

che è la nostra soluzione (anche se non sembra). Si tratta soltanto di recuperare modulo e fase di v_{C_0} e il gioco è fatto.¹⁶ Otteniamo quindi

$$V_{C_0} = |v_{C_0}| = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad (7.115)$$

$$\varphi_C = 0 - \arctan(\omega \tau), \quad (7.116)$$

ove abbiamo scritto esplicitamente lo zero come applicazione della regola ricordata nell'appendice in fondo a questo capitolo. Ovviamente abbiamo riottenuto i risultati che già conosciamo. Come esercizio, calcoliamo in modo diretto anche modulo e fase della tensione ai capi della resistenza, partendo dalla relazione $v_R = j\omega \tau v_C$:

$$v_{R_0} = \frac{j\omega \tau V_0}{1 + j\omega \tau} \quad (7.117)$$

$$= \frac{V_0}{1 - j/(\omega \tau)} \quad (7.118)$$

da cui

$$V_{R_0} = |v_{C_0}| = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^{-2}}} \quad (7.119)$$

$$\varphi_R = 0 - (-\arctan(1/(\omega \tau))) \quad (7.120)$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{\omega \tau}\right). \quad (7.121)$$

7.11 Moto circolare uniforme nel piano complesso

Come ulteriore esercizio, applichiamo il formalismo dei numeri complessi in notazione esponenziale al moto circolare uniforme. In questo caso la variabile complessa di partenza è

$$r = R e^{j\omega t}, \quad (7.122)$$

della quale parte reale e parte immaginaria corrispondono alle coordinate x e y , ovvero il passaggio da r al normale vettore $\vec{r}$ è data da

$$\vec{r} = (\text{Re}[r], \text{Im}[r]), \quad (7.123)$$

e analoghe relazioni varranno per velocità e accelerazione.

Al passare del tempo il punto definito da r sul piano complesso (vedi figura 7.18) percorre in verso antiorario il cerchio di raggio R . Otteniamo la variabile

¹⁶Si ricorda che il modo più facile per calcolare modulo e fase di un numero complesso è utilizzando le seguenti regole (per i dettagli vedi apposita appendice in fondo al capitolo):

- il modulo di un prodotto è pari al prodotto dei moduli, mentre il modulo di un rapporto è pari al rapporto dei moduli;
- la fase di un prodotto è pari alla somma delle fasi, mentre la fase di un rapporto è pari alla differenza delle fasi (fase del numeratore meno fase del denominatore).

Si sconsiglia invece, nella maggior parte dei casi, la razionalizzazione maniacale delle frazioni con denominatori complessi appresa alle superiori in quanto dà luogo a calcoli più laboriosi e a formule finali più complicati (con conseguenti possibili errori e difficoltà di interpretazione dei risultati).

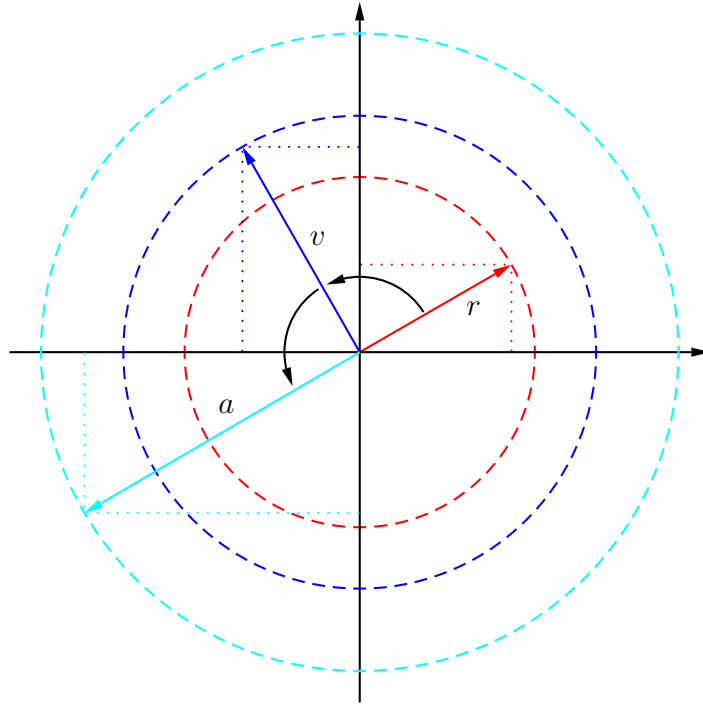


Figura 7.18: Moto circolare uniforme visualizzato sul piano complesso (vedi testo).

complessa corrispondente alla velocità derivando rispetto al tempo:

$$v = \frac{dr}{dt} = j\omega r. \quad (7.124)$$

Come già sappiamo, sia parte reale che parte immaginaria di v sono valgono ω volte quelle di r ed inoltre sono sfasate di $\pi/2$. Questo vuol dire che il vettore velocità *precede* di $\pi/2$ il vettore posizione, come indicato in figura. Infine, per l'accelerazione abbiamo

$$a = \frac{dv}{dt} = j\omega v = -\omega^2 r : \quad (7.125)$$

essa anticipa di $\pi/2$ la velocità e quindi di π la posizione (si ricorda che $-1 = e^{j\pi}$). Al passare del tempo i tre vettori ruotano solidali, con velocità angolare ω , mantenendo le loro distanze angolari invariate. All'aumentare di ω il modulo di v cresce linearmente, mentre quello di a quadraticamente.

Ovviamente, a parte l'uso delle variabili complesse, quanto abbiamo detto può risultare una serie di ovvietà. Ma questa analogia cinematica ci servirà nel capitolo 11, quando entrerà in gioco anche la derivata seconda della tensione ai capi del condensatore.