Fisica per SMIA – Formulario (AA 23/24)

-Derivate e integrali. In genere, date le *generiche variabili* dipendenti dal tempo $y(t)$ e $x(t)$,

$$y = \frac{dx}{dt} \quad \leftrightarrow \quad dx = y dt \quad \Rightarrow \quad \Delta x|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, dt\,.$$

- Angolo piano e angolo solido

"rad = arco su raggio" $\rightarrow$ $d\theta = ds/r$.

"sr = area 'calotta'$^{(*)}$ su raggio^2" $\rightarrow$ $d\Omega = dA/r^2$.

$\Rightarrow$ cono di <u>semi</u>apertura θ: $\Omega = 2\pi \cdot (1-\cos\theta)$.

[$^{(*)}$ Concetto esteso a superfici di forma qualsiasi]

Dimensione angolare per piccoli angoli: 'dimensione trasversa diviso la distanza'. Similmente per **piccoli angoli solidi**: 'area trasversa su quadrato della distanza.'

- Basi di cinematica:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d\vec{s}}{dt} \ \ (\text{anche } \frac{d\vec{r}}{dt}) \\
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt}\,; \\
\Delta\vec{s}|_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\, dt \\
\Delta\vec{v}|_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\, dt
\end{aligned}$$

Inoltre :

$$\Delta\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} a_x(x)\, dx \qquad \text{etc.}$$

- Eq. parametrica cerchio; **moto circolare**: velocità e accelerazione (anche delle componenti).

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \begin{cases} x(t) = R\cos[\theta(t)] \\ y(t) = R\sin[\theta(t)] \end{cases} \\
v(t) &= \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\,; \quad a(t) = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|
\end{aligned}$$

Moto circolare <u>uniforme</u>: $\theta(t) = \omega t$

Periodo: $t = T \implies \theta(t) = 2\pi$.

Frequenza (ν): giri/s. Vel. ang. (ω): rad/s.

$v(t)$ a $a(t)$ costanti in moto circ. uniforme.

$\vec{v}(t)$ sempre ortogonale a $\vec{r}(t)$ e a $\vec{a}()$.

- Leggi della meccanica

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\vec{F}}{m} \\
\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \qquad [\vec{p} = m\vec{v}] \\
\Delta\vec{p}|_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt \\
\vec{F}_A^{(B)} &= -\vec{F}_B^{(A)} \\
\vec{F}_A^{(tot)} &= \sum_i \vec{F}_A^{(i)}\,.
\end{aligned}$$

- Sistema isolato: $\sum_i \vec{p}_i = \text{costante}$.
- Altrimenti: $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \vec{F}^{(ext)} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}v_{CM} = \frac{\vec{F}^{(ext)}}{m_{tot}}$.

- Forze (un inventario):

$$\begin{aligned}
F_G &= -G\,\frac{m_1\, m_2}{d^2} && \left[G = 6.67\times 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kgs}^2}\right] \\
&= -m_2\, g && [\text{se } m_1 = M_T \text{ e } d = R_T] \\
& && [\Rightarrow g \approx 9.8\,\text{N/kg}\ ] \\
F_C &= k_0\,\frac{q_1\, q_2}{d^2} && [k_0 = 9\times 10^9\,\text{N}\,\text{m}^2/\text{C}^2] \\
\vec{F}_{\mathcal{G}} &= m\cdot\vec{\mathcal{G}} \\
\vec{F}_E &= q\cdot\vec{E} \\
\vec{F}_L &= q\cdot\vec{v}\wedge\vec{B} \\
F_{el} &= -k\,x \\
\vec{F}_{A_d} &= -\mu_d\, F_N\,\hat{v} \\
\vec{F}_{A_v} &= -\beta\vec{v} \\
F_{A_s} &\le \mu_s\, F_N \\
\vec{T}?\ \vec{F}_{A_s}? &\Rightarrow \text{'vincoli'}.
\end{aligned}$$

- Andamenti esponenziali (Nota: $\alpha > 0$)

con z generica variabile (temperatura, velocità, nr. di nuclei o di batteri, tensione condensatore, etc.)

a)
$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \alpha\, z \\
\Rightarrow \ z(t) &= z_0\, e^{t/\tau} \qquad [\tau = \frac{1}{\alpha}]
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= -\alpha\,(z - z_F) \\
\Rightarrow \ z(t) &= z_F + (z_0 - z_F)\, e^{-t/\tau} \qquad [\tau = \frac{1}{\alpha}]
\end{aligned}$$

τ notevoli: m/β, C/η, RC, L/R

(ove le due 'C' sono 'capacità' di diverso tipo)

- Oscillatore armonico (con z generica variabile)

$$\frac{d^2}{dt^2}\, z(t) = -\omega^2\, z(t) \quad \Longleftrightarrow \quad z(t) = A\,\cos(\omega t + \varphi)\,,$$

con ω^2 di valore numerico positivo e *ovvie* dimensioni, con A e φ dipendenti dalle *condizioni iniziali*.

<u>Se</u> $z(0) = A_0$ e $\dot{z}(0) = 0 \implies z(t) = A_0\cos(\omega t)$.

[Relazioni *"pulsaz. $\leftrightarrow$ periodo $\leftrightarrow$ freq."*: $\Rightarrow$ da sapere.]

<u>Casi notevoli</u>:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{d\,t^2} &= -\frac{k}{m}\, x \quad (\text{molla})\,; \\
\frac{d^2\theta}{dt^2} &\approx -\frac{g}{l}\,\theta \quad (\text{pendolo})\,.
\end{aligned}$$

- **Trasformazioni di velocità**:

$$\vec{r}_{O'}(P) \;=\; \vec{r}_{O'}(O) + \vec{r}_O(P)\,.$$

- **Lavoro**, **energia cinetica e potenziale**. **Potenza**.

$$\begin{aligned} dL &= \vec{F}\cdot d\vec{s} \\ L|_A^B = \int_A^B dL &= \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\Bigg|_A^B \equiv \Delta E_C|_A^B \\ [\;\; &= -\Delta E_p|_A^B \quad \text{solo } \vec{F} \;\text{ conserv.}] \\ F_x &= -\frac{dE_p(x)}{dx}\,,\ \text{etc.} \\ P &= \frac{dL}{dt} \qquad (\text{anche } P = \frac{dE}{dt}\ e\ P = \frac{dQ}{dt}) \end{aligned}$$

- **Energia potenziale e potenziale** (grav. e elettr.)

$$\Delta E_p|_A^B = m\cdot\Delta V_G|_A^B \quad\Longleftrightarrow\quad \Delta E_p|_A^B = q\cdot\Delta V|_A^B$$

Percorso chiuso: $\sum_i \Delta E_{p_i} = 0$.

- **Forza $\leftrightarrow$ En. Pot. $\Longleftrightarrow$ Campo $\leftrightarrow$ Potenziale** (caso <u>elettrostatico</u>, <u>unidimensionale</u>)

$$\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x \quad\Leftrightarrow\quad \Delta V|_{x_1}^{x_2} = -\int_{x_1}^{x_2} E(x)\,\mathrm{d}x$$

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \quad\Leftrightarrow\quad E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Caso particolare di <u>forza costante</u>:

$$\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -F\cdot\Delta x \quad\Leftrightarrow\quad \Delta V|_{x_1}^{x_2} = -E\cdot\Delta x\,.$$

Inoltre, da $\sum_i \Delta E_{p_i} = 0$ segue $\sum_i \Delta V_i = 0$.

- **Zero (convenzionale) del potenziale**
  - Per come sono introdotti, E_p e V sono definiti a meno di una costante additiva;
  - per le forze che vanno come $1/r^2$ è *di norma* conveniente porre lo zero del potenziale all'infinito $\Rightarrow$ potenziale alla distanza r da Q:

$$\begin{aligned} V(r) - V(\infty) &= \Delta V|_\infty^r = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{s} \\ V(r) &= \frac{k_0\,Q}{r}\,, \end{aligned}$$

da cui segue en. pot. E_p di q posta alla distanza r:

$$E_{p_q}^{(Q)}(r) \;=\; q\cdot V^{(Q)}(r) = \frac{k_0\,q\,Q}{r}\,,$$

avendo esplicitato il fatto che $V(r)$ è dovuto a Q. Infine, **campi e potenziali sono additivi**.

- **Centro di massa** ('baricentro'):

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \\ \vec{v}_{CM} &= \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{\sum_i m_i} \\ \vec{F}_{tot}^{ext} &= \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i. \end{aligned}$$

- **Urti**: $\rightarrow$ conservano quantità di moto.
a) perfett. elastici: $\rightarrow$ conservano energia meccanica.
b) complet. anelastici: $\rightarrow$ si annulla E_c nel C.M.
- **Nota**, per urti perfett. elastici collineari: cons. q. di moto e cons. E_C $\rightarrow$ *regola della somma delle velocità*, ovvero *regola della inversione delle velocità relative*.

- **Onde progressive** (regressive: '$-\beta\,x$' $\rightarrow$ '$+\beta\,x$'):
  - equazione: $f(x,t) = A\,\cos(\omega\,t - \beta\,x)$;
  - periodicità: $T = 2\pi/\omega$; $\lambda = 2\pi/\beta$.
  - velocità: $v = \omega/\beta = \lambda/T$
    $\rightarrow\;\; \lambda\cdot\nu = v;\;\; \lambda = v\cdot T$.

  <u>Note</u>: spesso al posto di β si usa k.
- **Equazione di d'Alembert**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \;=\; 0$$

valida per generica $f(x,t) = g_1(x - v\,t) + g_2(x + v\,t)$.

- **Fotometria**:

$$\begin{aligned} \eta &: \;\; \text{'lm/W'} \\ 1\,\mathrm{lx} &= 1\,\mathrm{lm}\,/\,1\,\mathrm{m}^2 \;\;\text{(illuminamento)} \\ 1\,\mathrm{cd} &= 1\,\mathrm{lm}\,/\,1\,\mathrm{sr} \;\;\text{(intensità luminosa)} \\ \mathrm{sr} &\rightarrow \;\;\text{'estensione del radiante allo spazio'} \\ Q_v &: \;\; \text{("quant. di luce")} : \mathrm{lm}\times\mathrm{s} \;\;\text{("Talbot")} \end{aligned}$$

- **Corpo nero**
Leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien

$$\begin{aligned} \frac{P}{A} &= \sigma\,T^4 \\ \lambda_{max}\cdot T &= 2.90\times10^{-3}\,\mathrm{K\,m} \end{aligned}$$

ove $\sigma \approx 5.7\times10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}$

- **Termometria** (qui Q indica quantità di calore):

$$\begin{aligned} Q &= C\,\Delta T \qquad (\text{ove } C = c\cdot m) \\ \sum_i Q_i &= 0 \qquad\qquad (\text{sistema isolato}) \\ 1\,\mathrm{cal} &= 4.184\,\mathrm{J} \\ \lambda_{H_2O} &= 80\,\mathrm{cal/g}\ (\text{fusione}) \\ &= 540\,\mathrm{cal/g}\ (\text{ebollizione}) \end{aligned}$$

- **Fluidi**:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= (P \cdot A)\,\hat{n} \\
\frac{dP}{dz} &= \rho\, g \qquad (z > 0 \text{ verso il basso}) \\
\Delta P &\to \text{si trasmette a tutto il fluido} \\
F^{\uparrow}_{Arch.} &= \rho_f\, V_{f.s.}\, g \\
v \cdot A &= \text{costante} \qquad [\text{‘Leonardo’}] \\
P + \rho\, g\, h + \frac{1}{2}\,\rho\, v^2 &= \text{costante} \qquad [\text{‘Bernoulli’}]
\end{aligned}$$

- **Gas perfetti** ($1\,\text{mol} \equiv 6.02214076 \times 10^{23}$ ‘entità elem.’):

$$\begin{aligned}
P\,V &= n\,R\,T \left[R = 8.31\,\frac{\text{Pa}\cdot\text{m}^3}{\text{mol}\cdot\text{K}}\right] \\
L^{(dal\ gas)} &= P\,\Delta V \\
\Delta E_{int} &= Q^{(al\ gas)} - L^{(dal\ gas)}
\end{aligned}$$

- **Momenti di forze e di quantità di moto**:

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad \left[\vec{M}_{tot} = \sum_i \vec{M}_i\right] \\
\vec{L} &= \vec{r} \wedge \vec{p} \qquad \left[\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i\right]
\end{aligned}$$

$$\vec{M}^{(ext)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{L} = cost$$

- **Velocità aereolare**:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\,\vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2\,m}\,\vec{L}$$

- **Corpo rigido**:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \ \left[= \sum_i I_i \ \right] \to \text{“}\int \mathrm{d}I\,\text{”}$$

In particolare, corpo rigido ruotante **intorno ad un asse fisso**:

$$\begin{aligned}
x &\leftrightarrow \theta \\
v = \frac{dx}{dt} &\leftrightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} \\
a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} &\leftrightarrow \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \\
m &\leftrightarrow I \\
a = \frac{F}{m} &\leftrightarrow \dot{\omega} = \frac{M}{I} \\
p = mv &\leftrightarrow L = I\omega \\
F = \frac{dp}{dt} = ma &\leftrightarrow M = \frac{dL}{dt} = I\dot{\omega} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

- **Ottica geometrica**:
Riflessione: $\theta_i = \theta_r$;
Legge di Snell: $n_1 \cdot \sin\theta_1 = n2 \cdot \theta_2$;
(in entrambi i casi: $\vec{i}$, $\vec{n}$, $\vec{r}$ planari).
Punti coniugati specchi sferici e lenti:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}\,.$$

Distanze focali di specchi sferici e lenti:

$$\begin{aligned}
f &= \pm\frac{R}{2} \qquad (\text{concavo/convesso})\,; \\
\frac{1}{f} &= (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\,.
\end{aligned}$$

(Si presti attenzione alle *convenzioni dei segni*.)
Ingrandimento lineare: $M = -q/p$.

- **Fotocamera**:
- apertura angolare: $\alpha = 2\,\arctan((L/2)/f) \approx L/f$.
- ‘numero di diaframma’: $n_D = f/D$
- reciprocità $T/n_D^2 = \text{cost.}$ a parità di illum. e ISO.
- sensibilità: se ISO raddoppia è sufficiente $Q_v/2$; da cui $T/n_D^2 \times \text{ISO} = \text{cost.}$

- **Onde progressive (nelle regressive “$+\beta\,x$”)**:
  - equazione: $f(x,t) = A\,\cos(\omega\,t - \beta\,x)$;
  - periodicità: $T = 2\pi/\omega$; $\lambda = 2\pi/\beta$.
  - velocità: $v = \omega/\beta = \lambda/T \ \to \ \lambda \cdot \nu = v$.

- **Circuiti in corrente continua (c.c.)**
  Generatore di tensione:

$$V^{(+)} - V^{(-)} \equiv f\,.$$

  Legge di Ohm, leggi di Kirchhoff, effetto Joule:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{dQ}{dt} \\
I_{A\to B} &= \frac{V_A - V_B}{R_{A\leftrightarrow B}} \quad \Rightarrow \quad \text{“}I = \frac{\Delta V}{R}\text{”} \\
R &= \rho\,\frac{l}{A} \qquad (\text{conduttore cilindrico}) \\
\sum_i I_i &= 0 \qquad (\text{nodi}) \\
\sum_i \Delta V_i &= 0 \qquad (\text{maglie}) \\
P &= I \cdot \Delta V = \ldots = \ldots\ \ldots
\end{aligned}$$

  Resistenze in serie e in parallelo:

$$\begin{aligned}
R_s &= \sum_i R_i \\
R_p^{-1} &= \sum_i R_i^{-1}\,.
\end{aligned}$$

- **Condensatori e circuiti con f** (costante), **R e C** ($\rightarrow$ 'carica e scarica del condensatore')

$$V_C \equiv \Delta V \;=\; \frac{Q}{C} \qquad \left[\iff \;\Delta T = \frac{Q}{C}\;\text{(calorimetria)}\right]$$

Energia del condensatore: $\frac{Q\cdot V_C}{2} = \ldots = \ldots$
Parallelo e serie: $C_p = \sum_i C_i$; $C_s^{-1} = \sum_i C_i^{-1}$.
Semplici circuiti con f, R e C:
$\rightarrow$ stesse regole ("Ohm e Kirchhoff") dei circuiti in c.c., con $I(t)$, $Q(t)$ e $V_C(t)$ [e $V_R(t)$] dipendenti dal tempo, con $I = dQ/dt = C dV_C/dt$;
$\rightarrow$ danno luogo a equazione differenziale riscrivibile nella forma *canonica* che dà luogo ad andamenti esponenziali.
Analogie notevoli:
$\rightarrow$ andamento nel tempo della termalizzazione;
$\rightarrow$ velocità limite nel caso di forze del tipo $-\beta\vec{v}$.

- **Inferenza e previsione probabilistica**

$$\begin{aligned} P(H_i \,|\, E_{obs}, I) &\propto P(E_{obs} \,|\, H_i, I)\cdot P(H_i \,|\, I) \\ P(E_{pr} \,|\, I) &= \sum_i P(E_{pr} \,|\, H_i, I)\cdot P(H_i \,|\, I) \end{aligned}$$

Estensione alle distribuzioni di probabilità, con π *generico parametro* e x un *valore osservato* ('dato') o *osservabile* ($\rightarrow$ previsione):

$$\begin{aligned} f(\pi \,|\, x, I) &\propto f(x \,|\, \pi, I)\cdot f(\pi \,|\, I) \\ f(x \,|\, I) &= \int_{\mathcal{D}(\pi)} f(x \,|\, \pi, I)\cdot f(\pi \,|\, I)\,\mathrm{d}\pi \end{aligned}$$

ove le '$f()$' sono generiche funzioni di probabilità o pdf, matematicamente diverse anche se indicate con stesso simbolo, e '$\mathcal{D}(\pi)$' sta per il dominio di π.

Casi notevoli di inferenza parametrica
(da *prior uniforme*):

$$\begin{aligned} (\mathbf{x},\,\sigma) &\longrightarrow \mu \sim \mathrm{Norm}(\overline{x}, \sigma/\sqrt{n}) \\ n &\longrightarrow \lambda \sim \mathrm{Gamma}(n+1, 1) \\ (n,\,x) &\longrightarrow p \sim \mathrm{Beta}(x+1, (n-x)+1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ dettagli su app *Probability Distributions*
(può essere usata, sotto controllo, all'esame, anche orale)

- **Propagazione di varianze** (di X_i indip.)

$$Y(\mathbf{X}) = \sum_i c_i \cdot X_i \;\;\longrightarrow\;\; \sigma^2(Y) = \sum_i c_i^2 \cdot \sigma^2(X_i)$$

Linearizzazione: i coefficienti c_i sono ottenuti espandendo $Y(\mathbf{X})$ al primo ordine intorno a $\mathrm{E}(\mathbf{X})$.

- **Propag. di incertezze relative** (di X_i indip.)
Data una *funzione monomia* $Y(\mathbf{X}) = \prod_i X_i^{\alpha_i}$, con $r_{X_i} = \sigma(X_i)/\mathrm{E}(X_i)$, etc. :

$$r_Y^2 \;\approx\; \sum_i \alpha_i^2 \cdot r_{X_i}^2\,.$$

- **Costanti varie**

$$\begin{aligned} G &= 6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot kg^{-2}\cdot m^2} \\ k_0 &= 8.99\times 10^{9}\,\mathrm{N\cdot C^{-2}\cdot m^2} \approx 9\times 10^{9}\,\mathrm{N\cdot C^{-2}\cdot m^2} \\ \epsilon_0 &= 8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{N^{-1}\cdot C^2\cdot m^{-2}} \\ q_e &= -1\,e = -1.602\times 10^{-19}\mathrm{C} \\ m_e &= 9.11\times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \\ m_p &= 1.673\times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \approx 1836\times m_e \\ c &= 3.00\times 10^{8}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$