo ad analizzare il caso orizzontale.)

- Bilancio energetico di un liquido (incomprimibile e non viscoso, ovvero trascurando forze di attrito sia all'interno del fluido che fra fluido e pareti) che scorre orizzontalmente *in modo stazionario*, in un tubo di sezione variabile, mediante il ragionamento della “scomparsa” e “riapparizione”. (Per stazionarietà intendiamo che in un punto del tubo la velocità è sempre la stessa, trascurando quindi i ‘transienti’ di quando il fluido comincia a muoversi nel tubo.)

- se la velocità degli elementi dV (o $dm = \rho dV$) di liquido cambia, cambia anche l'energia cinetica associata;
- la variazione di energia cinetica deve essere pari al lavoro compiuto dalle forze di pressione del liquido esterno alla porzione compresa fra le sezioni A_1 e A_2 prese in considerazione;
- il lavoro (infinitesimo) totale vale (con la sezione A_1 a sinistra e A_2 a destra e v diretta da sinistra verso destra):

$$\begin{aligned}
 dL^{(P)} &= F_1 ds_1 - F_2 ds_2 \\
 &= P_1 A_1 ds_1 - P_2 A_2 ds_2 \\
 &= P_1 dV_1 - P_2 dV_2 \\
 &= P_1 dV - P_2 dV
 \end{aligned}$$

(in quanto, essendo il liquido incompressibile, $dV_1 = dV_2$, indicato quindi con dV);

- possiamo immaginare lo scorrimento in un piccolo tempo dt come lo spostamento di dV da una sezione all'altra,²⁷ sezioni caratterizzate eventualmente da velocità diverse; l'effetto netto è quello di un volume dV (o massa $dm = \rho dV$) che si sposta da A_1 (ove aveva velocità v_1) ad A_2 (ove ha velocità v_2);
- la variazione di energia cinetica complessiva dell'elemento infinitesimo di fluido dm vale quindi $\frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2$;
- eguagliando la variazione di energia cinetica al lavoro compiuto dalle forze esterne (esterne al liquido compreso fra la sezione A_1 e la sezione A_2 !) si ottiene finalmente

$$\begin{aligned}
 P_1 dV - P_2 dV &= \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \\
 P_1 dV - P_2 dV &= \frac{1}{2} \rho dV v_2^2 - \frac{1}{2} \rho dV v_1^2 \\
 P_1 - P_2 &= \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \\
 P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 &= P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2
 \end{aligned}$$

ovvero, in generale, per qualsiasi sezione (di tubo disposto orizzontalmente):

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} :$$

se la velocità aumenta la pressione diminuisce;

²⁷È con questo che si intende quello che viene chiamato “ragionamento a scomparsa e riapparizione”: ai fini della variazione dell'energia cinetica tutta la parte compresa fra le due sezioni su cui si compiono questi ragionamenti è ininfluenza in quanto, punto per punto la velocità è la stessa e quindi anche l'energia cinetica è la stessa.

- riassumendo (per tubo disposto orizzontalmente):
 - * se la sezione diminuisce, la velocità aumenta e quindi la pressione diminuisce;
 - * se la sezione aumenta, la velocità diminuisce e quindi la pressione aumenta.
- Un importante esempio: se una ostruzione diminuisce la sezione di una arteria, la velocità del sangue aumenta, la pressione diminuisce e il tratto di arteria subisce una forza esterna (a causa di maggiore pressione) che la fa comprimere ancor più!
- Tubo Venturi.

26 (Gio 17 maggio)

Introduzione all'ottica geometrica

- Velocità finita della luce (anche se irrilevante per l'ottica geometrica): prima evidenza dalla dipendenza del periodo di Io intorno a Giove, misurato sperimentalmente, a seconda che la Terra si allontanasse o si avvicinasse a Giove.
- Propagazione della luce in mezzi omogenei. Reversibilità dei *cammini ottici* (in generale).
- Assorbimento, diffusione, riflessione. Sul colore dei corpi illuminati da 'luce bianca' (cosa ben nota). Rifrazione della luce nel passare da un corpo trasparente all'altro.
- Legge della riflessione: angolo di incidenza uguale a quello di riflessione (angoli calcolati rispetto alla normale). Raggio incidente, raggio riflesso e normale al piano di riflessione sono coplanari.
- Legge della rifrazione: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, essendo n_1 e n_2 proprietà dei mezzi trasparenti ('indice di rifrazione').
→ la luce 'si stringe' verso la normale quando passa da n grande a n piccolo; 'si allarga' nel caso opposto.
- L'indice di rifrazione non soltanto cambia da un mezzo all'altro (acqua, aria, plastica, vetro, etc.), ma nel caso dei gas dipende anche dalla densità (caso tipico l'aria, la cui densità dipende dalla temperatura). Questo fa sì che il cambiamento di direzione della luce possa avvenire non soltanto in modo brusco (come nel passaggio aria-acqua), ma anche in modo continuo.

Nota: anche se useremo per semplicità questo schema (solo riflessione o sola rifrazione), in genere sono presenti sia riflessioni, diffusione, assorbimento e rifrazione, seppur con probabilità diverse.

Ancora liquidi in movimento: equazione di Bernoulli

- Caso generale, con tubo non necessariamente orizzontale, ma con tutte le altre ipotesi (liquido incompressibile e non viscoso; flusso stazionario):

- Nel bilancio energetico bisogna tener conto anche del lavoro compiuto dalla forza di gravità.
- Essendo la forza di gravità conservativa, il lavoro può essere valutato dall'opposto della variazione dell'energia potenziale.
- Anche in questo caso tale variazione può essere valutata mediante l'espedito di "scomparsa" e "riapparizione" usato per l'energia cinetica:

$$\Delta E_p|_{h_1}^{h_2} = -L^{(G)}|_{h_1}^{h_2} = -[-dm g (h_2 - h_1)] = dm g (h_2 - h_1).$$

(In pratica, ripetiamo, corrisponde a portare dm da h_1 a h_2 , mentre le restanti sezioni vengono semplicemente 'sostituite'.)

- Il bilancio energetico diventa quindi

$$P_1 \frac{dm}{\rho} - P_2 \frac{dm}{\rho} + dm g (h_1 - h_2) = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2$$

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2,$$

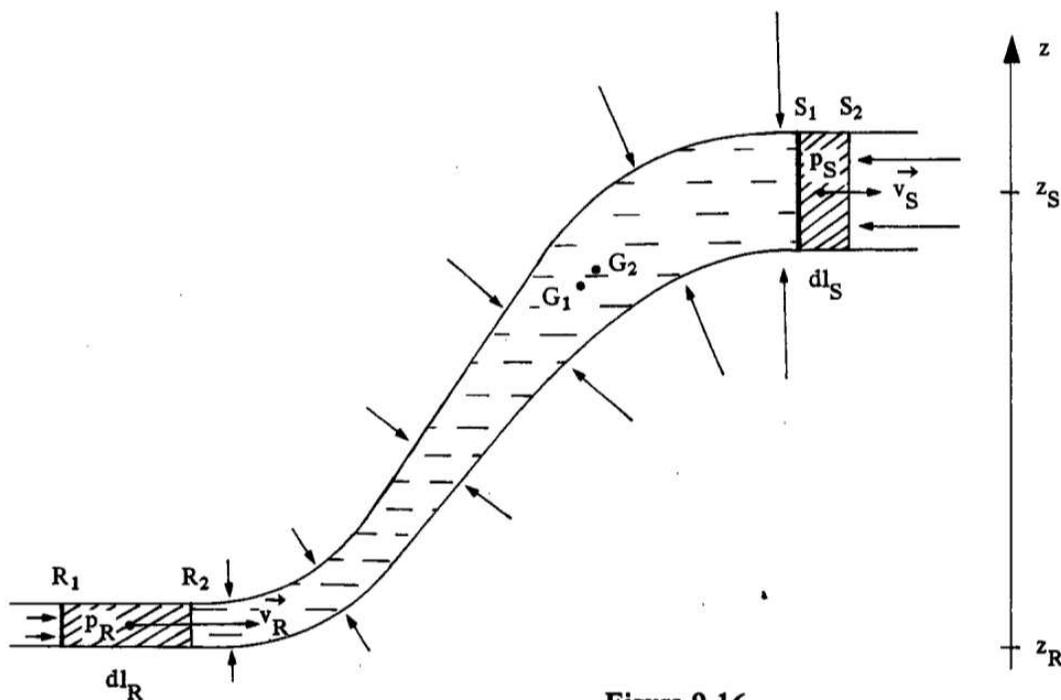


Figura 9.16

Figura 7: Figura illustrativa del ragionamento per arrivare all'equazione di Bernoulli dal bilancio energetico (da Franco Dupré, *Lezioni di Fisica*, Vol. 2, con notazione un po' diversa da quella usata a lezione: le sezioni A_1 e A_2 sono indicate con R e S ; velocità, pressioni e quote in corrispondenza sono indicate con \vec{v}_R e \vec{v}_S , p_S e p_R , z_S e z_R ; gli spostamenti sono indicati con dl_R e dl_S ; G_1 e G_2 indicano il baricentro nei due istanti considerati, anche se non vengono usati in quanto si segue l'espedito di "scomparsa" e "riapparizione"; le frecce ortogonali al tubo indicano infine le reazioni vincolari del tubo, ortogonali al moto e che quindi non compiono lavoro).

ovvero, in una sezione qualsiasi,

$$P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante}$$

nota come **equazione di Bernoulli**.

- Esempi notevoli:

- nel caso statico ($v = 0$) essa contiene la legge di Stevino (si noti che in questa trattazione il verso positivo di h è verso l'alto):

$$\begin{aligned} P_1 + \rho g h_1 &= P_2 + \rho g h_2 \\ P_2 - P_1 &= \rho g (h_1 - h_2) \\ P_2 &= P_1 + \rho g (h_1 - h_2) \end{aligned}$$

(Se h_2 è minore di h_1 , ovvero scendendo verso il basso, $h_1 - h_2 > 0$ e quindi $P_2 > P_1$)

- nel caso di un foro (di sezione A_2 piccola) in un recipiente di sezione (A_1) grande tenuto aperto:

- * le pressioni in corrispondenza di A_1 e A_2 sono uguali e pari a quella atmosferica (P_A);
- * essendo $A_1 \gg A_2$ la velocità di discesa del fluido nel recipiente può essere trascurata ($v_1 \approx 0$);
- * ne segue, prendendo h dal livello del foro

$$\begin{aligned} P_A + \rho g h_1 + 0 &= P_A + 0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \\ v_2 &= \sqrt{2 g h_1} \end{aligned}$$

\Rightarrow lo zampillo esce la stessa velocità che avrebbe una goccia caduta da una altezza di h_1 (“teorema di Torricelli”).

- Conseguenze (alcune già viste) dell'equazione di Bernoulli:

- legge di Stevino;
- teorema di Torricelli (zampillo da parete di grande recipiente);
- effetto Venturi, ad es.
 - * misuratore di velocità di aerei (benché approssimata);
 - * funzionamento dei vaporizzatori.

Momento di inerzia di corpi estesi ‘continui’

Come già visto con l'esercizio del momento di inerzia del disco:

- si considera il momento di inerzia infinitesimo dI dovuto all'elemento di massa dm posto alla distanza x dall'asse di rotazione: $dI = x^2 dm$;
- si riscrive poi $dm = \rho dV$, e dV in modo opportuno a seconda della geometria;
- infine si “sommano gli infiniti contributi infinitesimi”, facendo un opportuno integrale.

Disco (problema 25.6, vedi dettagli su **F1Inf** par 23.2)

Barra (intorno a un estremo): lasciato come esercizio.

Ancora su dinamica di corpi rigidi

- Ancora sulla potenza: confronto caso traslazionale unidirezionale e caso rotazionale (vedi tabelle di analogie su **F1Inf**):

– Lavoro per mantenere a una certa velocità un corpo imprimendo una certa forza, o, nel caso rotazionale, per mantenere una certa velocità angolare, imprimendo un certo momento della forza. Caso unidimensionale $dL = F ds$, da cui, con F costante, $P = dL/dt = F ds/dt = F v$.

Analogia

$$P = F \cdot v \leftrightarrow P = M \cdot \omega.$$

(Il momento della forza viene indicato in termini ingegneristici, “**coppia**”, in quanto, se l’oggetto rotante nell’insieme non subisce accelerazione, vuol dire che su di esso sono esercitate due forze, pari e opposte, ma non sulla stessa retta. Quindi il momento totale della forza è pari ai due momenti.)

- Momento delle forze e momento della quantità di moto in forma vettoriale. → **F1Inf** par 22.4, 23.1, [23.4, 23.5]^(*), 23.6, 23.7.

- Analogia:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

- Esperimento dimostrativo in aula con ‘giroscopio’ (banale ruota di bici, con piombo al posto del copertone al fine di massimizzare il momento di inerzia) al fine di visualizzare i vettori \vec{L} , \vec{M} e quindi $d\vec{L} = \vec{M} dt$.

^(*) Gli argomenti dei paragrafi fra parentesi quadra sono ‘tecnici’ e si assume siano stati affrontati nel programma di Matematica del primo semestre.

27 (Lun 21 maggio)

Ancora rotazione di corpi rigidi

- Sul problema del sistema di due masse che possono scorrere su un’asta rotante: aumento dell’energia cinetica quando le due masse si avvicinano (per effetto di una forza interna che le tira).

- Energia cinetica totale: energia cinetica di traslazione più energia cinetica di rotazione.

– Discussione qualitativa del corpo che scivola senza attrito e di quello che rotola senza strisciare: quale arriva infondo al piano inclinato con la velocità (di traslazione) maggiore?

→ **F1Inf** par 22.3

- Esempi automobilistici: rotazione dei veicoli in accelerazione e in frenata; dove è conveniente porre le ruote motrici e quelle frenanti; perché i dragster sono lunghi; pro e contro di trazione anteriore e posteriore; se conviene spingere o tirare i carrelli della spesa quando le ruote sterzanti non girano bene.

(→ **F1Inf**, p. 133)

- Momenti delle forze nel linguaggio delle leve: → **F1Inf**, par 23.8.

Forze centrali, conservazione del momento della quantità di moto e legge di Keplero sulla velocità 'delle aree'

Se \vec{r} e \vec{F} sono paralleli (o antiparalleli), il loro momento è nullo (proprietà generale del prodotto vettoriale). Ne segue che il momento della quantità di moto si conserva. Una banale conseguenza è il moto circolare uniforme in quanto forza centripeta diretta lungo \vec{r} . Ma essa vale nei moti orbitali, ad esempio in quello della Terra intorno al sole, essendo la forza 'centrale', anche se non costante: il momento della quantità di moto della Terra si conserva. Qualitativamente ne segue che se essa è più lontana va anche più lentamente (un caso notevole è quello delle comete).

La legge di Keplero sulla velocità areolare è una conseguenza della conservazione del momento della quantità di moto.

- Innanzitutto ricordiamo che il modulo del prodotto vettoriale $\vec{a} \wedge \vec{b}$, ovvero $a \cdot b \cdot \sin \theta$ è pari all'area del parallelogramma individuato dai due vettori \vec{a} e \vec{b} (se i vettori sono paralleli o antiparalleli va da sé che il parallelogramma è degenere e la sua area è nulla).
- Scriviamo quindi²⁸

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \wedge \vec{p} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m \vec{r} \wedge \frac{d\vec{s}}{dt} \\ \vec{L} &= m \frac{d}{dt} [\vec{r} \wedge d\vec{s}].\end{aligned}$$

Ma $\vec{r} \wedge d\vec{s}$ è pari all'area del parallelogramma infinitesimo individuato da \vec{r} e $d\vec{s}$, doppia all'area del triangolo i cui lati sono dati da $|\vec{r}|$ e $|d\vec{s}|$.

- Ne segue $dA = Rv (\sin \theta) dt/2$, ovvero

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}|,$$

ovvero se si considera dA/dt come un vettore, con verso entrante o uscente a seconda di come l'area viene 'spazzata',

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{L}.$$

- Caso di *forze centrali* (ad esempio quelle esercitate dal Sole su pianeti e comete): \vec{r} e \vec{F} sono antiparalleli, ne segue che il **momento della forza è sempre nullo**, il **momento della quantità si conserva**, e quindi la **velocità areolare è costante** (la ben nota 'legge' di Keplero viene riottenuta dalle leggi della meccanica).

²⁸Si noti come, applicando le regole generali delle derivate, si avrebbe

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \wedge d\vec{s}] = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge d\vec{s} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{s}}{dt}$$

ma il primo termine è nullo in quanto la derivata di \vec{r} è la velocità \vec{v} , la quale è parallela a $d\vec{s}$ in quanto $d\vec{s} = \vec{v}dt$ (il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo).

Forza dovuta a campo magnetico

Come altra applicazione del prodotto vettoriale vediamo, anche per completare l'argomento delle forze che una carica elettrica può subire, la *forza di Lorenz*.

- Bussola realizzata con magnetini e sferette.
- Forza su una carica in moto (solo se in moto!) dovuta a campo magnetico \vec{B} (forza di Lorenz):

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

:

- \vec{F}_L ortogonale al piano definito da \vec{v} e \vec{B} ;
- quindi $d\vec{s} = \vec{v} dt$ è normale a \vec{F}_L : la forza magnetica non compie lavoro, ergo
 - * cambia energia cinetica:
 - * il modulo della velocità rimane costante.
- in una regione di spazio in cui una particella carica è soggetta soltanto a un campo magnetico, essa esegue un moto circolare uniforme, con forza centripeta qvB e quindi accelerazione centripeta qvB/m . Ma essendo a_c legata a v e R dalla ben nota $a_c = v^2/R$, si ottiene

$$\frac{q}{m} vB = \frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{m}{q} \frac{v}{B}$$

A parità di q , v e B il raggio di curvatura è proporzionale alla massa della particelle.
→ *spettrometro di massa*.

- Frequenza di rotazione della particella in campo magnetico uniforme: → quaderno individuale.

Ottica – continuazione

- Prima misura della velocità della luce e questioni connesse (misura della longitudine).

28 (Gio 24 maggio)

Chiarimenti sui problemi in corso

- Discesa di cilindro rotolante lungo piano inclinato:
 - ovviamente per il momento di inerzia di un disco pieno si usa la stessa formula del disco 'pieno';
 - se invece si ha un cilindro vuoto (senza nemmeno coperchio e fondo), tutta la massa è (con buona approssimazione) localizzata a distanza R dall'asse e la formula è banalmente mR^2 ;

– per un corpo a simmetria cilindrica che rotola la velocità di traslazione e quella angolare sono collegate da $v = \omega R$.

- Selettore di velocità: data una particolare combinazione di \vec{E} , \vec{B} e \vec{v} la particella carica in movimento non subisce forze e quindi va dritta.

Sulle prime misure astronomiche della velocità della luce

- Rømer (1676): allungamento/accorciamento apparente del periodo di Io;
- Bradley (1725): aberrazione della luce.

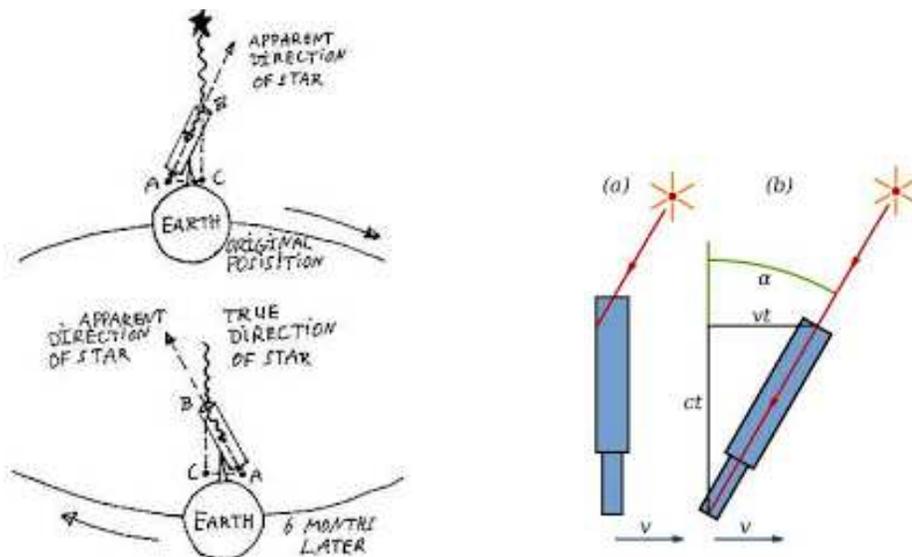


Figura 8: Aberrazione della luce stellare dovuta al movimento della Terra (<http://alfachallenge.blogspot.it/2010/12/stellar-aberration-bradley-1727.html>).

Le conclusioni di Rømer non erano state accettate universalmente per oltre mezzo secolo, fino alla scoperta di Bradley dell'aberrazione della luce, *cruciale* in quanto la sua spiegazione

- mostrava in modo inequivocabile come la Terra si muovesse rispetto alle stelle fisse;
- richiedeva una velocità finita della luce;
- portava ad una determinazione della velocità della luce, in sostanziale accordo con quella di Rømer

Bradley nel 1729 stimò che la velocità della luce dovesse essere 10210 volte (valore odierno: 10066 volte) la velocità della Terra, da cui $c = 306000$ km/s. Per dettagli/figure:

- http://en.wikipedia.org/wiki/James_Bradley
- http://en.wikipedia.org/wiki/Aberration_of_light
- <http://alfachallenge.blogspot.it/2010/12/stellar-aberration-bradley-1727.html>

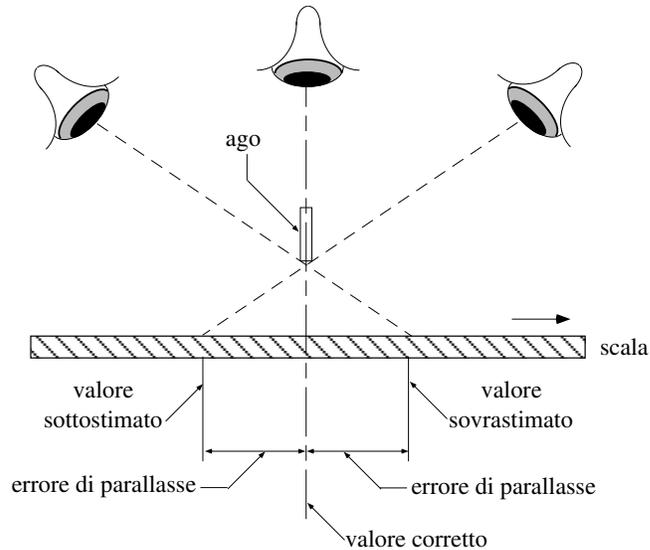


Figura 9: Errore di parallasse. La figura mostra la diversa lettura che si ottiene osservando la scala dello strumento da angolazioni diverse. Gli strumenti di precisione hanno una porzione della scala riflettente allo scopo di minimizzare tale effetto.

Esercizio

Aberrazione attesa, con valore attuale di c per *stella ortogonale* alla direzione di moto terrestre (va da se che l'effetto dipende dall'angolo ed in particolare è nullo per stelle lungo la direzione del moto). Mentre il raggio luminoso, attraversando il tubo del telescopio (figura 8), si avvicina all'oculare di $\Delta y = ct$ la Terra si è spostata di $\Delta x = v_T t$. Quindi $\Delta x/\Delta y = v_T/c$ è pari alla tangente dell'angolo α rispetto alla normale con il quale ci sembra di vedere la stella: *stesso effetto delle tracce di pioggia che vediamo scorrere obliquamente sui finestrini per effetto della velocità dell'auto* (e/o per effetto del vento).
rightarrow Quaderno individuale.

Parallasse e parsec

Come detto, le osservazioni di Bradley sull'aberrazione della luce erano una chiara evidenza del movimento della Terra rispetto alle stelle fisse. Un'altra evidenza del 'vagare' della Terra, in un certo senso analogo, è quello dovuto al *parallasse* ovvero il fatto che le stelle più vicine alla Terra, appaiono in punti diversi sullo sfondo delle stelle fisse a seconda della posizione della Terra nel sistema solare:

- effetto simile a quello del dito che sembra spostarsi rispetto allo sfondo a seconda dell'occhio con il quale lo guardiamo;
- analogo all'errore di parallasse che si commette nella lettura di strumenti analogici con lancette se non guardiamo la lancetta perpendicolarmente al piano del quadrante (vedi figura 9)

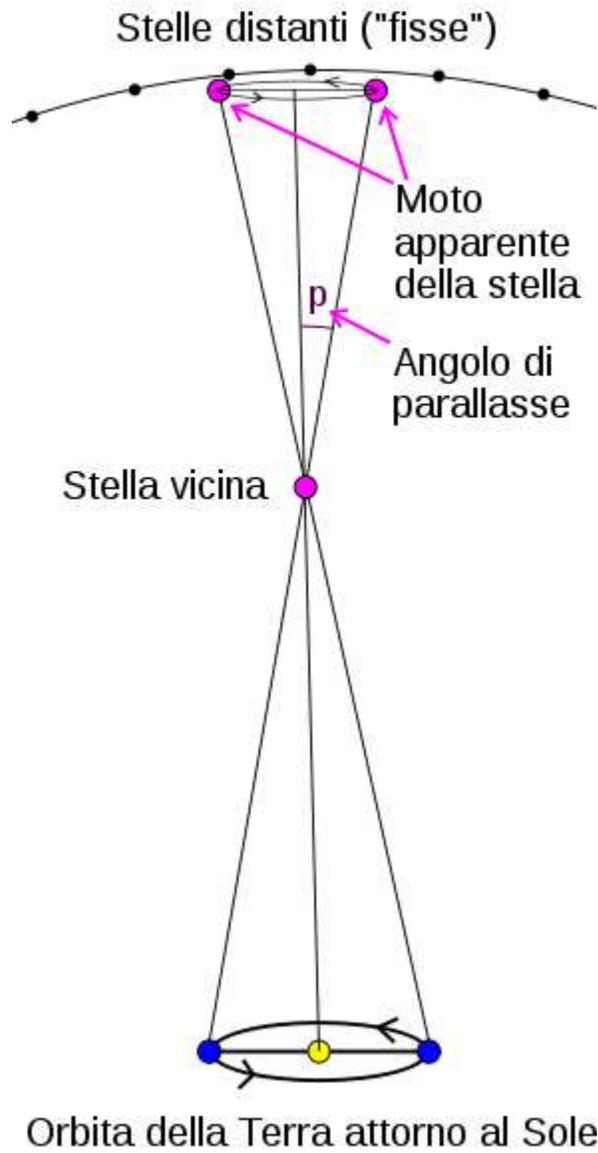


Figura 10: Angolo di parallasse (<http://it.wikipedia.org/wiki/Parallasse> e <http://it.wikipedia.org/wiki/Parsec>).

Parsec

Come esercizio calcoliamoci la distanza alla quale deve essere una stella affinché l'angolo di parallasse sia uguale a un secondo di arco (10). Tale distanza è importante in astronomia ed è conosciuta con il nome di *parsec* (simbolo 'pc').

→ Quaderno individuale.

Fenomenologia legata a rifrazione e riflessione

- Angolo limite e riflessione totale.
- Impossibilità di vedere talvolta oggetti immersi se la luce da loro diffusa non può raggiungerci a causa della riflessione totale.
- Sollevamento del fondo di piscine e ... accorciamento delle gambe al mare.
- Misura dell'indice di rifrazione usando l'effetto del sollevamento apparente del fondo, con misura in aria con parallelepipedo souvenir di Roma.
→ Quaderno individuale.
- Digressione sulla capacità di stimare le distanze:
 - visione stereoscopica (i due occhi osservano lo stesso punto con angoli diversi – sperimentazione in aula: occhio 'dominante'; Occhiali per vedere video in 3D: l'immagine è costituita dalla sovrapposizione della visione da due angoli, registrata mediante due telecamere, e gli occhiali servono a separare le due componenti);
 - confronto con altri oggetti (attenzione agli inganni prospettici).
- Fibra ottica.
- Miraggio inferiore e superiore.
- Aberrazione della posizione dei corpi celesti dovuta all'aumento della densità dell'aria dall'alto verso il basso (tipo quella di Bradley, ma dovuta al diminuire dell'indice di rifrazione con l'altezza: si somma a quella eventuale di Bradley; non dipende dalla distanza dei corpi celesti):

$$\begin{aligned} 45^\circ & : 1' \\ 15^\circ & : 4' \\ \approx 0^\circ & : 33' \end{aligned}$$

→ Quando il sole comincia a tramontare, al mare sull'orizzonte, in realtà è già tramontato *geometricamente!*

→ Schiacciamento del sole al tramonto: siccome vicino all'orizzonte l'aberrazione ha una forte dipendenza dall'angolo, varie 'fasce orizzontali' di sole subiscono una diversa variazione.

Chiarimenti sui vari tipi di 'aberrazione' della luce di corpi celesti

- Quella dovuta al moto della Terra (→ Bradley) riguarda tutte le stelle, indipendentemente dalla distanza. È massima allo zenit e decresce allontanandoci da esso.

- Quella dovuta al parallasse dipende invece dalla distanza del corpo celeste dal sistema solare. Per distanze molto grandi l'effetto sparisce. (Si immagini di ripetere l'esperimento di alternare gli occhi m, invece di usare il pollice, si pensi a pali verticali sempre più distanti: all'aumentare della distanza diminuisce l'effetto di spostamento laterale alternando gli occhi con cui guardare).
- Infine quella dovuta alla variazione di densità dell'atmosfera riguarda nuovamente tutti i corpi celesti ed è massima all'orizzonte. Inoltre, se a causa di movimenti di aria nell'atmosfera ci sono fluttuazioni di densità dell'aria, queste si riflettono sulla direzione apparente dei raggi luminosi, che diviene così fluttuante.

Fenomeni legati alla dispersione: introduzione

- L'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda. Ne segue che gli angoli 'di uscita' saranno diversi per i diversi colori:
 - scomposizione della luce in vari colori in un prisma (“The dark side of the moon”);
 - arcobaleno.

→ Prossima lezione.

Inoltre:

- Perché il cielo è azzurro?
- Perché il sole al tramonto è rossastro?
(E perché, almeno dalle nostre parti “rosso di sera bel tempo si spera”?)

Introduzione ai sistemi ottici

- Proprietà di convergenza dei raggi luminosi di lenti e specchi, con dimostrazioni al sole.
- Concetto di immagine e immagine di uno specchio piano.
- Camera oscura (scatola con buchino e carta da forno come schermo) e ‘immagine’ prodotta

29 (Lun 28 maggio)

Problemi 28.1 e 29.1

- Andava riconosciuta una oscillazione armonica in α , a cui daremo un senso fisino nella prossima lezione.
- Urto completamente anelastico più conservazione dell'energia dopo l'urto (e un po' di trigonometria).

Misure di densità dei liquidi

- Banale misura indiretta a partire da massa e volume.
- Misura *diretta* mediante densimetro a galleggiamento (si sfrutta la spinta di Archimede).
- Misura *diretta* mediante rifrattometro. Ha il vantaggio di richiedere pochissimo liquido.

Altra fenomenologia legata a rifrazione

- Spostamento ‘laterale’ dei raggi ottici nell’attraversamento (non ortogonale) di lastre spesse.
- Prima retto di vetro: doppia rifrazione totale. Perché funziona con il vetro e non con recipiente di stessa forma riempito di acqua.
- Arcobaleni: primario e secondario.
- Breve cenno alla bellezza del diamante.

Specchio sferico concavo

- Formazione di immagini in generale e in *approssimazione di Gauss* (grande raggio di curvatura; raggi parassiali).
- Fuoco come punto di convergenza (approssimativa) di raggi che vengono dall’infinito (e quindi paralleli): $f = R/2$.
- Raggi notevoli per la costruzione di immagini: quelli proseguono per fuoco e che provengono da esso.
(No ta: in letteratura e su internet si trova spesso anche un terzo raggio notevole per la costruzione delle immagini. Si tratta di quello che passa per il centro della sfera e quindi che viene riflesso all’indietro. Ma è preferibile far uso di quelli passanti per il fuoco in quanto essi possono essere usati in generale.)
- Immagini virtuali. Immagini dritte e immagini capovolte.
- Equazione che lega q a p tramite f :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

- Convenzione dei segni di p , q e f e significato di $q < 0$.
- Esempi di costruzione di immagini per $p = 5f$ e $p = f/2$.

30 (Mar 29 maggio)

Pendolo semplice

- Modellizzazione: massa sospesa puntiforme; filo inestensibile e senza massa;
- forze in gioco: gravità e reazione vincolare;
- (opportuna) scomposizione della forza peso, in modo che una componente sia bilanciata dalla reazione vincolare del filo;
- seconda legge di Newton lungo la direzione tangente alla circonferenza;
 - equazione differenziale che ne deriva;
 - equazione differenziale le la (più utile!) variabile α ;
 - approssimazione per piccoli angoli ($\sin \alpha \approx \alpha$):
 - riconosciamo oscillatore armonico con $\omega^2 = g/l$.

- A questo punto conosciamo immediatamente la soluzione $\alpha(t)$ nel caso in cui $\alpha(0) = \alpha_M$ e $\alpha'(0) = 0$:

$$\alpha(t) = \alpha_M \cos \omega t,$$

da cui ci si calcola facilmente $\alpha'(t) = d\alpha/dt$.

- **Attenzione** a non confondere la pulsazione ω (costante!) con la velocità angolare $\alpha'(t)$, che invece dipende dal tempo (→ esattamente come altre ‘velocità’ in altri oscillatori armonici).

Dettagli su “F1inf”: 8.4,

Specchi sferici concavi e convessi (in approssimazione di Gauss)

- Specchi convessi:
 - fuoco virtuale (ove si concentrano i prolungamenti dei raggi riflessi): $\rightarrow f < 0$ ($f = -r/2$);
 - vale la stessa equazione dei punti coniugati:²⁹ $1/p + 1/q = 1/f$, da cui $1/q = 1/f - 1/p$: essendo $f < 0$ ne segue $1/q < 0$, ovvero $q < 0$ per qualsiasi p ;
 - costruzione di immagini;
- Costruzione di immagini (specchi convessi: immagini sempre virtuali, dritte, rimpicciolate.)
- Specchio piano come limite degli specchi sferici nel limite di $R \rightarrow \infty$ e quindi $1/f \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &\rightarrow 0 \\ q &\rightarrow -p \end{aligned}$$

(come già noto).

²⁹ **Attenzione:** questa equazione si basa sulla convenzione dei segni per q e f . Se cambia la convenzione può cambiare il segno davanti a $1/q$ e a $1/f$.

- Formula dell'ingrandimento (delle dimensioni trasversali) degli specchi: $M = -q/p$ (M , come 'magnification'), ove il segno di M indica se l'immagine è dritta o capovolta.
- Introduzione alle **lenti sottili** in approssimazione di Gauss, quando il mezzo iniziale e quello finale sono uguali (tipicamente aria) *in analogia agli specchi*, ma con delle differenze legate al fatto che la concentrazione di energia luminosa avviene dalla parte opposta dell'immagine in quanto i raggi attraversano la lente.
 - Nelle lenti **convergenti**
 - * i raggi paralleli all'asse provenienti da sinistra si concentrano nel fuoco a destra;
 - * i raggi paralleli all'asse provenienti da destra si concentrano nel fuoco a sinistra.
 - Nelle lenti **divergenti**
 - * i raggi paralleli all'asse provenienti da sinistra, divergono a destra, in modo tale che i loro prolungamenti si concentrano nel fuoco virtuale a sinistra;
 - * i raggi paralleli all'asse provenienti da destra, divergono a sinistra, in modo tale che i loro prolungamenti si concentrano nel fuoco virtuale a destra.

Su queste regolette si basa la costruzione delle immagini, in analogia a quanto visto per gli specchi sferici in approssimazione di Gauss. (Ci sarebbero anche altri raggi notevoli dei due casi, ma conviene memorizzare queste due regole, essendo generali.)

Inoltre

- Le due distanze focali sono uguali (stiamo assumendo che il mezzo a destra e sinistra sia lo stesso, tipicamente aria-aria);
- $f > 0$ per lenti convergenti e < 0 per lenti divergenti.
- Vale la stessa legge dei punti coniugati degli specchi, espressa in termini di p , q e f :
 - * se l'immagine è dall'altra parte dell'oggetto, rispetto alla lente, essa è reale e $q > 0$;
 - * altrimenti essa è immaginaria e $q < 0$.

31 (Gio 31 maggio)

Sulla soluzione approssimata del moto del pendolo

- Problema 30.1.c: la velocità giusta è quella calcolata mediante la conservazione dell'energia meccanica, in quanto quella calcolata come $v = l d\alpha/dt$ risente dell'approssimazione per piccoli angoli della soluzione dell'equazione differenziale.

Perché il pendolo di un metro “batte il secondo”?

- Problema 30.2 e breve cenno alle origini del metro, al *pendolo del secondo* e al *metro cattolico*.

Chi fosse interessato al soggetto (assolutamente fuori programma) può saperne di più visitando <https://www.roma1.infn.it/~dagos/history/>.

Alcune applicazione di una lente convergente

- Problema 30.5: dalla macchina fotografica al proiettore per diapositive/pellicole.

Esperimenti in aula sulla misura di diottrie

(Non eseguiti per mancanza di tempo)

- Lenti convergenti \rightarrow fuoco reale
- Lenti divergenti \rightarrow fuoco virtuale: usiamo lo stesso espediente del sollevamento del fondo e misuriamo la distanza focale per confronto con altri oggetti nello spazio.

Principio di Fermat e applicazioni

- Nota storica: Fermat è morto 11 anni prima della prima misura della velocità della luce (ma il fatto che la propagazione della luce non fosse istantanea era abbastanza scontato, per ragioni di *causalità*).
- Si ipotizza velocità diverse in mezzi diversi.
- Reinterpretazione della legge di Snell della rifrazione.
- Effettivamente è stato misurato che la luce viaggia in un mezzo di indice di rifrazione n con la velocità c/n .
- Specchi parabolici e (soprattutto) antenne paraboliche.

Lente di ingrandimento – immagine all'infinito

Immaginiamo di porre l'oggetto (ad es. un piccolo insetto) fra lente e fuoco, talmente vicino al fuoco da scrivere p come $p = f - \epsilon$, con ϵ che faremo tendere a zero.

- L'immagine si formerà quindi in

$$\begin{aligned}q &= \frac{(f - \epsilon) \cdot f}{(f - \epsilon) - f} \\ &= -\frac{f^2}{\epsilon} \rightarrow -\infty\end{aligned}$$

(immagine virtuale all'infinito).

- E l'ingrandimento sarà

$$\begin{aligned}M &= -\frac{q}{p} = -\frac{(f - \epsilon) \cdot f}{(f - \epsilon) - f} \cdot \frac{1}{(f - \epsilon)} \\ &= \frac{f}{\epsilon} \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Che senso ha una **immagine infinitamente grande a distanza infinita?**

- In realtà quello che conta è l'**ingrandimento angolare**, ovvero il rapporto fra y'/d' e y/d , dove d e d' sono, rispettivamente, le distanze fra occhio oggetto o immagine (si noti come, essendo q molto grande, varrà l'approssimazione $d' \approx q$):

$$\begin{aligned} y' &= M y = \frac{f}{\epsilon} y \\ \alpha &= \frac{y'}{d'} \\ &\approx \frac{y'}{q} = \frac{y \cdot f/\epsilon}{f^2/\epsilon} = \frac{y}{f} \\ \alpha_0 &= \frac{y}{d}. \end{aligned}$$

Indicando con M_α l'ingrandimento angolare abbiamo

$$M_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{y/f}{y/d} = \frac{d}{f}.$$

- Ovviamente M_α dipenderà dalla distanza alla quale ci possiamo avvicinare per osservare y senza la lente. Chiamando d_0 la distanza minima di visione minima (dipendente dalle persone e dalla loro età e posta convenzionalmente a 25 cm – ma una persona giovane può arrivare ben più vicino!) otteniamo

$$M_{\alpha_{max}} = \frac{d_0}{f}.$$

Le lenti più 'potenti' sono quelle che hanno una focale più corta.

Lente di ingrandimento – occhio 'attaccato' alla lente

In realtà c'è un altro modo di usare la lente di ingrandimento, la quale produce un ingrandimento angolare maggiore. Si tratta di mettere l'occhio molto vicino alla lente e fare in modo che l'immagine si formi alla distanza d_0 (vedi problemi 31.6 e 31.7).

Dipendenza dell'*angolo di campo* dalla focale dell'obiettivo e dalle dimensioni del sensore.

- Ricordiamo (vedi ad esempio problema 30.5) che in 'normali' situazioni fotografiche $p \gg f$ da cui $q \approx f$. Ne segue quindi che, essendo quindi

$$y' = |M| \cdot y = |-q/p| \cdot y \approx (f/p) \cdot y,$$

abbiamo

$$\frac{y}{p} \approx \frac{y'}{f}.$$

- Indichiamo, per motivi che vedremo fra breve, $\alpha/2$ l'angolo opposto a y del triangolo rettangolo che ha i cateti y e p (e quindi uguale all'angolo opposto a y' del triangolo rettangolo che ha i cateti y' e f). Abbiamo quindi (date le varie approssimazioni)

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{y}{p} = \frac{y'}{f}$$

da cui

$$\alpha = 2 \arctan \frac{y}{p} = 2 \arctan \frac{y'}{f}.$$

- Il massimo di α si ottiene quando y' è massimo (y'_M), ovvero quando è pari alla **metà della dimensione** (orizzontale o verticale, o anche diagonale – attenzione alle convenzioni!) del sensore, a seconda di quello che ci interessa, e che indichiamo con L , essendo un lato (o anche la diagonale!) del rettangolo che definisce il sensore:

$$\alpha_M = 2 \arctan \frac{y'_M}{f} = 2 \arctan \frac{L/2}{f}.$$

- L'angolo α è chiamato *angolo di campo* e, come dice il nome, indica l'angolo di visuale che si può comprire con una foto. Per questo è importante capire se si riferisce al lato maggiore del rettangolo della foto (foto 'orizzontale', o 'landscape'), a quello minore (foto 'verticale', o 'portrait'), o alla diagonale.
- Ad esempio, per il formato 'classico' delle foto con pellicola (il cosiddetto '35 mm', di dimensione del fotogramma 24 mm × 36 mm) e un obiettivo da 50 mm (obiettivo 'normale'), abbiamo

Visione orizzontale: $L = 36$ mm,

$$\alpha_M = 40^\circ.$$

Visione verticale: $L = 24$ mm,

$$\alpha_M = 27^\circ.$$

Diagonale: $L = 43.3$ mm,

$$\alpha_M = 47^\circ.$$

- Per distanze focali molto grandi, ovvero $f \gg L$, possiamo approssimare ulteriormente con (in radianti!)

$$\alpha_M \approx \frac{L}{f}.$$

Ad esempio un obiettivo da 200 mm montato su una macchina fotografica *full frame* (questo è il nome che si dà alle macchine fotografiche che hanno un sensore grande quanto un fotogramma delle classiche fotocamere reflex '35 mm') copre 10 gradi con la macchina fotografica tenuta orizzontalmente.

Un obiettivo di focale 720 mm (questo valore entrerà nei problemi) copre invece, sempre orizzontalmente, un angolo di poco inferiore ai 3 gradi (2.86°).

Lunghezza focale equivalente

Siccome le dimensioni dei sensori sono molto varie (vedi immagine sul sito) e i fotografi sono abituato all'angolo ottenuto con reflex classiche, oggi giorno si fa spesso uso della *focale equivalente* ("35 mm film equivalent"), ovvero della lunghezza focale che su una fotocamera *full frame* avrebbe dato lo stesso angolo di campo di quella usata. Ad esempio, relativamente alla **foto del cartello dell'estintore**, analizzando i dettagli al computer i dettagli della foto si legge (unità in millimetri):

focal length 720,0 (35mm film); 123,0 (lens)

Significa che la foto è stata scattata con una focale (vera) di 123 mm, equivalente (per quanto riguarda l'angolo di campo) a 720 mm su una fotocamera 'full frame'.

Siccome la macchina fotografica tascabile usata ha un sensore di $4.55 \text{ mm} \times 6.17 \text{ mm}$ possiamo verificare facilmente:

$$\frac{6.17 \text{ mm}}{123 \text{ mm}} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 2.87^\circ,$$

esattamente quanto avevamo ottenuto nel punto precedente per un obiettivo da 720 mm montato su una fotocamera ‘full frame’ (sensore, ripetiamo, $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$).

Uso telemetrico delle fotocamere – generalità

Come abbiamo visto all’inizio del corso, se in qualche modo riusciamo a stimare le dimensioni angolari di un oggetto (ad esempio per confronto con quelle note di Sole e Luna) siamo in grado di valutare la distanza a cui esso si trova se siamo in grado di ipotizzarne ragionevolmente le dimensioni lineari (o, viceversa, valutarne le dimensioni se ne conosciamo la distanza). Vediamo come estrarre le dimensioni angolari di un oggetto da una foto, facendo uso di quanto appreso nel punto precedente. Per far ciò abbiamo bisogno di conoscere

- la lunghezza focale con cui è stata scattata la foto (se si usa uno zoom questa può cambiare, ma fortunatamente tale informazione è contenuta nella foto stessa nel cosiddetto *Exif*, accessibile con i programmi di visualizzazione delle foto).
- La grandezza dell’immagine dell’oggetto sul sensore (y').

Per valutare la grandezza dell’immagine possiamo valutare la sua lunghezza in pixel e scalarla conoscendo le dimensioni del sensore sia in pixel che in millimetri. Oppure, se non è richiesta una grande precisione e l’immagine dell’oggetto occupa una frazione considerevole della foto, possiamo misurare sullo schermo le dimensioni con il righello (immagine dell’oggetto e foto intera) e, nuovamente, ottenere la grandezza di millimetri mediante opportune proporzioni.

Abbiamo comunque bisogno di conoscere le dimensioni del sensore. Un trucco per evitare l’uso di questa informazione è di usare la lunghezza focale equivalente (‘35mm film’), in quanto le dimensioni dei sensori ‘full frame’ sono ben note e, ricordiamo, valgono $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$. Quindi una semplice proporzione, o mediante il conteggio dei pixel, o usando il righello sullo schermo, ci permette di valutare facilmente *la dimensione che l’immagine sull’oggetto avrebbe su un sensore full frame*.

Uso telemetrico delle fotocamere – dettagli e un esempio numerico

Per ricondurci alla formule usate precedentemente, immaginiamo che l’oggetto sia centrato sull’asse ottico e indichiamo con ΔY la sua dimensione trasversale, in modo tale che $y = \Delta Y/2$ (ricordiamo che y nelle costruzioni ottiche che abbiamo fatto finora è ‘appoggiato’ sull’asse ottico e ha la freccia verso l’alto). Allo stesso modo indichiamo con $\Delta Y'$ la dimensione trasversale dell’immagine. Ovvero, anche in questo caso, $y' = \Delta Y'/2$.

Ricordando la relazione che abbiamo visto sopra, e che riscriviamo per comodità,

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{y}{p} = \frac{y'}{f}$$

otteniamo quindi

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta Y/2}{p} = \frac{\Delta Y'/2}{f}.$$

Notiamo quindi come questa relazione vale con buona approssimazione anche se oggetto e immagine non sono centrate sull'asse ottico.

Segue un esempio numerico

- Un sensore ha dimensioni $13.2 \text{ mm} \times 8.8 \text{ mm}$, con $5472 \text{ px} \times 3648 \text{ px}$ ('px' sta per pixel).
- Immaginiamo che in una foto scattata con una focale di 13.3 mm (avendo tale fotocamera uno zoom, la lunghezza focale è variabile) ci sia un oggetto largo 450 px , disposto orizzontalmente.
- Scalando, otteniamo che l'immagine di tale oggetto è larga

$$\Delta Y' = \frac{450 \text{ px}}{5472 \text{ px}} \times 13.2 \text{ mm} = 1.09 \text{ mm}.$$

- Ne risulta

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \arctan \frac{\Delta Y'/2}{f} \\ &= 2 \arctan \frac{0.650 \text{ mm}}{13.2 \text{ mm}} \\ &= 0.082 \text{ rad} \\ &= 4.7^\circ. \end{aligned}$$

- Infine, se ci accade di conoscere la larghezza vera dell'oggetto, che ipotizziamo qui essere pari a 20 cm , possiamo valutarne la distanza dall'angolo, ricordando che $\tan(\alpha/2) = (\Delta Y/2)/p$:

$$p = \frac{\Delta Y/2}{\tan(\alpha/2)} = 243 \text{ cm}$$

- Ovviamente si poteva anche usare la relazione $\Delta Y/p = \Delta Y'/f$ (è una delle relazioni viste precedentemente, nella quale abbiamo semplificato un fattore 2 presente in entrambi i membri), ottenendo

$$\begin{aligned} p &= \frac{\Delta Y}{\Delta Y'} \cdot f \\ &= \frac{20 \text{ cm}}{1.09 \text{ mm}} \times 13.2 \text{ mm} = 243 \text{ cm}. \end{aligned}$$

F I N E

(“... se ... fossimo riusciti ad annoiarvi, credete che non s'è fatto apposta.”)