

Capitolo 5

Condensatore e circuito RC

5.1 Modello matematico e analogie

Mettiamo ora in gioco un altro importante componente, il *condensatore*, rappresentato a sinistra di figura 5.1. Il simbolo vuole ricordare la sua realizzazione più ‘classica’ (e più facile da trattare), ovvero due piani conduttori (‘armature’) separati da un materiale isolante, anche se tutto quello che diremo di questo nuovo elemento circuitale avrà una validità generale che prescinde da come esso è realizzato.

Il modello matematico del condensatore è molto semplice. Le cariche, uguali e opposte, depositate sulle due armature, e indicate con Q_+ e Q_- nella figura, sono proporzionali alla differenza di potenziale elettrico fra le armature stesse (ciascuna delle quali è considerata equipotenziale in quanto conduttrice):

$$Q_+ = -Q_- = C \cdot (V_+ - V_-). \quad (5.1)$$

Viceversa, se esso possiede una carica Q_+ su un’armatura, esso ha necessariamente una carica Q_- sull’altra armatura e una differenza di potenziale

$$V_+ - V_- = \frac{Q_+}{C} = \frac{-Q_-}{C} \quad (5.2)$$

fra di esse. Questa banale inversione della relazione precedente ci permette di modellizzare il condensatore *come se fosse un generatore di tensione* (vedi figura 5.1) di forza elettromotrice variabile, proporzionale, istante per istante, alla carica depositata in ciascuna armatura e con opportuna polarità. Infatti,

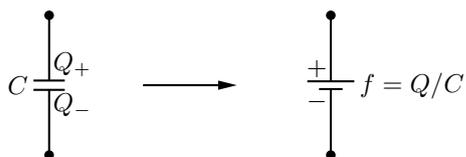


Figura 5.1: Condensatore, a sinistra, e generatore di tensione equivalente

nel seguito prenderemo come riferimento la carica di una delle due armature, riscrivendo così la (5.1) come

$$Q = C \cdot \Delta V, \quad (5.3)$$

intendendo quindi che Q è positiva se tale armatura è a potenziale maggiore dell'altra, negativa nel caso opposto. Si noti inoltre come un condensatore, seppur chiamato 'carico', è sempre un oggetto elettricamente neutro (se visto da lontano), in quanto la somma delle cariche sulle due armature è identicamente nulla.

Il fattore di proporzionalità C definisce dalla grandezza fisica *capacità elettrica*, misurata in Farad (F) nel Sistema Internazionale. Ovvero un condensatore di 1 Farad che presenta una differenza di potenziale di 1 Volt fra le armature ha una carica di 1 Coulomb sull'armatura a potenziale maggiore e una carica uguale e opposta sull'armatura a potenziale inferiore. Si noti comunque come questa unità di misura è molto 'grande'¹ e negli usi pratici vengono usati suoi sottomultipli, come il nanofarad (nF, pari a 10^{-9} F) e il picofarad (pF, pari a 10^{-12} F). Per completezza, tanto per avere un ordine di grandezza delle capacità (e di quanto sia un Farad) e anche se tale informazione non verrà usata nel seguito, riportiamo la formula della capacità di un condensatore piano di area S e distanza d fra le armature:

$$C = \epsilon \frac{S}{d}, \quad (5.4)$$

con ϵ , *costante dielettrica del mezzo* (per 'mezzo' intendiamo il materiale isolante fra le armature), generalmente espressa come la costante dielettrica del vuoto (ϵ_0) moltiplicata per un fattore (ϵ_r) dipendente dal mezzo e sempre maggiore di 1 chiamato *costante dielettrica relativa*, fattore molto prossimo a 1 per l'aria (1.00059). Ad esempio un condensatore composto da due lastre metalliche di dimensioni di un foglio A4 ($210 \times 290 \text{ mm}^2$), distanti lo spessore tipico di tale foglio (0.10 mm) vale 5.5 nF se fra di loro c'è aria, ma raggiunge circa 10 nF se fra di loro c'è un foglio di carta (ϵ_r della carta comune vale circa 2). [Insomma, per arrivare ad un Farad bisognerebbe mettere in parallelo circa cento milioni di tali 'condensatori A4' (con dielettrico di carta), per una superficie di oltre 600 ettari.]

5.1.1 Capacità elettrica, capacità termica e altre 'capacità'

La (5.1) ci dice che un condensatore con una capacità 'grande' riesce a 'contenere' tanta carica con una piccola differenza di potenziale ai suoi capi. Se, invece, la capacità è piccola, basta poca carica per innalzare di molto la differenza di potenziale fra le armature. È l'analogo di quanto avviene quando forniamo una certa quantità di calore ad un corpo: la sua temperatura varierà in modo inversamente proporzionale alla sua capacità termica:

$$\Delta T = \frac{Q}{C}. \quad (5.5)$$

¹Non c'è niente di intrinsecamente grande nel Farad, così come non c'è niente di intrinsecamente piccolo nel Pascal per misurare la pressione. Sono semplicemente grandi e piccoli su scale antropiche. Si tratta del prezzo da pagare per avere unità di misura connesse con coefficienti unitari a quelle fondamentali del Sistema Internazionale.

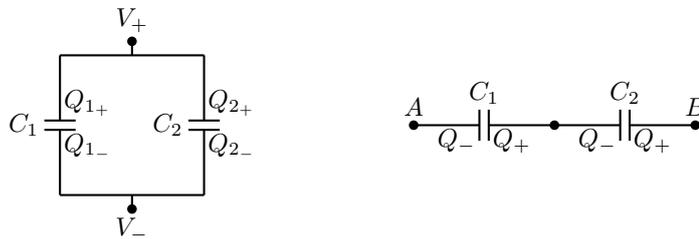


Figura 5.2: Condensatori in serie e in parallelo.

In entrambi i casi, la ‘capacità’ collega una grandezza intensiva (ΔT o ΔV) con una estensiva (Q , con i rispettivi significati di quantità di calore o carica). Un oggetto di capacità termica molto grande (si pensi al mare) riesce ad assorbire tanto calore innalzando di poco la propria temperatura.

Questa analogia si può estendere ad altre capacità se introduciamo altri ‘indicatori di livello’. Ad esempio liquidi versati in recipienti cilindrici fanno aumentare il livello ($\rightarrow \Delta h$) di molto o di poco a seconda delle sue dimensioni. Si può verificare che la ‘capacità volumetrica’, definita come volume di liquido introdotto diviso l’innalzamento di livello corrisponde proprio alla sezione del recipiente.² Similmente, un hard disk ha una grande capacità se si può introdurre in esso una grande mole di dati senza che esso modifichi di molto il suo livello di occupazione (ad esempio la barretta che indica quanto un disco è pieno).

5.1.2 Condensatori in serie e in parallelo

Concludiamo la presentazione del condensatore ricavandoci, in analogia a quanto fatto per le resistenze, le regole di combinazione di condensatori in serie e in parallelo.

Cominciamo con condensatori in parallelo, configurazione raffigurata nello schema a sinistra di figura 5.2. Per definizione di parallelo essi hanno fra le armature la stessa differenza di potenziale, $V_+ - V_-$. Quindi la carica sulle armature di ciascun condensatore saranno rispettivamente Q_{1+} e Q_{2+} sul lato V_+ e Q_{1-} e Q_{2-} sul lato V_- . La capacità del condensatore equivalente sarà quindi

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{Q_{1+} + Q_{2+}}{V_+ - V_-} = \frac{Q_{1+}}{V_+ - V_-} + \frac{Q_{2+}}{V_+ - V_-} \\ &= C_1 + C_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Nel caso della serie, invece, è la carica che deve essere la stessa nei diversi condensatori, come si capisce osservando nello schema di destra della figura 5.2 la connessione fra C_1 e C_2 . Infatti, siccome quando non è applicata alcuna differenza di potenziale fra i punti A e B i condensatori sono scarichi, le

²Ad esempio, le capacità dei serbatoi delle raffinerie vengono misurate in metri cubi al cm (m^3/cm) e, per curiosità, i serbatoi della Raffineria di Roma sono di circa $30\text{m}^3/\text{cm}$, come verificabile facilmente mediante GoogleEarth.

cariche sull'armatura positiva di C_1 e sull'armatura negativa di C_2 non possono che essere uguali e opposte. Quindi, su tutte le armature di condensatori in serie le cariche non possono che avere lo stesso modulo (ricordiamo che ogni condensatore è un oggetto neutro). In questo caso a sommarsi saranno le differenze di potenziale, in quanto $V_B - V_A = Q_+/C_1 + Q_+/C_2$. Ne segue che il condensatore fra A e B ha capacità

$$C_s = \frac{Q_+}{V_B - V_A} = \frac{Q_+}{Q_+/C_1 + Q_+/C_2} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2}, \quad (5.7)$$

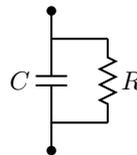
ovvero

$$C_s^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}. \quad (5.8)$$

In questo caso si sommano i reciproci. Insomma, come aiuto mnemonico, possiamo riassumere che le regole di combinazione di capacità in serie e parallelo sono le opposte di quelle delle resistenze. E, ovviamente, le regole si estendono naturalmente da due a molti condensatori.

5.1.3 Resistenza parassita

Per completezza notiamo come fra una armatura e l'altra di un condensatore ci potrebbe essere un flusso di corrente dovuto al non perfetto isolamento (si immagini ad esempio un dielettrico non perfettamente isolante o lo stesso involucro esterno dei condensatori usati normalmente nei circuiti, attraverso il quale potrebbe scorrere corrente). Ne segue che, almeno dal punto di vista generale, dobbiamo associare una resistenza posta in parallelo alla capacità,



ma tale resistenza è in genere talmente grande da essere assolutamente trascurabile per quello che riguarda lo scopo di questa introduzione.

(Appendice con elementi reali?)

5.2 Corrente elettrica 'attraverso' un condensatore

Finora abbiamo assunto i vari condensatori in qualche modo carichi e abbiamo semplicemente fatto uso della relazione fra carica e tensione che li caratterizza. Vediamo ora cosa succede se colleghiamo un condensatore inizialmente scarico ad un generatore mediante una resistenza (vedi figura 5.3). La presenza della resistenza è molto importante e non soltanto dal punto di vista pratico, a ricordare che anche i fili di collegamento hanno una resistenza, benché piccola. Infatti il modello di un condensatore direttamente collegato ad un generatore non è fisico (provare a pensarci) e genera anche degli assurdi energetici, come vedremo nel paragrafo 5.8.

Nell'istante in cui il condensatore viene collegato, essendo esso inizialmente scarico, la differenza di potenziale fra le armature è nulla e quindi i capi