Nota sull'oscillatore forzato
(Fisica per SMIA – G. D'Agostini, Maggio 2025)

1. Il problema fisico – richiamo all'oscillatore smorzato

Riprendiamo il moto intorno alla posizione di equilibrio di una oggetto sospeso a una molla. Indicando con $x(t)$ la differenza ad un certo istante fra la posizione lungo l'asse della molla e la posizione di equilibrio,[1] la forza elastica vale $F_E(x) = -k\,x$. A questa aggiungiamo la forza di resistenza dell'aria, *modellizzata*[2] come $F_A(v) = -\beta\,v$, con v la velocità,

L'accelerazione dovuta alle due forze vale quindi

$$a \;=\; \frac{F_E(x) + F_A(v)}{m} = -\frac{k}{m}x - \frac{\beta}{m}v\,, \tag{1}$$

da cui segue, riordinando l'espressione precedente e scrivendo velocità e accelerazione come derivate prima e seconda della posizione rispetto al tempo,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x \;=\; 0\,. \tag{2}$$

In k/m riconosciamo il quadrato della pulsazione di un 'normale' oscillatore armonico, che indichiamo qui con ω_0, mentre chiamiamo γ il rapporto β/m, avente, come ω_0, dimensioni inverse di un tempo (misurate quindi entrambe in s^{-1}). L'*equazione differenziale* di interesse diventa quindi

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x \;=\; 0\,. \tag{3}$$

La soluzione di questa equazione è stata confrontata a lezione con quella della scarica di un condensatore in un circuito in cui sono disposti in serie al condensatore una ressistore e un induttore, mettendo anche in evidenza le analogie fra i due casi fisici.[3] Indicando quindi con z la generica variabile del problema (identificata con x definita sopra nel caso meccanico e con la carica Q nel caso elettrico), la generica equazione differenziale è quindi

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,z \;=\; 0\,. \tag{4}$$

Si è poi visto come si possa risolvere questa equazione differenziale facendo uso di *variabili intermedie complesse*, anche se in questo corso non abbiamo

[1] Ricordiamo che la forza peso ha solo il ruolo di definire il punto di equilibrio ma è ininfluente per quanto riguarda le oscillazioni intorno a tale punto. Per i dettagli vedi pag. 23 della 'vecchia dispensa'. (È curioso constatare come sono in molti ad evere idee poco chiare su questo punto, da cui la prassi di trattare la molla disposta orizzontalmente, senza spiegare l'effetto della gravità che la farebbe curbare...)

[2] Tale modellizzazione è comoda perché facilita i conti, anche se a rigore non è corretta in quanto la dipendenza della forza di resistenza dell'aria è quadratica con la velocità. Per avere una forza dipendente linearmente dalla velocità dovremmo considerare dei 'fluidi viscosi'. Ed è per quello che si trovano video con tipi coscienziosi che dispongono la molla (orizzontalmente) in un bagno di olio).

[3] Si veda sul sito il file `circuiti_253-267.pdf`.

analizzato i dettagli delle formule derivanti, limitandoci a studiare le soluzioni che si ottengono al variare dei parametri mediante opportuno linguaggio di programmazione.[4] Esempi di soluzione al variare di β sono riportati sul sito nella *Galleria*. Le oscillazioni si smorzano a causa del termine dissipativo $-\beta\, v$, a cui corrisponde nel caso elettrico la potenza dissipata per effetto Joule, pari a $R\, I^2(t)$, e le figure sul sito mostrano il 'palleggiamento' di energia fra la componente potenziale della molla e la componente cinetica della massa in movimento, energia che però decresce (<u>in media</u> esponenzialmente) fino ad azzerarsi ('degradandosi' in agitazione termica del mezzo in cui oscilla la molla.).

2. Aggiunta di un termine 'forzante' sinusoidale

Possiamo però applicare una forza esterna, diretta come le altre due lungo l'asse della molla, in modo che il lavoro da essa compiuto sulla massa oscillante possa compensare la perdita di energia per attrito. Per comodità immaginiamo che tale forza abbia un andamento nel tempo sinusoidale, ovvero sia del tipo $f_0 \cos(\omega\, t)$. La forza totale sarà quindi data da $F_E(x) + F_A(v) + f_0 \cos(\omega\, t)$ e la (3) diventa quindi[5]

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x \;=\; \frac{f_0}{m} \cos(\omega\, t)\,, \tag{5}$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x \;=\; g_0 \cos(\omega\, t)\,, \tag{6}$$

avendo indicato con g_0 il rapporto f_0/m.

Come fatto per l'oscillatore smorzato, anche in questo caso faremo uso di variabli complesse, la cui parte reale sarà la soluzione fisica. Il termine forzante sarà quindi dato da $g_0 e^{i\omega t}$, mentre la variabile complessa associata alla x sarà indicata anche in questo caso con ζ. Siccome dopo un certo tempo, quando sono smorzati i *transienti*,[6] rimane soltanto l'effetto dovuto alla forza esterna applicata, la soluzione sarà oscillante alla stessa frequenza del termine forzante, la soluzione complessa sarà del tipo

$$\zeta(t) = \kappa\, e^{i\omega t}.$$

La nostra equazione diventa quindi

$$\frac{\mathrm{d}^2 \zeta}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\, \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, \zeta \;=\; g_0\, e^{i\omega t}\,, \tag{7}$$

[4] Vedi script `oscillazioni_smorzate.R` e `oscillazioni_smorzate_molla.R`, sul sito del corso, eventualmente da convertire in Python o altro linguaggio.

[5] Anche di questa esiste un equivalente caso elettrico, con una forza elettromotrice alternata, della quale non ci occuperemo esplicitamente.

[6] Tecnicamente, si dice che la soluzione più generale è data dalla soluzione dell'*equazione omogenea associata*, data dalla (3), più quella *particolare*, la quale dipende esplicitamente dal termina forzante. Ma dopo un certo tempo rimarrà solo l'oscillazione forzata, alla stessa frequenza della forza esterna, la quale perdura finché dura tale forza, per poi diventare una semplice oscillazione smorzata quando essa cessa, con condizioni iniziali pari a posizione e velocità nell'istante in cui il termine forzante viene meno.

da cui segue

$$-\omega^2 \cdot \kappa\, e^{i\omega t} + i\omega\, \gamma \cdot \kappa\, e^{i\omega t} + \omega_0^2 \cdot \kappa\, e^{i\omega t} \;\; = \;\; g_0\, e^{i\omega t}\,. \tag{8}$$

Siccome l'esponenziale che compare in tutti i termini si può semplificare in quanto esso non è mai nullo. A tale riguardo ricordiamo che nel piano complesso $e^{i\omega t}$ ha *modulo* ('lunghezza') unitario e allo scorrere del tempo ruota in verso antiorario con pulsazione ω, ovvero l'*argomento* (chiamato anche 'fase') è pari a ωt.

L'*equazione algebrica associata* è data quindi da

$$\left(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2\right) \cdot \kappa \;\; = \;\; g_0\,, \tag{9}$$

ca cui otteniamo

$$\kappa \;\; = \;\; \frac{g_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}\,, \tag{10}$$

da cui segue, per la variabile complessa 'ausiliare'

$$\zeta(t) \;\; = \;\; \frac{g_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}\, e^{i\omega t}. \tag{11}$$

A questo punto, se siamo soltanto interessati ad osservare la posizione e la velocità in funzione del tempo, possibilmente confrontate con la variazione nel tempo della forza, il problema può essere risolto con un opportuno programmino in un linguaggio che permetta di lavorare con numeri complessi.

Ecco le istruzioni rilevanti, mentre per l'intero codice, che ovviamente include i plot, si veda lo script `oscillatore_forzato.R` sul sito del corso:

```
om <- 1.00 * om0  # omega della forza oscillante in unità di omega0
T  <- 2*pi/om
t.max <-  2*T

t <- seq(0, t.max, len=101)
F <- f0 * cos(om*t)

kappa <- g0 / ( om0^2 - om^2 + 1i * gamma * om  )
zeta  <- kappa * exp(1i * om * t) # variabile complessa legata a x
x     <-  Re(zeta)

zeta.dot <- 1i * om * zeta        # derivata di zeta
v        <- Re(zeta.dot)

# seguono i plot ....
```

Le figure riportate nelle pagine che seguono mostrano $x(t)$ e $v(t)$ della massa sospesa, confrontate con la sinusoide della forza, per alcuni valori di ω/ω_0. Si noti come, al fine di riportare posizione e velocità sullo stesso plot, sono di fatto riportati i loro valori riscalati al massimo, il quale dipende da ω/ω_0.

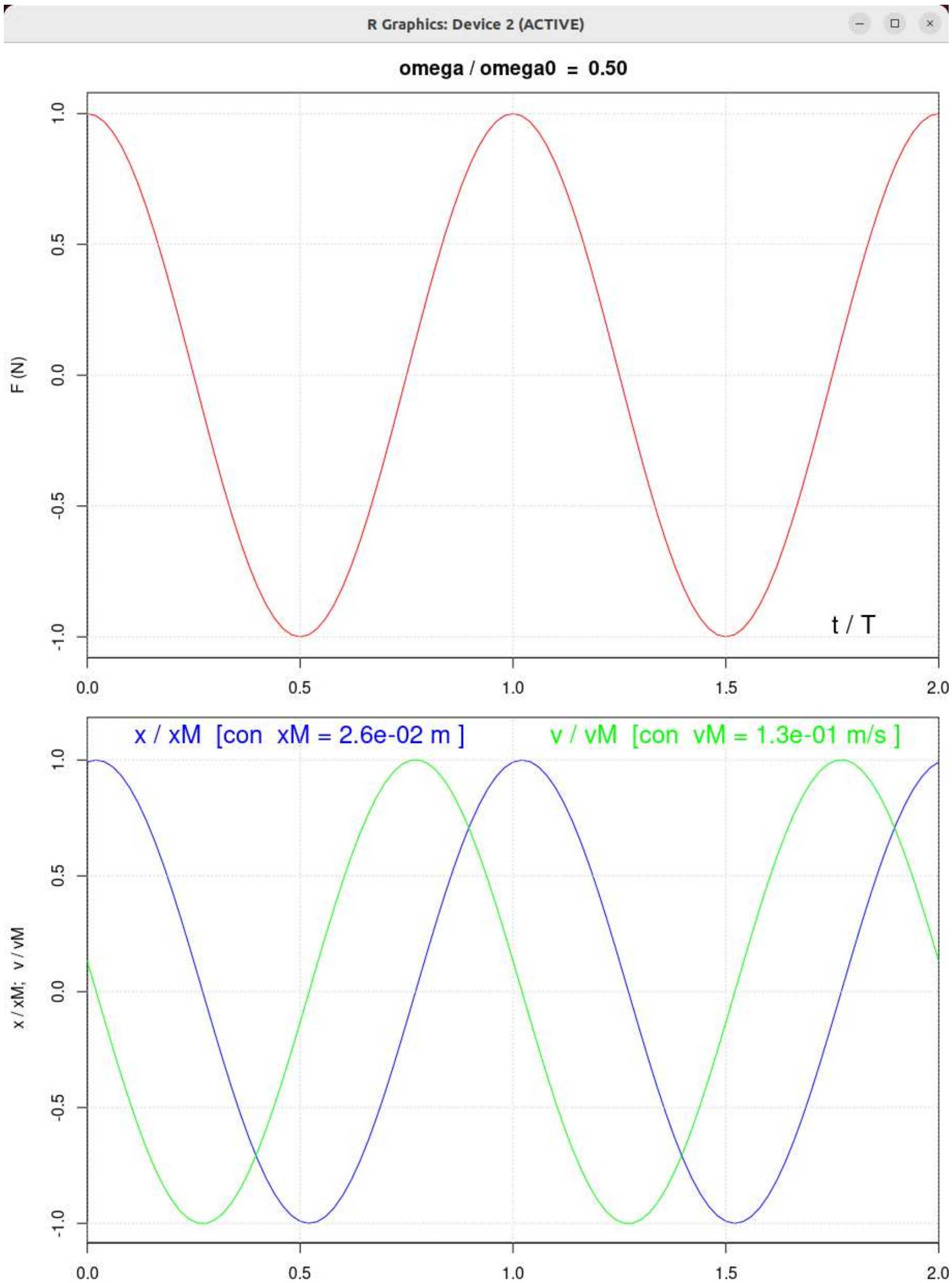

Figura 1: In alto la forza sinusoidale, avente $\omega = \omega_0/2$. In basso $x(t)$ e $v(t)$, con i valori riscalati ai loro massimi ('`xM`'e '`vM`' sopra le due curve nel plot).

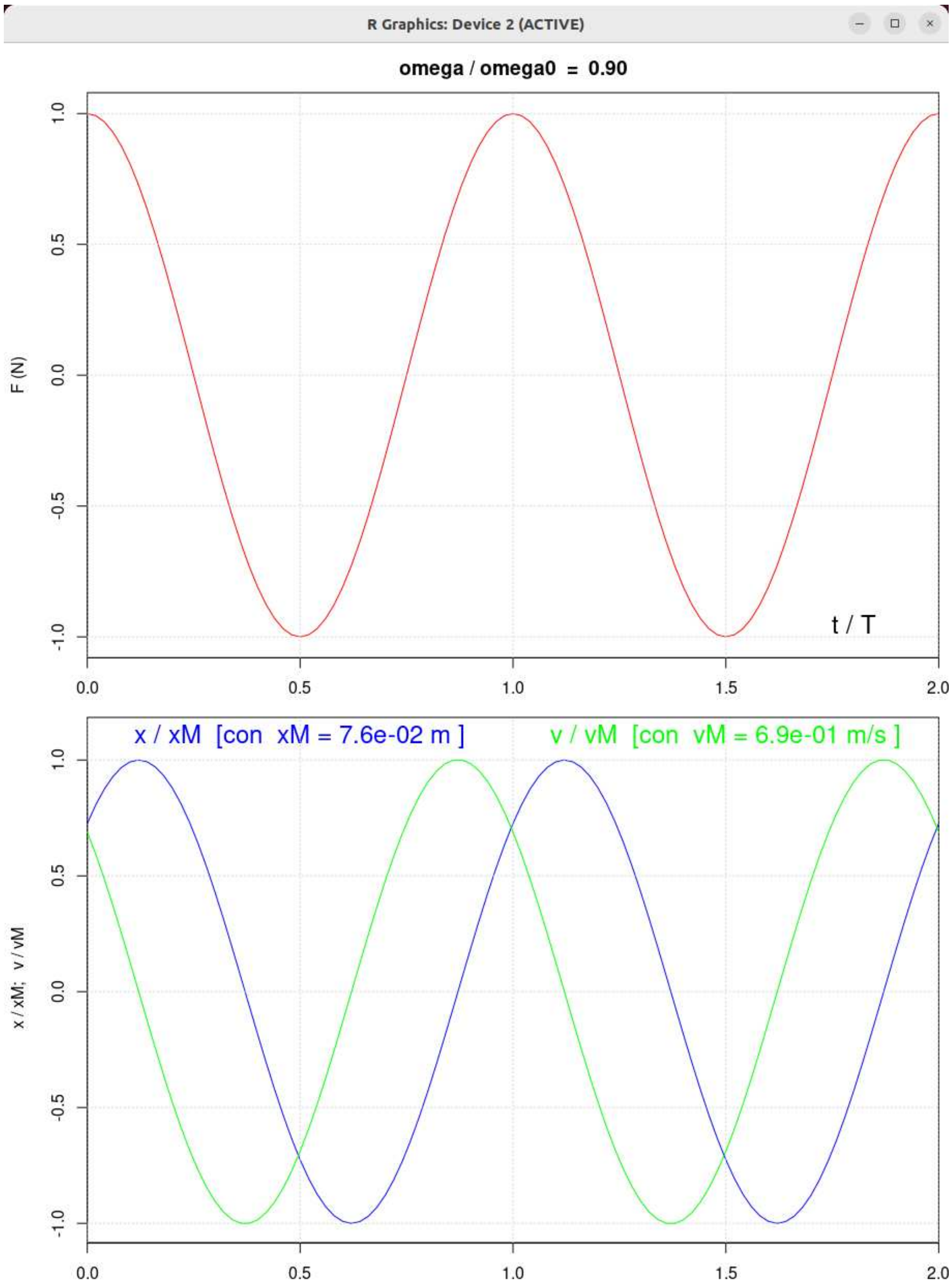

Figura 2: In alto la forza sinusoidale, avente $\omega = 0.9 \times \omega_0$. In basso $x(t)$ e $v(t)$, con i valori riscalati ai loro massimi ('`xM`'e '`vM`' sopra le due curve nel plot).

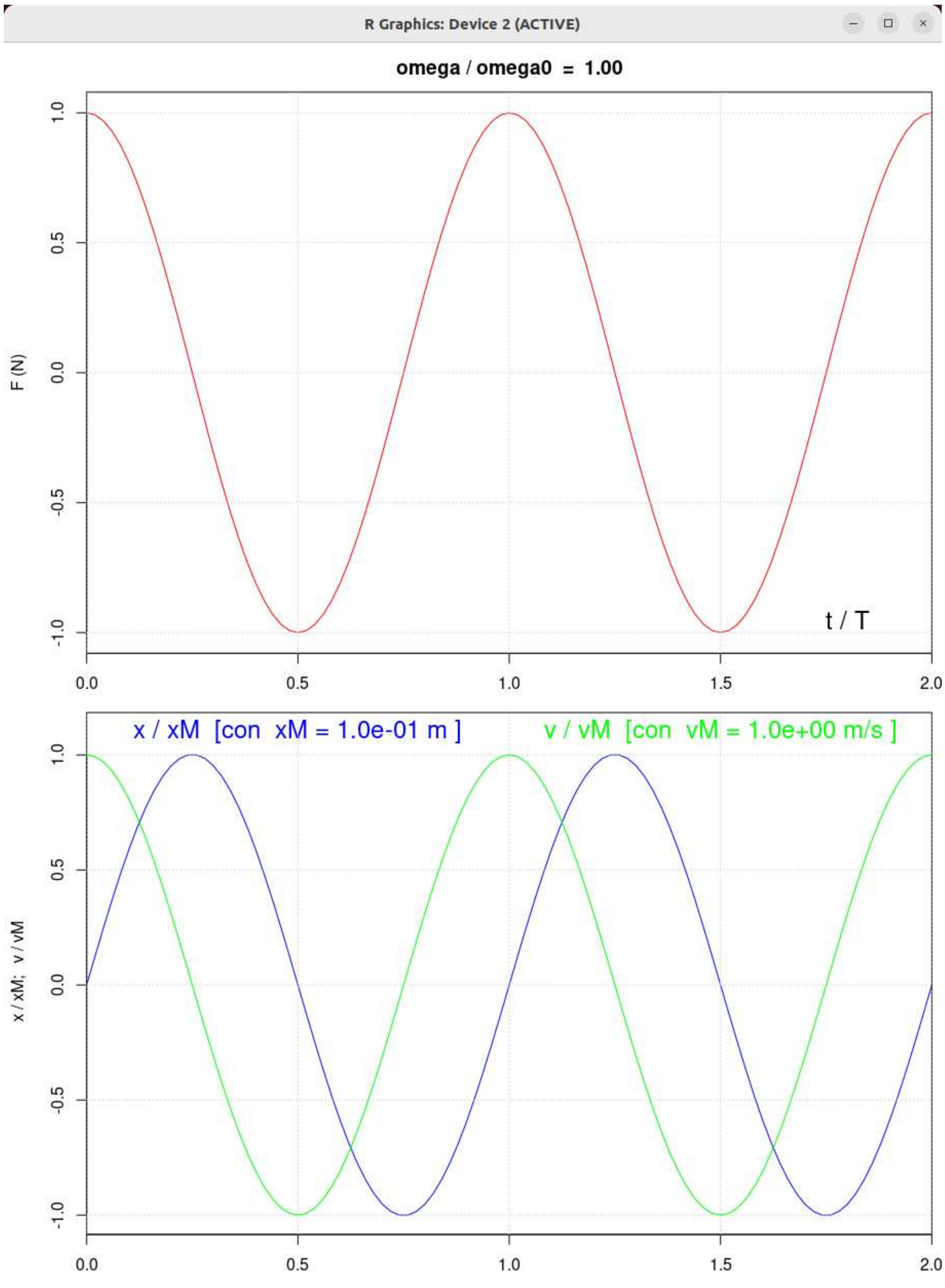

Figura 3: In alto la forza sinusoidale, avente $\omega = \omega_0$. In basso $x(t)$ e $v(t)$, con i valori riscalati ai loro massimi ('`xM`'e '`vM`' sopra le due curve nel plot).

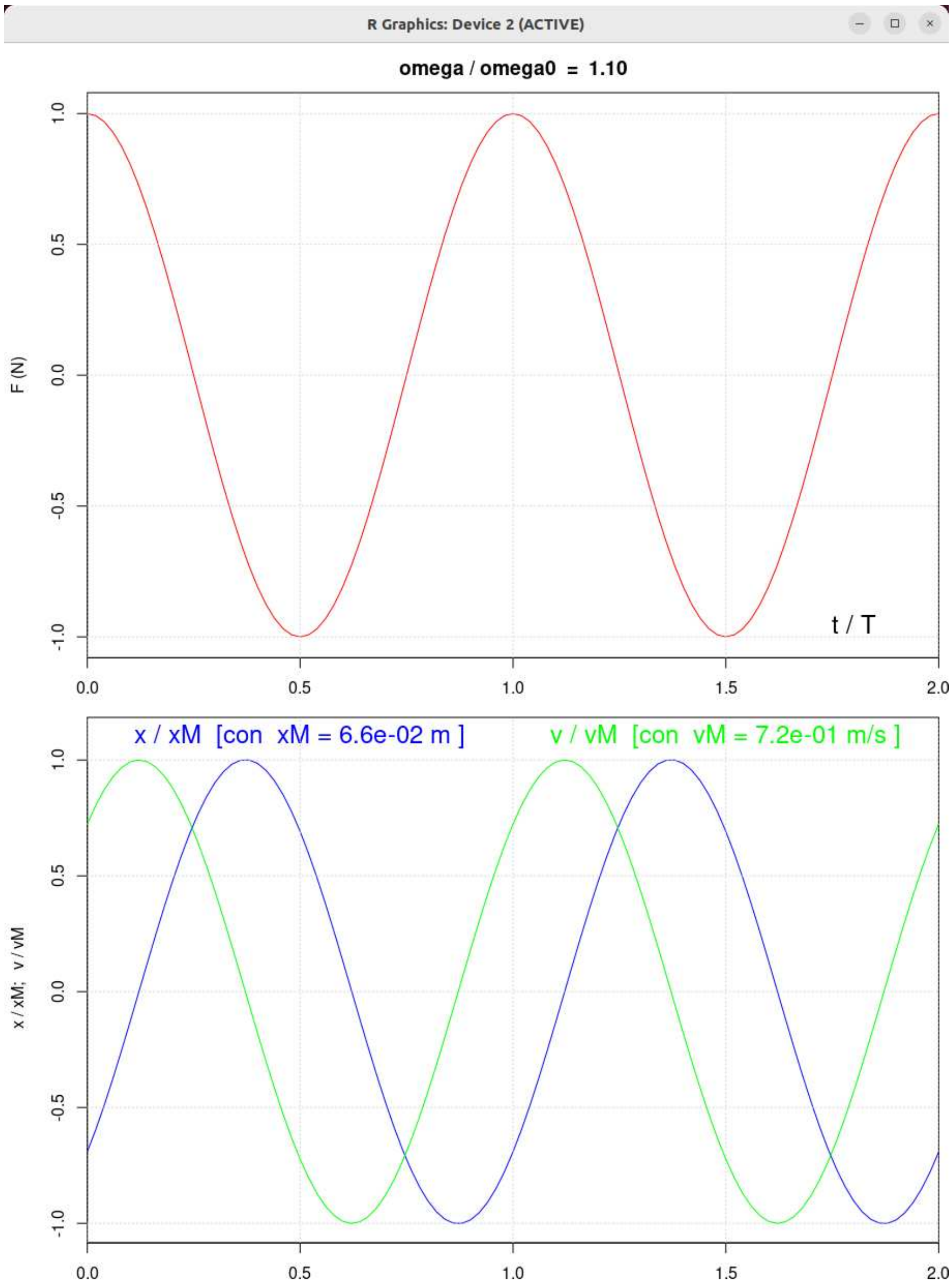

Figura 4: In alto la forza sinusoidale, avente $\omega = 1.1 \times \omega_0$. In basso $x(t)$ e $v(t)$, con i valori riscalati ai loro massimi ('`xM`'e '`vM`' sopra le due curve nel plot).

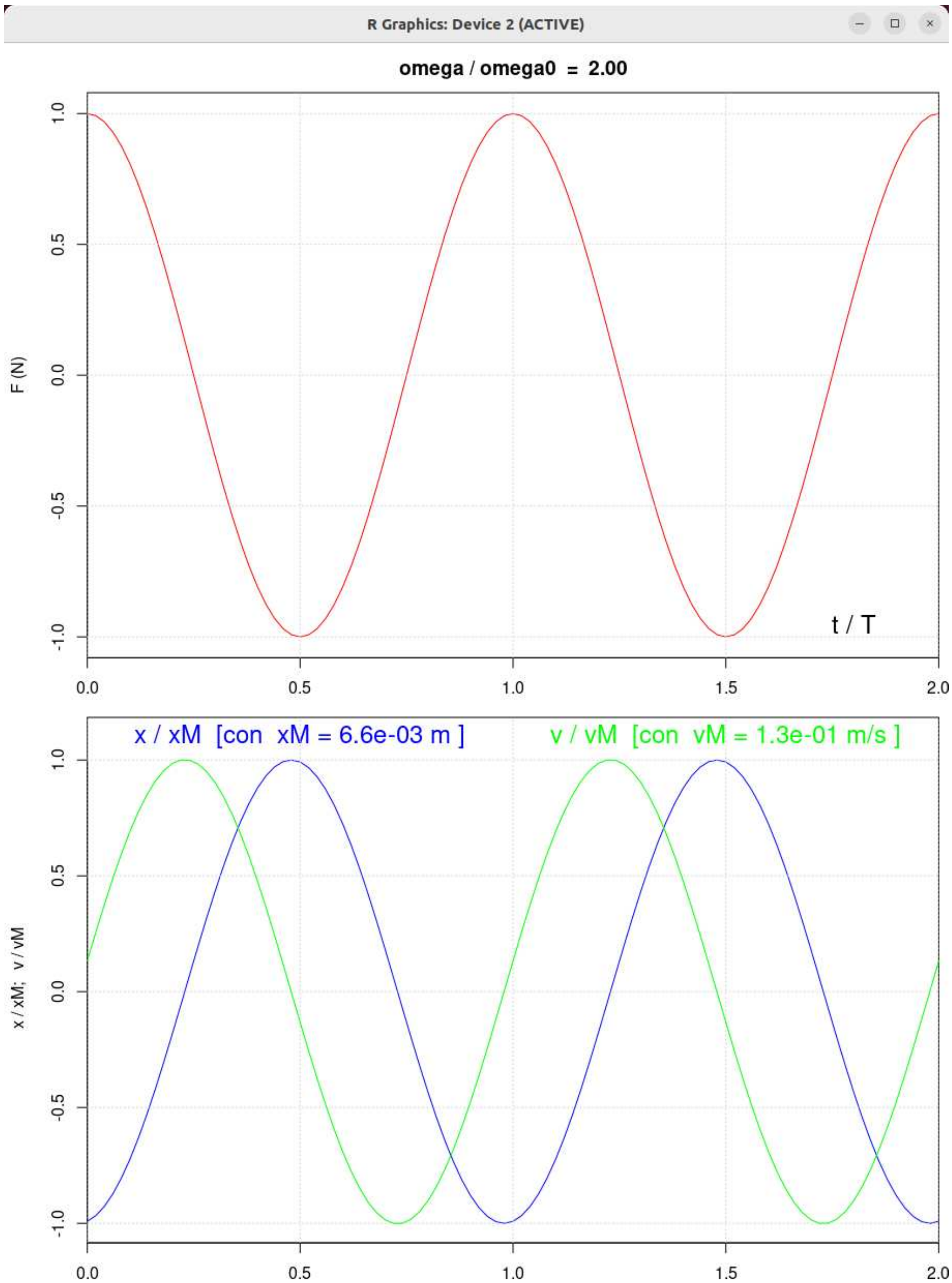

Figura 5: In alto la forza sinusoidale, avente $\omega = 2 \times \omega_0$. In basso $x(t)$ e $v(t)$, con i valori riscalati ai loro massimi ('xM'e 'vM' sopra le due curve nel plot).

Dalle figure delle pagine precedenti si vede come non solo le ampiezze di oscillazione di $x(t)$ e $v(t)$ dipendono da ω/ω_0, come riporato negli stessi plot, ma ci dipende anche la loro fase. Si può infetti vedere come all'aumentare di ω/ω_0 entrambe le curve si spostano verso destra. In particolare, per $\omega = \omega_0$ la curva della velocità è in fase con la forza, mentre $x(t)$ *ritarda* di un quarto di periodo. Per tale valore di $\omega = \omega_0$ le empiezze di oscillazione di $x(t) e$v(t) hanno un massimo.

Il motivo di questo comportamento è che il fattore κ che moltiplica è un numero complesso, e quindi è caratterizzato da modulo e fase. Ma prima di discutere in dettaglio il comportamento analitico che descrive $x(t)$ e $v(t)$ è opportuno riguardarsi le proprietà dei numeri complessi rispetto al loro prodotto e rapporto, illustrate a lezione ($\rightarrow$ `circuiti_181-182.pdf` sul sito del corso). Solo dopo potremo capire i curiosi comportamenti dell'oscillatore forzato.

Per questioni didattiche, questa nota non mostra ulteriori questioni sul tema, per le quali si rimanda al sito del corso:
`https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/Lezioni_FisAI_24-25.html#22mag`
`https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/Lezioni_FisAI_24-25.html#29mag`
`https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/galleria_FisAI_24-25.html#OscillatoreForzatoBeta1`
`https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/galleria_FisAI_24-25.html#StudioKappa`
`https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/galleria_FisAI_24-25.html#StudioKappaNote`
`https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/Lezioni_FisAI_24-25.html#5giu`
Problemi nr. 34.1, 35.1. 35.2,