

Figura 10.11: Circuito LC ideale, analizzato sotto l'ipotesi che il condensatore sia inizialmente carico.

Le varie tensioni sono riportate in figura 10.10. Si noti come  $V_R + V_{L_R}$  dia sempre la tensione del generatore, e questo può essere considerato un check delle varie formule. [Si può verificare facilmente che la somma della (10.26) con la (10.30) dà identicamente  $f$ .]

## 10.7 Circuito LC ideale

Passiamo ora al circuito composto soltanto da un condensatore e un induttore, come mostrato in figura 10.11. Ovviamente si tratta di un caso ideale in quanto le resistenze sono inevitabili. Esso è comunque molto istruttivo in quanto rappresenta il caso limite di quello più generale che contempla  $C$ ,  $L$  e  $R$  (che vedremo fra poco) nel limite di  $R$  che tende a zero.

Ovviamente, affinché il circuito abbia un minimo di interesse dobbiamo supporre che il condensatore fosse inizialmente carico a  $V_{C_0}$ . Dall'istante  $t = 0$  in cui il circuito viene chiuso, il sistema è governato dalla seguente equazione differenziale:

$$-L \frac{dI}{dt} - V_C = 0, \quad (10.31)$$

che riscriviamo come<sup>9</sup>

$$LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + V_C = 0, \quad (10.32)$$

ovvero

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} V_C = 0. \quad (10.33)$$

Abbiamo ottenuto l'equazione dell'oscillatore armonico con  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , che dovrebbe essere ben nota al lettore. Elenchiamo quindi rapidamente i ri-

<sup>9</sup>Nel seguito vedremo come sia più conveniente riscriverla come

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0.$$

sultati importanti che da essa derivano:

$$V_C(t) = V_{C_0} \cos \omega_0 t \quad (10.34)$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \omega_0 C V_{C_0} \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \quad [= -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t] \\ &= I_0 \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (10.35)$$

$$\begin{aligned} V_L(t) &= L \omega_0^2 C V_{C_0} \cos (\omega_0 t + \pi) \quad [= -L \omega_0^2 Q_0 \cos \omega_0 t] \\ &= V_{L_0} \cos (\omega_0 t + \pi) \end{aligned} \quad (10.36)$$

$$= -V_{C_0} \cos (\omega_0 t), \quad (10.37)$$

con

$$I_0 = \omega_0 C V_{C_0} \quad (10.38)$$

$$V_{L_0} = \omega_0^2 C V_{C_0} = \omega_0 I_0. \quad (10.39)$$

Inoltre si può verificare la relazione

$$\frac{1}{2} C V_C^2(t) + \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{1}{2} C V_{C_0}^2 \quad [= E_0], \quad (10.40)$$

che esprime la conservazione dell'energia del sistema oscillante, la quale viene 'palleggiata' fra condensatore e induttore. L'ampiezza di oscillazione della corrente, che rappresenta anche il massimo modulo dell'intensità di corrente, vale  $I_0 = \omega_0 C V_{C_0}$ . Vengono mostrati in figura 10.12 le tensioni, la corrente e l'energia associata a  $L$  e  $C$  in funzione del tempo. Come si vede, ogni semiperiodo l'energia passa completamente da un elemento all'altro. Ne segue che  $L I_0^2 = C V_0^2$ , ovvero  $I_0 = (C/L) \cdot V_{C_0}$ , relazione identicamente uguale a  $I_0 = \omega_0 C V_{C_0}$  trovata precedentemente.

## 10.8 Scarica del condensatore su induttanza e resistenza

Aggiungiamo ora la resistenza al processo precedente, ovvero prendiamo in considerazione l'equazione

$$-RI - L \frac{dI}{dt} - V_C = 0. \quad (10.41)$$

Ovviamente ci aspettiamo che l'effetto della resistenza sia quello di dissipare energia, smorzando così l'ampiezza delle oscillazioni e, nel limite di  $R \rightarrow 0$ , recuperiamo l'oscillatore armonico ideale. Quindi per  $R$  sufficientemente piccolo ci aspettiamo che il sistema esegua molte oscillazioni prima di esaurire completamente la propria energia. Un semplice ragionamento qualitativo ci permette di capire come decresce l'energia in tal caso.

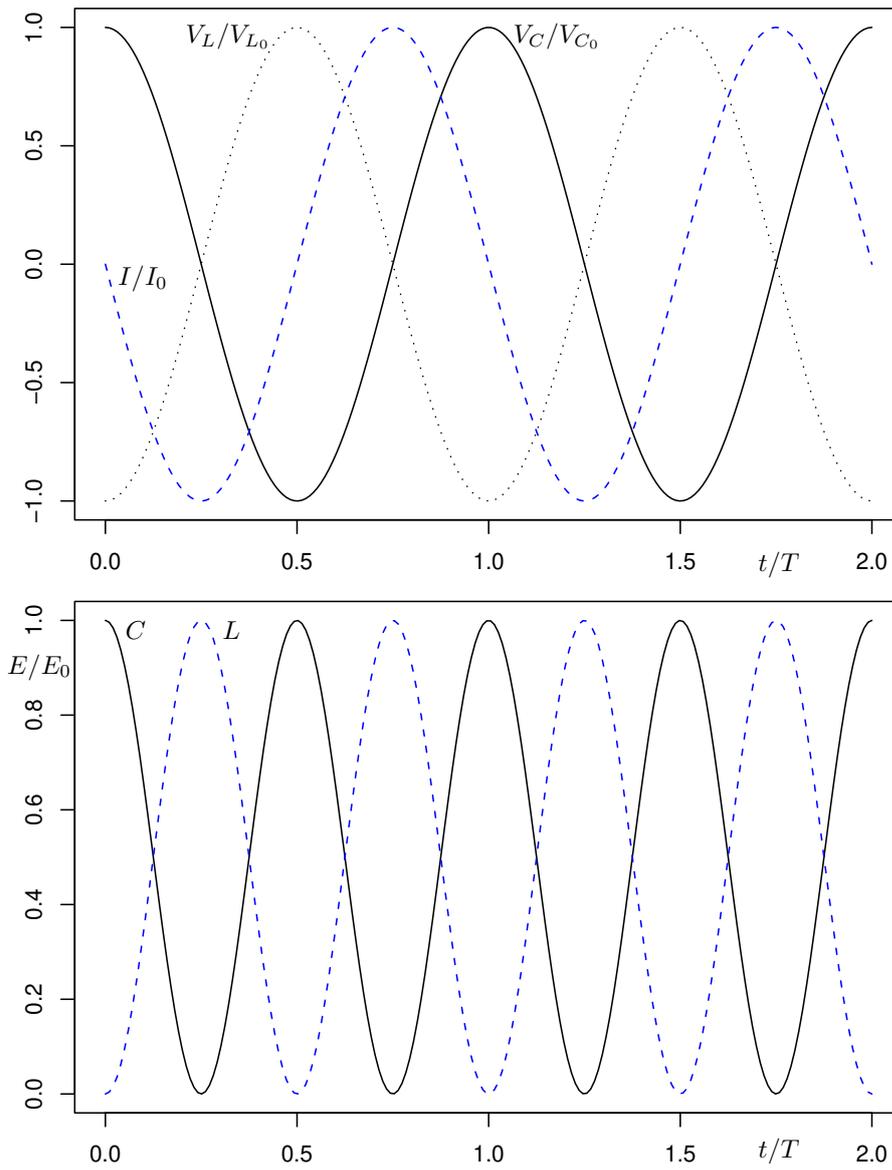


Figura 10.12: In alto: tensioni e corrente (sinusoide tratteggiata) in un circuito  $LC$  ideale (valori in unità dei loro valori massimi). In basso: energia relativa di condensatore e induttore. La scala temporale è in unità del periodo di oscillazione.

### 10.8.1 Considerazioni energetiche

Inizialmente l'energia vale  $E_0$  secondo la (10.40), ovvero  $E_0 \propto V_{C_0}^2$ , mentre la potenza dissipata per effetto Joule sulla resistenza, è pari a  $RI^2$ . Se ci concentriamo sul primo *pseudoperiodo*, ovvero il tempo della prima oscillazione completa (la polarità del condensatore deve essere tornata a quella iniziale e la corrente nel circuito si deve essere annullata – *non è un periodo* in quanto la situazione non è esattamente quella iniziale!) l'energia dissipata sarà data dall'integrale

$$E_J|_0^{T_1} = \int_0^{T_1} RI^2(t) dt, \quad (10.42)$$

avendo indicato con  $T_1$  lo pseudoperiodo (sul motivo di tale simbolo torneremo nel seguito). Ma, siccome l'intensità massima di corrente dipenderà linearmente da  $V_{C_0}$ , che rappresenta la 'scala' del problema, pur non conoscendo ancora la funzione  $I(t)$ , possiamo riscriverla come  $V_{C_0} \cdot h(t)$ , essendo  $h(t)$  una funzione del tempo al momento ignota. L'integrale precedente diventa così

$$E_J|_0^{T_1} = \int_0^{T_1} RV_{C_0}^2 \cdot h^2(t) dt. \quad (10.43)$$

Inoltre, essendo l'energia iniziale del sistema ( $E_0$ ), pari a quella accumulata nel condensatore all'istante iniziale, proporzionale a  $V_{C_0}^2$ , e più precisamente pari a  $CV_{C_0}^2/2$ , possiamo esprimere  $V_{C_0}^2$  come  $2E_0/C$  e riscrivere quindi l'energia dissipata in un periodo come

$$E_J|_0^{T_1} = \frac{2E_0 R}{C} \int_0^{T_1} h^2(t) dt \quad (10.44)$$

$$= E_0 \int_0^{T_1} g(t) dt, \quad (10.45)$$

ove  $g(t) = (2R/C) \cdot h^2(t)$  è una funzione del tempo dipendente dai parametri del circuito, la cui espressione esatta è per il momento irrilevante.

Possiamo allora semplicemente indicare con  $(1 - \eta)$  l'integrale che compare nella (10.45), positivo e minore di 1 per ovvie ragioni fisiche, e scrivere quindi la (10.44) come

$$E_J|_0^{T_1} = (1 - \eta) E_0. \quad (10.46)$$

La scelta di indicare l'integrale come  $1 - \eta$  è dovuta al fatto che siamo interessati all'energia rimanente alla fine dell'oscillazione completa, che ovviamente vale

$$E(n = 1) = \eta E_0, \quad (10.47)$$

ove  $n$  sta ad indicare il numero di oscillazioni. Ripetendo il ragionamento per le oscillazioni successive troviamo che l'energia al termine di ciascuna oscillazione varia secondo una progressione geometrica di ragione  $\eta$ :

$$E(n) = \eta^n E_0. \quad (10.48)$$

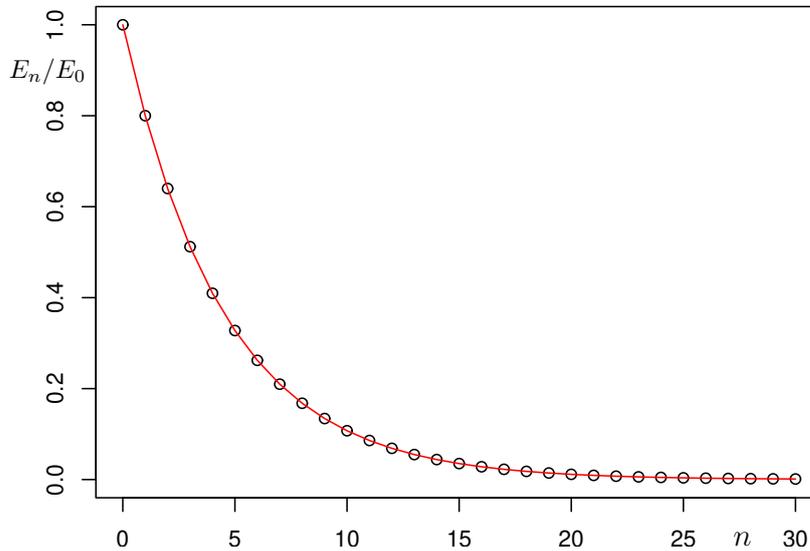


Figura 10.13: Andamento dell'energia del condensatore dopo  $n$  oscillazioni rapportata a quella iniziale per  $\eta = 0.8$ . La curva continua mostra l'esponenziale negativa con  $n_0 = 4.5$ .

È molto istruttivo trasformare questa relazione in una legge esponenziale, ridefinendo  $\eta = e^{-1/n_0}$ , ovvero con  $n_0 = -1/\log(\eta)$ . Otteniamo quindi

$$E(n) = E_0 e^{-n/n_0}. \quad (10.49)$$

Il parametro positivo  $n_0$  acquista così il significato di *numero di oscillazioni che il sistema compie affinché l'energia si riduca a  $1/e$  di quella iniziale* (ovviamente questo parametro è in genere non intero). La figura 10.13 riporta un esempio numerico in cui  $\eta$  vale 0.8 (ovvero il sistema perde ad ogni ciclo il 20% dell'energia che aveva al termine del ciclo precedente) a cui corrisponde  $n_0$  pari a circa 4.5. I punti del grafico rappresentano i valori dell'energia frazionaria residua al termine dell' $n$ -ma oscillazione, mentre la curva continua rappresenta l'esponenziale che passa per quei punti secondo la (10.49).

### 10.8.2 Dinamica del circuito

Torniamo ora all'equazione del circuito (10.41), la quale ha come condizioni iniziali

$$V_C(0) = V_{C_0} \quad (10.50)$$

$$I(0) = 0. \quad (10.51)$$

In questo caso è molto istruttivo far uso della variabile  $Q$ , carica del condensatore, ottenendo così

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0 \quad (10.52)$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (10.53)$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \gamma \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0, \quad (10.54)$$

ovvero, essendo  $Q$  e  $V_C$  proporzionali,

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \gamma \frac{dV_C}{dt} + \omega_0^2 V_C = 0, \quad (10.55)$$

con

$$\gamma = \frac{R}{L} \quad (10.56)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (10.57)$$

entrambi aventi le dimensioni dell'inverso del tempo. Prima di passare alla soluzione passiamo ad un altro problema fisico descritto da un'analogia equazione differenziale.

### 10.8.3 Analogia meccanica

È impossibile non riconoscere nelle (10.52)-(10.54) un'analogia delle oscillazioni smorzate della meccanica, come ad esempio quelle del moto di un corpo soggetto alla forza elastica di una molla e di una forza di attrito di viscosità proporzionale alla velocità, ovvero

$$F = -kx - \beta v \quad (10.58)$$

da cui

$$m a = -kx - \beta v, \quad (10.59)$$

che possiamo riscrivere come

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (10.60)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (10.61)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (10.62)$$

con

$$\gamma = \beta/m \quad (10.63)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (10.64)$$

Il caso limite di  $\beta = 0$ , ovvero  $\gamma = 0$ , si riduce al ben noto oscillatore armonico ideale.

Data l'analogia fra le due equazioni differenziali, ci interessiamo alla soluzione della generica

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \quad (10.65)$$

con condizioni iniziali

$$z(0) = z_0 \quad (10.66)$$

$$\dot{z}(0) = 0. \quad (10.67)$$

Prima di risolvere questa equazione differenziale, analizziamo l'analogia fra i due problemi fisici, in particolare confrontando la (10.52) con la (10.60).

- In un caso siamo interessati alla variazione nel tempo della posizione  $x$  di un punto legato all'estremo di una molla, in un altro alla carica  $Q$  depositata sull'armatura di riferimento del condensatore. (In entrambi i casi quando la variabile di interesse è nulla il sistema è all'equilibrio.)
- Nel caso meccanico la derivata rispetto al tempo della quantità di interesse rappresenta la velocità, nel caso elettrico la corrente elettrica.
- $\beta v$  rappresenta la forza di attrito di viscosità, ovvero il termine che 'brucia' energia, nel senso che se  $\beta = 0$  il sistema conserva l'energia meccanica, ovvero la (10.60) si riduce ad un oscillatore armonico ideale. L'equivalente elettrico di  $\beta$  è la resistenza  $R$ , la quale consuma energia per effetto Joule.

In particolare la potenza dissipata per effetto Joule,  $RI^2$  ha il suo equivalente nella potenza per contrastare la forza di attrito, pari a  $(\beta v) \cdot v$ , ovvero  $\beta v^2$ .

- $L$  è l'analogo della massa (inerziale)  $m$  in quanto l'induttanza si oppone alla variazione di intensità di corrente.
- Infine l'analogo della costante elastica  $k$  della molla è  $1/C$ , come già discusso a suo tempo e che ripetiamo: come una molla più è lontana dalla posizione di equilibrio e più è difficile tirarla/comprimerla ulteriormente, così un condensatore più è carico e più 'costa' caricarlo ulteriormente [in quanto il lavoro da compiere per aggiungere  $dQ$  è pari a  $(Q/C) dQ$ ]. Questo spiega anche perché l'equivalente della costante elastica è  $1/C$ : minore è  $C$ , maggiore è la tensione ai capi del condensatore a parità di carica applicata e quindi più 'oneroso' caricarlo ulteriormente.

Possiamo finalmente scrivere la seguente tabella di analogie:

$$x \longleftrightarrow Q \quad (10.68)$$

$$v \longleftrightarrow I \quad (10.69)$$

$$a \longleftrightarrow \frac{dI}{dt} \quad (10.70)$$

$$m \longleftrightarrow L \quad (10.71)$$

$$k \longleftrightarrow \frac{1}{C} \quad (10.72)$$

$$\beta \longleftrightarrow R \quad (10.73)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 \quad (10.74)$$

$$\frac{1}{2} k x^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 \quad (10.75)$$

$$\beta v^2 \longleftrightarrow R I^2 \quad (10.76)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10.77)$$

$$\frac{\beta}{m} \longleftrightarrow \frac{R}{L} \quad (10.78)$$

$$\frac{1}{\beta} \sqrt{mk} \longleftrightarrow \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (10.79)$$

ove il significato di alcune di queste espressioni sarà chiaro nel seguito.

## 10.9 Oscillazioni smorzate

Per quanto riguarda la soluzione della (10.65), ricordiamo che il procedimento è quello di partire da una soluzione di prova complessa del tipo

$$\zeta(t) = k e^{\alpha t}, \quad (10.80)$$

la cui parte reale costituisce la soluzione fisica. Esprimendo la (10.65) in termini della (10.80), che diventa quindi

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \gamma \frac{d\zeta}{dt} + \omega_0^2 \zeta = 0, \quad (10.81)$$

otteniamo

$$\alpha^2 k e^{\alpha t} + \gamma \alpha k e^{\alpha t} + \omega_0^2 k e^{\alpha t} = 0, \quad (10.82)$$

da cui

$$\alpha^2 + \gamma \alpha + \omega_0^2 = 0, \quad (10.83)$$

denominata *equazione algebrica associata*, le cui soluzioni sono

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}, \quad (10.84)$$

con  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  aventi dimensioni inverse del tempo.

Ne segue che la soluzione generale della (10.81) è data da

$$\zeta(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (10.85)$$

ove  $k_1$  e  $k_2$  dipendono dalle condizioni iniziali, che andiamo a vedere.

### 10.9.1 Coefficienti $k_1$ e $k_2$

Ricordiamo che le condizioni iniziali sono

$$\zeta(0) = z(0) = z_0 \quad (10.86)$$

$$\dot{\zeta}(0) = \dot{z}(0) = 0, \quad (10.87)$$

ovvero: allungamento iniziale della molla positivo e velocità nulla nel caso meccanico; carica iniziale del condensatore positiva e corrente nulla nel caso elettrico. Le due condizioni danno rispettivamente

$$k_1 + k_2 = z_0 \quad (10.88)$$

$$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 = 0 \quad (10.89)$$

da cui

$$k_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} z_0 \quad (10.90)$$

$$k_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} z_0. \quad (10.91)$$

Si noti come  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  dipendano soltanto dai parametri del sistema mentre  $k_1$  e  $k_2$  dipendono anche dalle condizioni iniziali.

### 10.9.2 Soluzione generale per $z(t)$ e sue grandezze derivate

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti:

- la soluzione generale per la variabile complessa associata è data dalla (10.85), da cui otteniamo la soluzione fisica come

$$z(t) = \operatorname{Re} \zeta(t).$$

- i parametri  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono dati dalla (10.84) e, ripetiamo, dipendono soltanto dai parametri del circuito.
- i coefficienti  $k_1$  e  $k_2$ , che ci siamo appena ricavati, dipendono invece sia dai parametri che dalle condizioni iniziali. In particolare  $z_0$  rappresenta semplicemente la ‘scala’ del problema.

Per calcolare eventuali grandezze derivate, si introducono corrispondenti variabili complesse ad esse associate. Ad esempio, nel caso elettrico, introducendo le lettere minuscole per indicare le variabili complesse, come fatto nel

paragrafo 7.10 per l' $RC$  sinusoidale, abbiamo:

$$q(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \quad (10.92)$$

$$Q(t) = \operatorname{Re}[q(t)] \quad (10.93)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} q(t) \quad (10.94)$$

$$V_C(t) = \operatorname{Re}[v_C(t)] \quad (10.95)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \alpha_1 k_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 k_2 e^{\alpha_2 t} \quad (10.96)$$

$$I(t) = \operatorname{Re}[i(t)] = R \cdot \operatorname{Re}[\alpha_1 k_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 k_2 e^{\alpha_2 t}] \quad (10.97)$$

$$v_R(t) = R i(t) \quad (10.98)$$

$$V_R(t) = \operatorname{Re}[v_R(t)]. \quad (10.99)$$

A questo punto, si è soliti analizzare in dettaglio l'espressione analitica della parte reale della soluzione generale (10.85), compito dal quale non ci sottrarremo, in quanto ci aiuterà a capire come diverse combinazioni dei parametri portano a diverse fenomenologie. Ma riteniamo importante far notare che se siamo interessati alla soluzione generale e analizzarla quantitativamente e graficamente non c'è alcun bisogno di passare attraverso le 'complicazioni' che vedremo fra un attimo. Basta avere un opportuno software che gestisce numeri complessi e permette di fare della grafica ed il gioco è fatto, usando le formule che abbiamo incontrato finora. Questa è ad esempio la funzione scritta nel linguaggio R<sup>10</sup> la quale, dati i parametri del circuito, la tensione iniziale del condensatore ( $V_{C_0}$ ) e un 'vettore' di istanti  $t$  calcola, facendo uso delle formule generali che abbiamo incontrato, la tensione ai capi di  $C$  e di  $R$  ad ogni istante

```
tensioni <- function(t, R, L, C, Vc0) {
  Q0 <- Vc0 * C
  omega0 <- 1 / sqrt(L*C)
  gamma <- R / L
  hgamma <- gamma/2 + 0i
  discr <- (hgamma)^2 - omega0^2
  alpha1 <- -hgamma - sqrt(discr)
  alpha2 <- -hgamma + sqrt(discr)
  k1 <- alpha2 / (alpha2 - alpha1) * Q0
  k2 <- alpha1 / (alpha1 - alpha2) * Q0
  q <- Re( k1*exp(alpha1*t) + k2*exp(alpha2*t) )
  v <- NULL
  v$vc <- q / C
  v$vr <- R * Re( alpha1 * k1 * exp(alpha1*t)
                 + alpha2 * k2 * exp(alpha2*t) )
  return(v)
}
```

<sup>10</sup>Vedi ad esempio <http://www.roma1.infn.it/~dagos/R>. Il codice R mostrato qui è autoesplicativo e può essere utilizzato come 'pseudocodice' per riscrivere la funzione in altri linguaggi che ammettano variabili complesse ['0i' nella definizione di 'hgamma', che chiaramente sta per  $\gamma/2$ , obbliga questa variabile e tutte quelle che dipendono da essa ad essere complesse; infine 'Re()' è la funzione che estrae la parte reale di un numero complesso].

### 10.9.3 Classi di soluzioni

Come è noto, il ‘tipo’ di soluzione fisica dipende dal segno del discriminante dell’equazione algebrica associata (10.83), pari a  $(\gamma/2)^2 - \omega_0^2$ :

$$\frac{\gamma}{2} > \omega_0 \Rightarrow \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ reali negative: caso ‘sovrasmorzato’}$$

$$\frac{\gamma}{2} < \omega_0 \Rightarrow \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ complesse coniugate: caso ‘sottosmorzato’}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \text{ (reale negativa): caso ‘critico’}.$$

La condizione di criticità<sup>11</sup> equivale evidentemente a  $\gamma = 2\omega_0$ , ovvero, per i due sistemi oscillanti

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10.100)$$

$$\beta_c = 2\sqrt{mk}, \quad (10.101)$$

ove il pedice  $c$  sta a ricordare che si tratta dei valori critici, dipendenti dagli altri due parametri del sistema. Riordinando i termini, quella che fra un po’ vedremo essere la *condizione di oscillazione* può essere così riscritta, rispettivamente per il sistema elettrico e meccanico, come

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} > \frac{1}{2} \quad (10.102)$$

$$\frac{1}{\beta} \sqrt{mk} > \frac{1}{2} \quad (10.103)$$

relazione che avranno una importante interpretazione nel seguito.

Nei prossimi paragrafi ci ricaveremo dalla formula generale i due casi più interessanti, quello sovrasmorzato e quello sottosmorzato, trattando nel seguito il caso critico come limite dei precedenti.

### 10.9.4 Oscillatore sovrasmorzato [ $\gamma/2 > \omega_0$ ]

Se il discriminante è positivo abbiamo abbiamo  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  reali, e precisamente

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\left[\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right] \quad (10.104)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\left[\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right], \quad (10.105)$$

avendo riscritto le soluzioni in modo tale da rendere evidente che esse sono entrambe negative, con  $\alpha_2 < \alpha_1$  (ovvero  $|\alpha_1| < |\alpha_2|$ ). Inoltre, esse hanno dimensioni inverse del tempo. È quindi opportuno introdurre le grandezze positive e

<sup>11</sup>Alternativamente, può essere conveniente a pensare alla condizione  $\tau\omega_0 = 1$ , con  $\tau = 2/\gamma$ , come definito nella 10.120. I casi sovra- e sotto-smorzato corrisponderanno quindi a  $\tau\omega_0 < 1$  e  $\tau\omega_0 > 1$ ,

aventi le dimensioni del tempo

$$\tau_1 = -1/\alpha_1 \quad (10.106)$$

$$\tau_2 = -1/\alpha_2, \quad (10.107)$$

con  $\tau_1 > \tau_2 > 0$ .

La soluzione, data direttamente in termini di  $z$  in quanto  $\zeta$  non ha parte immaginaria, è

$$z(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \quad (10.108)$$

$$= z_0 \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t} \right] \quad (10.109)$$

$$= z_0 \left[ \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right], \quad (10.110)$$

ove  $k_1$  e  $k_2$  sono state anche riscritte come<sup>12</sup>

$$k_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} z_0 \quad (10.111)$$

$$k_2 = -\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} z_0 \quad (10.112)$$

al fine di mettere in evidenza che  $k_1$  è positiva e  $k_2$  negativa. Il fatto che i coefficienti dei due esponenziali abbiano coefficienti di segno opposto è cruciale per riprodurre  $\dot{z}(0) = 0$ . Ma l'esponenziale con coefficiente negativo, essendo legato alla costante di tempo minore, si estingue rapidamente e, dopo alcuni  $\tau_2$ , prevale l'esponenziale con coefficiente positivo:

$$\lim_{t \gg \tau_2} z(t) = k_1 e^{-t/\tau_1}. \quad (10.113)$$

### 10.9.5 Oscillatore sottosmorzato [ $\gamma/2 < \omega_0$ ]

Nel caso di discriminante negativo, chiamiamo  $\omega_1^2$  il suo opposto, ovvero introduciamo la grandezza positiva

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2 \quad (10.114)$$

I parametri  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono dunque

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + j\omega_1 \quad (10.115)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - j\omega_1 \quad (10.116)$$

<sup>12</sup>Ad esempio

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{-1/\tau_1}{-1/\tau_2 - (-1/\tau_1)} = \frac{1}{\tau_2} \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}.$$

la cui differenza vale  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2j\omega_1$ . Dalle (10.90) e (10.91) ci ricaviamo così i due coefficienti  $k_1$  e  $k_2$ :

$$k_1 = \frac{-\frac{\gamma}{2} - j\omega_1}{-2j\omega_1} z_0 = z_0 \left( \frac{1}{2} - j \frac{\gamma}{4\omega_1} \right) \quad (10.117)$$

$$k_2 = \frac{-\frac{\gamma}{2} + j\omega_1}{2j\omega_1} z_0 = z_0 \left( \frac{1}{2} + j \frac{\gamma}{4\omega_1} \right). \quad (10.118)$$

La soluzione complessa è finalmente

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{z_0}{2} \left( 1 - j \frac{\gamma}{2\omega_1} \right) e^{-t/\tau} e^{j\omega_1 t} \\ &\quad + \frac{z_0}{2} \left( 1 + j \frac{\gamma}{2\omega_1} \right) e^{-t/\tau} e^{-j\omega_1 t}, \end{aligned} \quad (10.119)$$

con

$$\tau = 2/\gamma. \quad (10.120)$$

La parte reale della soluzione complessa è pari a<sup>13</sup>

$$z(t) = \operatorname{Re} \zeta(t) = z_0 e^{-t/\tau} \left[ \cos(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right]. \quad (10.121)$$

Si può provare inoltre<sup>14</sup> che la (10.121) può essere riscritta come

$$z(t) = \frac{z_0}{\cos \varphi} e^{-t/\tau} \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (10.122)$$

con<sup>15</sup>

$$\varphi = \arctan(-\gamma/2\omega_1) \quad (10.123)$$

$$\cos \varphi = 1/\sqrt{1 + (\gamma/2\omega_1)^2} \quad (10.124)$$

<sup>13</sup>Provare a fare i conti come esercizio, ricordandosi che  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ . Si verifichi inoltre come esercizio che  $z(0) = z_0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ .

Si raccomanda inoltre, per le formule trigonometriche di interesse, la pagina di Wikipedia [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_trigonometric\\_identities#Linear\\_combinations](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities#Linear_combinations).

<sup>14</sup>A parte l'esponenziale abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \varphi} \cos(\omega_1 t + \varphi) &= \frac{1}{\cos \varphi} [\cos \omega_1 t \cdot \cos \varphi - \sin \omega_1 t \cdot \sin \varphi] \\ &= \cos \omega_1 t - \tan \varphi \cdot \sin \omega_1 t, \end{aligned}$$

che è uguale alla (10.121) se  $\tan \varphi = -\gamma/(2\omega_1)$ . Infine, per ottenere l'espressione di  $\cos \varphi$  si ricordi che, in generale,  $\cos(\arctan \alpha) = 1/\sqrt{1 + \alpha^2}$ .

<sup>15</sup>Si noti come  $\cos \varphi$  può anche essere riscritto come  $\omega_1/\omega_0$ , in quanto

$$\sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{2\omega_1} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4(\omega_0^2 - \gamma/4)}} = \sqrt{\frac{4(\omega_0^2 - \gamma/4) + \gamma^2}{4\omega_1^2}}.$$

La (10.122), più facile da leggere e da memorizzare dell'equivalente (10.121), ci mostra un moto oscillante con ampiezza decrescente nel tempo in modo esponenziale. Si noti che  $\omega_1 < \omega_0$ , ovvero lo *pseudoperiodo*  $T_1$  è maggiore del periodo  $T_0$  del caso ideale: lo smorzamento rallenta l'oscillazione. (Ma vedremo che l'effetto sarà più che trascurabile dal momento in cui il sistema comincia ad effettuare varie oscillazioni apprezzabili 'macroscopicamente', nel senso di ampiezza confrontabile con la posizione iniziale.)

Come regola pratica per ricordarsi la (10.122), si noti come, a meno di un fattore, essa è costituita da tre componenti:

1.  $z_0$ , dato dall'ampiezza iniziale e che quindi dà la scala del problema;
2. un termine di attenuazione, dato da  $e^{-t/\tau}$ , con  $\tau$  pari all'opposto dell'inverso della parte reale di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  (ovvero  $\tau = 2/\gamma$ );
3. un termine oscillante con una opportuna fase, ovvero  $\cos(\omega_1 t + \varphi)$ , con  $\omega_1$  pari al modulo della parte immaginaria di  $\alpha_1$ .

La fase  $\varphi$  ha un ruolo importante. Infatti si può facilmente verificare<sup>16</sup> che  $z_0 e^{-t/\tau} \cos \omega_1 t$  ha derivata diversa da zero a tempo zero, contraddicendo la condizione iniziale  $\dot{z} = 0$ .<sup>17</sup> Ma una volta introdotta tale fase, occorre dividere  $z_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega_1 t + \varphi)$  per  $\cos \varphi$  al fine di riottenere  $z(0) = z_0$ . Otteniamo finalmente la (10.122).

Il valore di  $\varphi$  può essere infine ottenuto dalla condizione  $\dot{z} = 0$ :

$$-\frac{1}{\tau} \cos \varphi - \omega_1 \sin \varphi = 0 \quad (10.125)$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = -\frac{\gamma}{2\omega_1}, \quad (10.126)$$

da cui riotteniamo le (10.123) e (10.124).

### 10.9.6 Caso critico [ $\gamma/2 = \omega_0$ ]

Questa condizione si ottiene da quelle precedenti come limite per  $\gamma/2 \rightarrow \omega_0$  (ovvero  $\omega_1 \rightarrow 0$ , se si parte dal caso sottorzato). Il procedimento più rapido<sup>18</sup> è a partire dal caso sottosmorzato. Infatti, sviluppando in serie al primo

<sup>16</sup>Senza fare conti, si può usare il seguente ragionamento. L'espressione  $z_0 e^{-t/\tau} \cos \omega_1 t$  è costituita, a parte il fattore di scala  $z_0$ , dal prodotto di un esponenziale negativo, che per  $t = 0$  è decrescente, per una funzione coseno, 'piatta' per  $t = 0$ . Quindi tale prodotto decresce per  $t = 0$ , contraddicendo le condizioni iniziali. Ne segue che in  $t = 0$  il termine con coseno deve essere crescente per compensare l'esponenziale negativo. Questo ragionamento qualitativo quindi non soltanto ci dice che il termine coseno deve contenere una fase, ma anche che tale fase deve essere negativa!

<sup>17</sup>Si ricorda che, fisicamente,  $\dot{z} \neq 0$  corrisponderebbe ad una discontinuità nella velocità o nell'intensità di corrente, a seconda che si tratti di oscillatore meccanico o elettrico, che implicherebbe, rispettivamente, una forza infinita o una forza elettromotrice indotta infinita.

<sup>18</sup>Alternativamente si può anche partire dal caso sovrasmorzato, ed in particolare dalla (10.109). Indicando  $\sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}$  con  $\epsilon$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\gamma/2 + \epsilon \\ \alpha_2 &= -\gamma/2 - \epsilon, \end{aligned}$$

ordine in  $\omega_1$  la (10.121) otteniamo:<sup>19</sup>

$$z(t) \approx z_0 e^{-t/\tau} \left[ 1 - \frac{(\omega_1 t)^2}{2} + \frac{\gamma}{2\omega_1} (\omega_1 t) \right], \quad (10.127)$$

che, per  $\omega_1 \rightarrow 0$ , diventa

$$z(t) = z_0 e^{-t/\tau} \left[ 1 + \frac{\gamma}{2} t \right] \quad (10.128)$$

$$= z_0 e^{-t/\tau} \left[ 1 + \frac{t}{\tau} \right]. \quad (10.129)$$

[Si verifichi che  $z(0) = z_0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ .]

Si noti come  $z(t)$  del caso critico è il prodotto di fattori non negativi ed è quindi sempre  $\geq 0$ , ovvero non presenta alcuna oscillazione intorno allo zero.

## 10.10 Applicazioni al circuito RCL

Ora che abbiamo sviluppato il formalismo generale dell'oscillatore smorzato, applichiamo all'*RCL*, facendo un esempio numerico, in cui l'induttanza vale 10 mH e la capacità 10 nF, lasciando variabile il valore della resistenza. La pulsazione propria del sistema,  $\omega_0$ , vale quindi  $10^5 \text{ s}^{-1}$ . Il caso critico si ha quindi per  $\gamma_c = 2\omega_0 = 2 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ , in corrispondenza di  $R_c = \gamma_c L = 2\sqrt{L/C}$ , pari a 2 k $\Omega$ . La figura 10.14 mostra, tratteggiato, lo smorzamento critico e i casi (leggermente) sovrasmorzato e sottosmorzato ottenuti variando

da cui  $\alpha_2 = \alpha_1 - 2\epsilon$ . Si tratta quindi di fare il limite dell (10.109) nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{z(t)}{z_0} &= \frac{\alpha_1 - 2\epsilon}{-2\epsilon} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{-2\epsilon} e^{(\alpha_1 - 2\epsilon)t} \\ &= \frac{e^{\alpha_1 t}}{2\epsilon} [-\alpha_1 + 2\epsilon + \alpha_1 e^{-2\epsilon t}] \\ &\approx \frac{e^{\alpha_1 t}}{2\epsilon} [-\alpha_1 + 2\epsilon + \alpha_1(1 - 2\epsilon t)] \\ &\approx e^{\alpha_1 t} [1 - \alpha_1 t] \\ &\rightarrow e^{(\gamma/2)t} \left( 1 - \frac{\gamma}{2} t \right) = e^{t/\tau} \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right). \end{aligned}$$

<sup>19</sup>Si ricorda che per  $\epsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \sin(\pm\epsilon) &\approx \epsilon \\ \cos(\pm\epsilon) &\approx 1 - \frac{\epsilon^2}{2}. \end{aligned}$$

Altre utili approssimazioni

$$\begin{aligned} e^{\pm\epsilon} &\approx 1 \pm \epsilon \\ (1 \pm \epsilon)^2 &\approx 1 \pm 2\epsilon \\ \sqrt{1 \pm \epsilon} &\approx 1 \pm \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{1 \pm \epsilon} &\approx 1 \mp \epsilon \end{aligned}$$