7.12 Appendice 7a: Richiami sulle operazioni con numeri complessi

Un numero complesso può essere rappresentato da un vettore nel piano complesso ed espresso o in termini delle sue proiezioni sugli assi cartesiani (asse x: parte reale; asse y: parte immaginaria), o dal suo modulo e dall'angolo che esso forma rispetto all'asse x (detto anche *fase*):[17]

$$\vec{A} = \mathrm{Re}[\vec{A}] + j\mathrm{Im}[\vec{A}] \tag{7.126}$$

$$\vec{A} = a\cos\alpha + ja\sin\alpha \tag{7.127}$$

Esso può essere espresso in notazione complessa, facendo uso della formula di Eulero:

$$ae^{j\alpha} = a\cos\alpha + ja\sin\alpha. \tag{7.128}$$

Ne segue:

$$\mathrm{Re}[\vec{A}] = a\cos\alpha \tag{7.129}$$

$$\mathrm{Im}[\vec{A}] = a\sin\alpha \tag{7.130}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\mathrm{Re}^2[\vec{A}] + \mathrm{Im}^2[\vec{A}]} = a \tag{7.131}$$

$$\alpha = \arctan\frac{\mathrm{Im}[\vec{A}]}{\mathrm{Re}[\vec{A}]} \tag{7.132}$$

$$= \arccos\frac{\mathrm{Re}[\vec{A}]}{|\vec{A}|} \tag{7.133}$$

$$= \arcsin\frac{\mathrm{Im}[\vec{A}]}{|\vec{A}|} \tag{7.134}$$

Dati inoltre i due numeri complessi $\vec{B}$ e $\vec{C}$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= be^{j\beta} = b\cos\beta + jb\sin\beta \\ \vec{C} &= ce^{j\gamma} = c\cos\gamma + jc\sin\gamma,\end{aligned}$$

le operazioni di somma algebrica, moltiplicazione e divisione si calcolano utilizzando la definizione di operazione fra numeri complessi. Ne segue:

- <u>Somma algebrica</u>

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} \pm \vec{B} \\ &= \left(\mathrm{Re}[\vec{A}] \pm \mathrm{Re}[\vec{B}]\right) + j\left(\mathrm{Im}[\vec{A}] \pm \mathrm{Im}[\vec{B}]\right).\end{aligned}$$

[17] In questa appendice utilizziamo le notazioni $\vec{A}$, $\vec{B}$, etc. per indicare i numeri complessi, notazione che utilizzeremo nel seguito per i *fasori* (numeri complessi che contengono modulo e fase di grandezze fisiche importanti in regime sinusoidale, come le varie ampiezze di oscillazioni e le *impedenze*, di cui parleremo nel capitolo 11).

Segue la regola:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[\vec{C}] &= \mathrm{Re}[\vec{A}] \pm \mathrm{Re}[\vec{B}] && (7.135)\\ \mathrm{Im}[\vec{C}] &= \mathrm{Im}[\vec{A}] \pm \mathrm{Im}[\vec{B}]. && (7.136)\end{aligned}$$

La parte reale e la parte immaginaria della somma algebrica di due numeri complessi sono date rispettivamente dalla somma algebrica delle parti reali e delle parti immaginarie

- Prodotto:

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A}\cdot\vec{B}\\ &= (\mathrm{Re}[\vec{A}] + j\mathrm{Im}[\vec{A}])\cdot(\mathrm{Re}[\vec{B}] + j\mathrm{Im}[\vec{B}]) && (7.137)\end{aligned}$$

Questa operazione si effettua più agevolmente passando alle coordinate polari (che in pratica significa far uso della notazione esponenziale):

$$\begin{aligned} \vec{C} &= (a\cos\alpha + ja\sin\alpha)\cdot(b\cos\beta + jb\sin\beta)\\ &= a\,e^{j\alpha}\cdot be^{j\beta} = ab\,e^{j(\alpha+\beta)} && (7.138)\\ &= ab[\cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta)]\,, && (7.139)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} c &= a\cdot b && (7.140)\\ \gamma &= \alpha+\beta\,, && (7.141)\end{aligned}$$

dove c e γ sono il modulo e la fase di $\vec{C}$. Ne segue che
il modulo del prodotto di numeri complessi è pari al prodotto dei moduli, la fase è pari alla somma delle fasi.

- divisione

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \frac{\vec{A}}{\vec{B}}\\ &= (\mathrm{Re}[\vec{A}] + j\mathrm{Im}[\vec{A}])/(\mathrm{Re}[\vec{B}] + j\mathrm{Im}[\vec{B}]) && (7.142)\end{aligned}$$

Anche per la divisione conviene passare alle coordinate polari:

$$\begin{aligned} \vec{C} &= (a\cos\alpha + ja\sin\alpha)/(b\cos\beta + jb\sin\beta)\\ &= a\,e^{j\alpha}/b\,e^{j\beta} = \frac{a}{b}\,e^{j(\alpha-\beta)} && (7.143)\\ &= \frac{a}{b}[\cos(\alpha-\beta) + j\sin(\alpha-\beta)]\,, && (7.144)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} c &= \frac{a}{b} && (7.145)\\ \gamma &= \alpha-\beta\ : && (7.146)\end{aligned}$$

il modulo del quoziente di numeri complessi è pari al quoziente dei moduli, la fase è pari alla differenza delle fasi.

Da queste regole segue che la somma algebrica viene effettuata più semplicemente in coordinate cartesiane, la moltiplicazione e divisione in coordinate polari.