tempo t^* nell'esponenziale rappresenta indicativamente il tempo dopo il quale la legge di scarica è praticamente esponenziale.[13]

7.10 Soluzione dell'RC mediante variabili complesse

Ora che abbiamo analizzato i vari aspetti dell'RC in regime sinusoidale (più qualche digressione) facciamo una parentesi tecnica sul modo di risolvere l'equazione di partenza, (7.3), che riscriviamo qui per comodità

$$V(t) - RC\frac{dV_C}{dt} - V_C \;=\; 0\,, \tag{7.90}$$

Avendo indicato ora la tensione del generatore con $V(t)$. Come dovrebbe essere ben noto a chi segue questo corso, il modo standard per risolverla è di usare variabili complesse. La scelta didattica fatta qui serve a mostrare che per problemi semplici non c'è nessuna necessità di usare tali metodi. Comunque, come abbiamo visto nel paragrafo 7.3, il metodo puramente trigonometrico può essere un po' laborioso ed è quindi opportuno usare l'altro metodo, soprattutto in vista di quando dovremo affrontare un problema leggermente più complicato. Nel seguito passeremo addirittura ad un terzo metodo, il *metodo simbolico*, che effettivamente sarà quello che permette di arrivare più rapidamente ai risultati.

7.10.1 Rappresentazione esponenziale dei numeri complessi

Ricordiamo in cosa consiste l'uso di variabili complesse per grandezze che variano nel tempo secondo funzioni sinusoidali. Ad una generica grandezza $X(t)$, caratterizzata da frequenza, ampiezza e fase (relativa ad un'altra grandezza), e che quindi scriveremmo normalmente come

$$X(t) \;=\; X_0 \cos\left(\omega t + \varphi_X\right), \tag{7.91}$$

associamo la grandezza complessa

$$x(t) \;=\; X_0\, e^{j(\omega t + \varphi_X)}\,, \tag{7.92}$$

ove j sta per $\sqrt{-1}$, usualmente indicato con i (in questo testo il simbolo i sarà riservato alla corrente!). Come è ben noto, data $x(t)$ possiamo ottenere $X(t)$ come sua parte reale,[14] ovvero

$$X(t) \;=\; \mathrm{Re}[x(t)]\,, \tag{7.93}$$

[13] Si ricorda che il condensatore insegue sempre la tensione di ingresso e quindi la sua velocità di decrescita dipende dalla differenza fra i valori istantanei di V_{out} e V_{in}. Soltanto quando V_{in} è praticamente nullo si ha un esponenziale.

[14] Ovviamente la parte reale non ha niente di più 'reale' della parte immaginaria, la quale non significa 'di fantasia'. Ciò è semplicemente dovuto al fatto di considerare funzioni coseno. Potevamo fare la scelta opposta e allora la soluzione 'reale' (nel senso di 'fisica') sarebbe stata associata alla parte immaginaria.

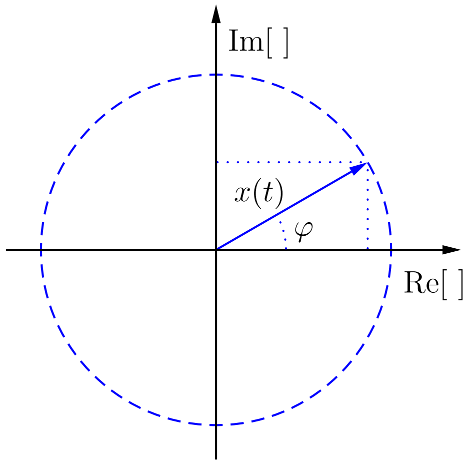

Figura 7.17: Rappresentazione di un numero complesso sul piano complesso. In particolare, figura mostra il caso in cui il modulo è costante e la fase (φ) varia con il tempo.

in quanto $X(t)$ può essere scritto, mediante la formula di Eulero,[15] come

$$X(t) \;=\; X_0\cos\left(\omega t+\varphi_X\right)+jX_0\sin\left(\omega t+\varphi_X\right). \tag{7.94}$$

Al variare del tempo $x(t)$ descrive nel piano complesso un cerchio di raggio X_0 intorno all'origine (vedi figura 7.17). La parte reale e la parte immaginaria rappresentano quindi la proiezione sugli assi cartesiani del punto individuato da $x(t)$ ad un certo istante.

Una proprietà importante dei numeri complessi rappresentati come $x(t)$ è il loro comportamento quando sono derivati rispetto al tempo. Otteniamo infatti

$$\frac{dx}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}\,X_0\,e^{j(\omega t+\varphi_X)} = j\omega X_0\,e^{j(\omega t+\varphi_X)} \tag{7.95}$$
$$\;=\; j\omega\,x(t)\,. \tag{7.96}$$

Questo è il punto chiave per il loro utilizzo nei circuiti in regime sinusoidale. L'operazione di derivata rispetto al tempo equivale a moltiplicare $x(t)$ per $j\omega$. La derivata seconda la moltiplica per $-\omega^2$ e così via. C'è ora da capire il significato di questa proprietà. Ricordandoci della formula di Eulero, possiamo

[15]Ricordando che, espandendo in serie di Taylor le funzioni $e^{j\,x}$, $\sin x$ e $\cos x$, si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{j\,x} &= 1+j\,x-\frac{x^2}{2!}-j\,\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+j\,\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-j\,\frac{x^7}{7!}+\dots \\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots \\ \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\,. \end{aligned}$$

da cui $e^{j\,x} = \cos x + j\sin x$.

riscrivere j come $e^{j\pi/2}$, da cui

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= j\omega\, x(t) && (7.97)\\
&= (\omega\, e^{j\pi/2})\, X_0\, e^{j(\omega t+\varphi_X)} && (7.98)\\
&= \omega X_0\, e^{j(\omega t+\varphi_X+\pi/2)}. && (7.99)
\end{aligned}$$

Quando prendiamo la parte reale della derivata, otteniamo quindi

$$\mathrm{Re}\left[\frac{dx}{dt}\right] = \omega X_0\, \cos\left(\omega t + \varphi_X + \pi/2\right), \qquad (7.100)$$

riottenendo un'interessante proprietà già incontrata nel paragrafo 7.4.1: derivare una funzione sinusoidale equivale a moltiplicarla per la sua pulsazione e sfasarla 'in avanti' di $\pi/2$.

7.10.2 Applicazione all'RC sinusoidale

A questo punto siamo pronti ad affrontare la nostra equazione. Ma prima chiariamo bene il significato dei vari simboli. Finora abbiamo indicato le varie grandezze (con eccezione di f, che abbandoneremo subito) con lettere maiuscole: V, I, e così via. Manterremo questa notazione per le grandezze fisiche, indicando invece le variabili complesse associate con le lettere minuscole. Quindi in generale avremo

$$V(t) = V_0 \cos\left(\omega t + \varphi\right), \qquad (7.101)$$

a cui associamo

$$v(t) = V_0\, e^{j(\omega t+\varphi)}, \qquad (7.102)$$

che riscriviamo per comodità come

$$v(t) = v_0\, e^{j\omega t}, \qquad (7.103)$$

ove

$$v_0 = V_0\, e^{j\varphi} \qquad (7.104)$$

è ancora un numero complesso che contiene soltanto modulo e fase (e quindi quanto ci interessa!), mentre la dipendenza dal tempo (che sappiamo essere la stessa in tutte le grandezze di interresse, trattandosi di oscillazioni forzate) è fattorizzata in $e^{j\omega t}$.

Facciamo l'inventario delle variabili di interesse: la tensione del generatore, la corrente, la tensione ai capi di R e quella ai capi di C:

$$\begin{aligned}
v(t) = V_0\, e^{j\omega t} &\quad\rightarrow\quad V(t) = V_0 \cos\left(\omega t\right)\\
i(t) = i_o\, e^{j\omega t} = I_0\, e^{j(\omega t+\varphi_I)} &\quad\rightarrow\quad I(t) = I_0 \cos\left(\omega t + \varphi_I\right)\\
v_R(t) = v_{R_o}\, e^{j\omega t} = V_{R_0}\, e^{j(\omega t+\varphi_R)} &\quad\rightarrow\quad V_R(t) = V_{R_0} \cos\left(\omega t + \varphi_R\right)\\
v_C(t) = v_{C_o}\, e^{j\omega t} = V_{C_0}\, e^{j(\omega t+\varphi_C)} &\quad\rightarrow\quad V_C(t) = V_{C_0} \cos\left(\omega t + \varphi_C\right)
\end{aligned}$$