Così è. . . probabilmente

Ragionamento probabilistico in Fisica illustrato mediante un “Esperimento Giocattolo”

Giulio D’Agostini

Università La Sapienza e INFN, Roma, Italy

“ Quando le leggi della matematica si riferiscono alla realtà, non sono certe;
e quando sono certe non si riferiscono alla realtà.”
(A. Einstein)

“È scientifico soltanto dire cosa è più probabile e cosa è meno probabile”
(R. Feynman)

“La teoria della probabilità in fondo non è che buon senso ridotto a calcolo.”
(S. Laplace)

Scienza e incertezza

"Quando le leggi della matematica si riferiscono
alla realtà, non sono certe;
e quando sono certe non si riferiscono alla realtà."

(A. Einstein)

Scienza e incertezza

"E' scientifico soltanto dire cosa è più probabile
e cosa è meno probabile."

(R. Feynman)

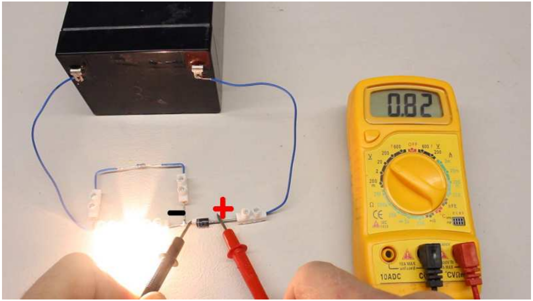
Scienza e incertezza

"La teoria della probabilità in fondo non è che buon senso ridotto a calcolo."

(S. Laplace)

Misurare

Misurare

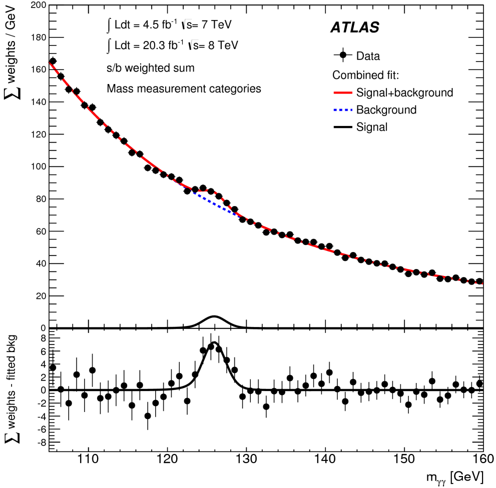


Misurare

Misurare

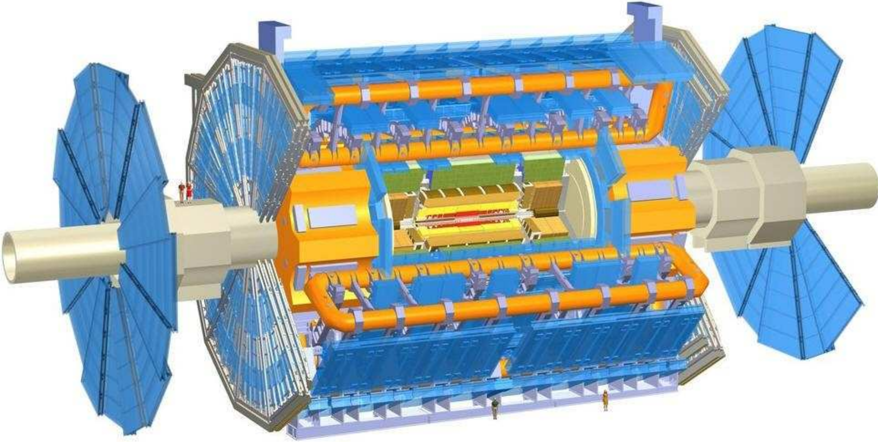
Misurare

Higgs $\to \gamma\gamma$



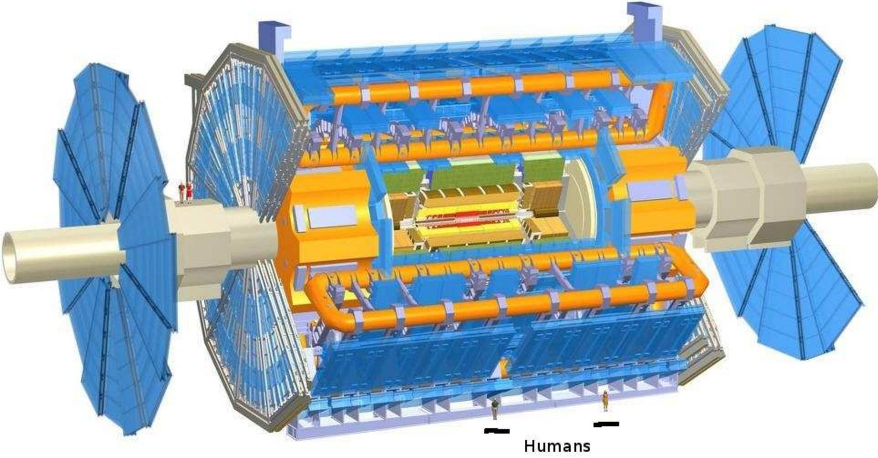
Misurare

ATLAS Experiment at LHC



Misurare

Esperimento ATLAS a LHC [length: 46 m; $\varnothing$ 25 m]

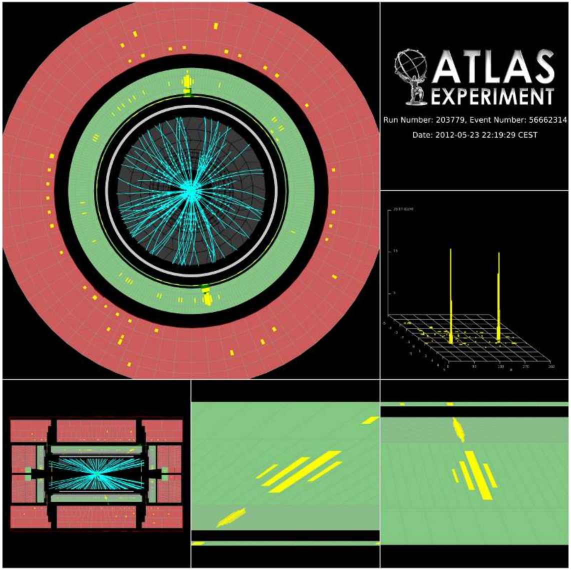


$\approx$ 3000 km di cavi

$\approx$ 7000 tonnellate

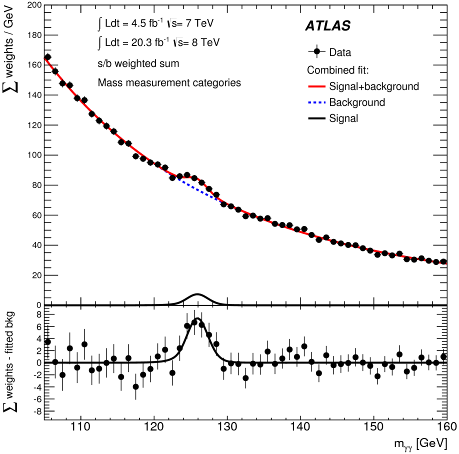
$\approx$ 100 milioni di canali di elettronica

Misurare



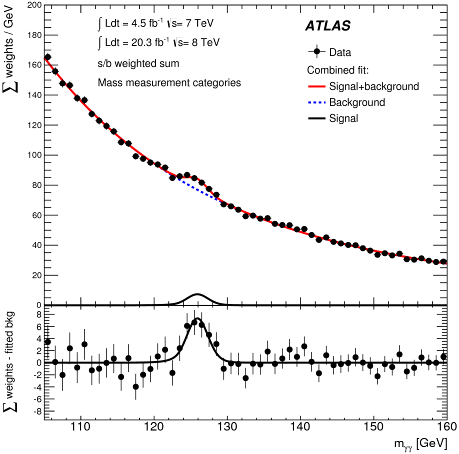
Higgs in γ-γ ?

Misurare



Probabilmente no. . .

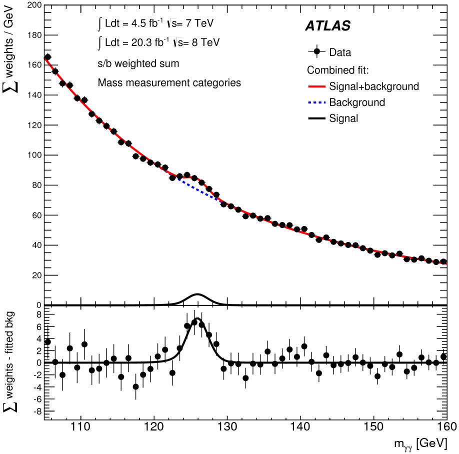
Misurare



Probabilmente no. . .

Eppure $\Rightarrow \begin{cases} \text{Massa} \\ \text{Tasso di produzione} \end{cases}$

Misurare



Probabilmente no. . . Eppure ⇒ { Massa / Tasso di produzione

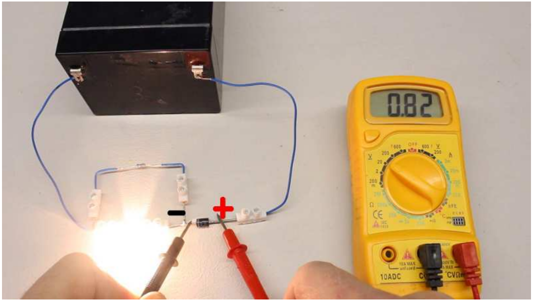
Misure alquanto indirette di qualcosa che non “vediamo”!

Possiamo ‘vedere’ grandezze fisiche?

Ma, veramente <u>vediamo</u> la nostra massa?

Possiamo ‘vedere’ grandezze fisiche?

. . . o una tensione?



Possiamo ‘vedere’ grandezze fisiche?

. . . o la pressione del sangue?

Possiamo ‘vedere’ grandezze fisiche?

Certamente no!

Possiamo 'vedere' grandezze fisiche?

Certamente no!

. . . sebbene di alcune grandezze possiamo avere

una 'impressione vivida' (nel senso di David Hume)

Misurare una massa con una bilancia

Equilibrio fra forza peso e forza elastica:

$$
\begin{aligned}
{\color{red}m}g - k{\color{blue}\Delta x} &= 0 \\
{\color{blue}\Delta x} &\rightarrow {\color{blue}\theta \rightarrow \text{lettura}}
\end{aligned}
$$

Dalla lettura al valore della massa:

$$
{\color{blue}\text{lettura}} \xrightarrow[g,\ k,\ \text{"etc."}\ldots]{} {\color{red}m}
$$

Misurare una massa con una bilancia

$$\text{Lettura} \quad \xrightarrow[g,\ k,\ \text{“etc.”}\dots]{} \quad m$$

Dipendenza da 'g': $$g \stackrel{?}{=} \frac{GM_{♁}}{R_{♁}^2}$$

Misurare una massa con una bilancia

$$\text{Lettura} \quad \xrightarrow[g,\ k,\ \text{“etc.”}\ldots]{} \quad m$$

Dipendenza da ‘g’: $$g \stackrel{?}{=} \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$$

- La posizione <u>non</u> è alla distanza “$R_{\oplus}$” dal centro della Terra;
- la Terra non è sferica...
- ...e nemmeno ellissoidale...
- ...né tanto meno perfettamente omogenea.
- Poi dobbiamo tener conto degli effetti centrifighi
- ...e anche dell’effetto della Luna...

Misurare una massa con una bilancia

$$\text{Lettura} \xrightarrow[g,\ k,\ \text{“etc.”}\ldots]{} m$$

Dipendenza da 'g': $$g \stackrel{?}{=} \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$$

- La posizione <u>non</u> è alla distanza "$R_{\oplus}$" dal centro della Terra;
- la Terra non è sferica...
- ...e nemmeno ellissoidale...
- ...né tanto meno perfettamente omogenea.
- Poi dobbiamo tener conto degli effetti centrifighi
- ...e anche dell'effetto della Luna...

Certamente non per controllare il nostro peso

Misurare una massa con una bilancia

$$\text{Lettura} \xrightarrow[g,\ k,\ \text{“etc.”}\ldots]{\hspace{4cm}} m$$

Dipendenza da 'g': $$g \stackrel{?}{=} \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$$

- La posizione <u>non</u> è alla distanza "$R_{\oplus}$" dal centro della Terra;
- la Terra non è sferica...
- ...e nemmeno ellissoidale...
- ...né tanto meno perfettamente omogenea.
- Poi dobbiamo tener conto degli effetti centrifighi
- ...e anche dell'effetto della Luna...

Certamente non per controllare il nostro peso 

Ma da non dimenticare!

Misurare una massa con una bilancia

$$\text{Lettura} \quad \xrightarrow[g,\ k,\ \text{“etc.”}\dots]{} \quad m$$

Dipendenza da ‘g’:

$$g \stackrel{?}{=} \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$$

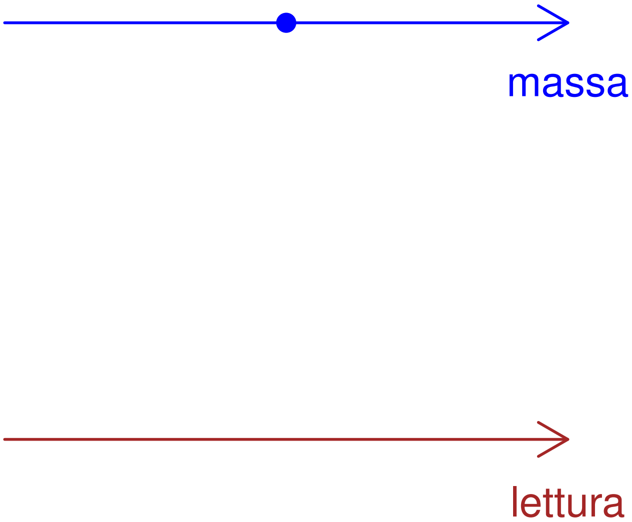
- La posizione <u>non</u> è alla distanza “$R_\oplus$” dal centro della Terra;
- la Terra non è sferica...
- ...e nemmeno ellissoidale...
- ...né tanto meno perfettamente omogenea.
- Poi dobbiamo tener conto degli effetti centrifighi
- ...e anche dell’effetto della Luna...

Certamente non per controllare il nostro peso 

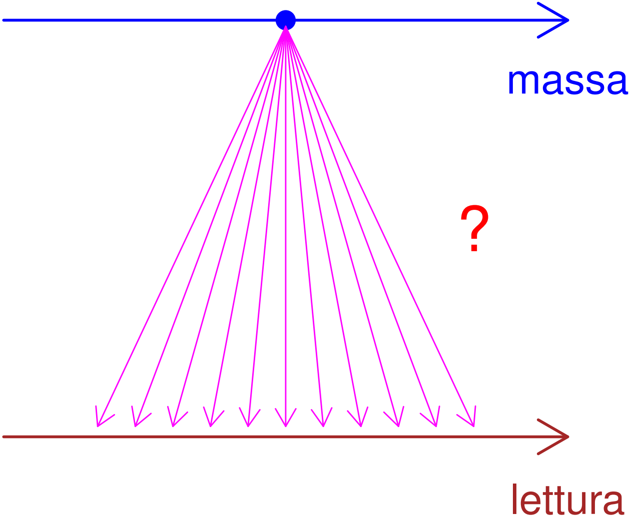
Ma da non dimenticare!

(+ effetti dovuti a k, etc.) $\rightarrow$ lasciati alla vostra immaginazione

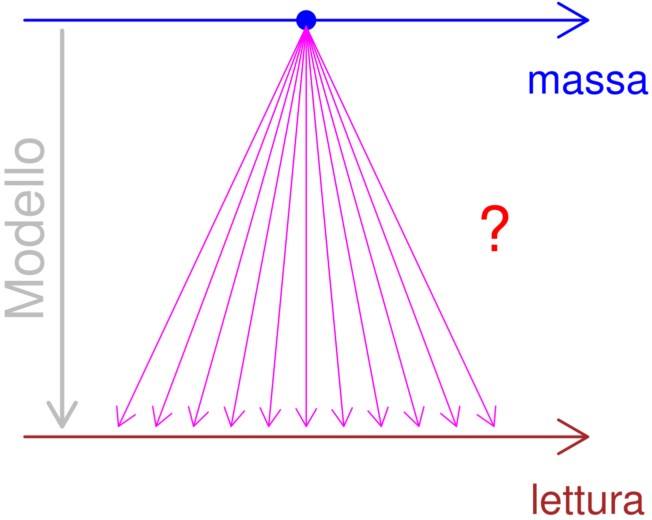
Massa $\longrightarrow$ lettura



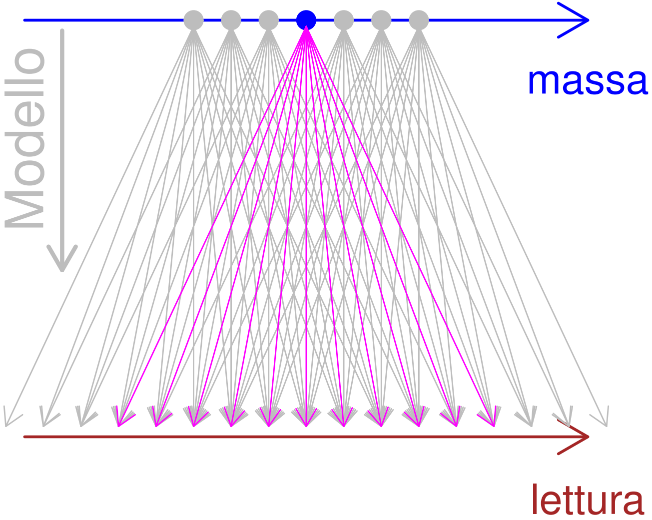
Massa ⟶ lettura



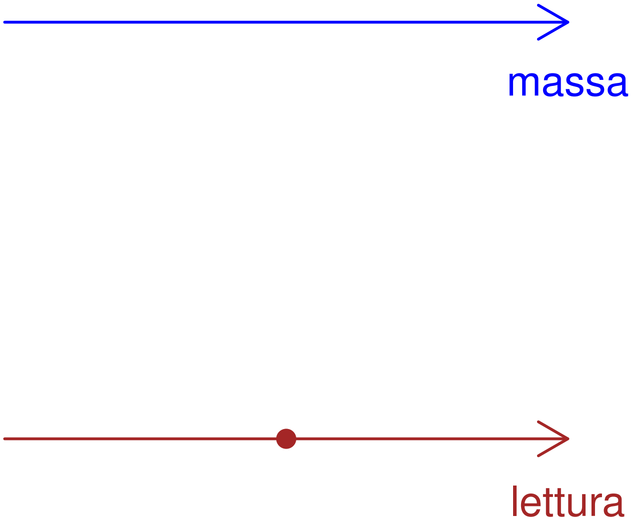
Massa $\longrightarrow$ lettura



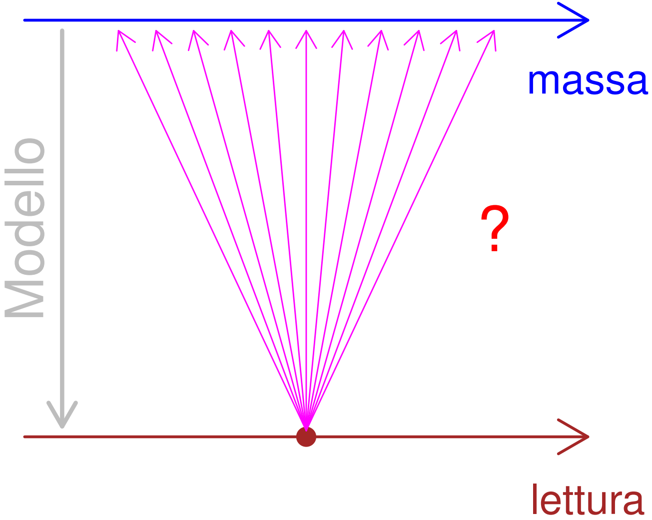
Massa $\longrightarrow$ lettura



Lettura $\longrightarrow$ massa 'vera'



Lettura $\longrightarrow$ massa 'vera'



Osservazione → ipotesi

Il problema non si presenta soltanto nella "determinazione" di valori di grandezze fisiche.

Osservazione $\rightarrow$ ipotesi

Il problema non si presenta soltanto nella "determinazione" di valori di grandezze fisiche.

- Osservazione sperimentale ('dato') $\rightarrow$ causa che l'ha prodotta.

Osservazione $\rightarrow$ ipotesi

Il problema non si presenta soltanto nella "determinazione" di valori di grandezze fisiche.

- Osservazione sperimentale ('dato') $\rightarrow$ causa che l'ha prodotta.

(Ma logicamente non c'è sostanziale differenza.)

Problema umano ancestrale

???

Problema umano ancestrale

???

→ Inseguire?

→ Fuggire?

Osservazione $\rightarrow$ ipotesi

Dipendenza dal contesto

Inseguire o fuggire?

Dipendenza dal contesto

Inseguire o fuggire?

. . . o semplicemente stare tranquilli

Dipendenza dal contesto

Inseguire o fuggire?

. . . o semplicemente stare tranquilli

se si tratta di un calco in un museo,

o di una impronta artificiale in un giardino di una scuola,

. . .

Dipendenza dal contesto

Inseguire o fuggire?

. . . o semplicemente stare tranquilli

se si tratta di un calco in un museo,

o di una impronta artificiale in un giardino di una scuola,

. . .

(. . . o siamo satolli turisti, senza interesse a cacciare

e ben protetti nel nostro veicolo )

Antropologia (e tecnologia) contemporanea

???

Effetto e possibili cause

Effetto: auto non va

Effetto e possibili cause

Effetto: auto non va

- Cause:
  - no benzina
  - pompa rotta
  - guasto elettrico

Effetto e possibili cause

Effetto: auto non va

- Cause:
  - no benzina
  - pompa rotta
  - guasto elettrico
  - altro (non faccio il meccanico...)

Effetto e possibili cause

Effetto: auto non va

- Cause:
  - no benzina
  - pompa rotta
  - guasto elettrico
  - altro (non faccio il meccanico...)
- Diagnosi dell'esperto:
  - cerca (o si informa su) effetti collaterali (rumori, ...)
  - ha una sua idea delle cause più probabili.

Effetto e possibili cause

Effetto: auto non va

- Cause:
  - no benzina
  - pompa rotta
  - guasto elettrico
  - altro (non faccio il meccanico. . .)
- Diagnosi dell'esperto:
  - cerca (o si informa su) effetti collaterali (rumori, . . .)
  - ha una sua idea delle cause più probabili.
- Azione: bilancio fra probabilità delle ipotesi, costi e tempi.

Dipendenza dal contesto

Scambio di whatsapp con vecchio amico meccanico
(24 aprile 2015)

> "Sto per andare ai Laboratori di Frascati.
> Dovevo stare lì alle 6, ma mi hanno mandato una mail dicendo che hanno problemi con l'acceleratore e posso arrivare alle 8."

Dipendenza dal contesto

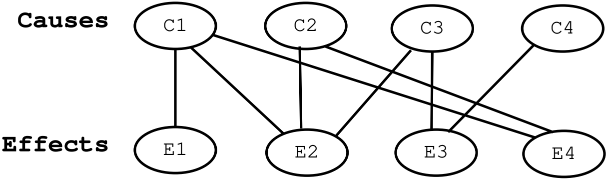
Scambio di whatsapp con vecchio amico meccanico
(24 aprile 2015)

> "Sto per andare ai Laboratori di Frascati.
> Dovevo stare lì alle 6, ma mi hanno mandato una mail dicendo che hanno problemi con l'acceleratore e posso arrivare alle 8."

> "Forse sarà il filo che non scorre bene nella guaina."

Cause → effetti

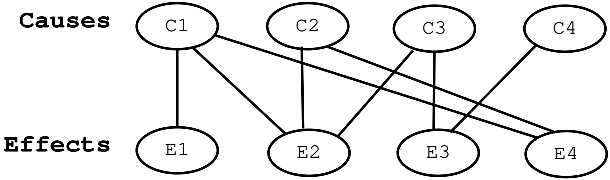
La stessa causa *apparente* può produrre differenti effetti



Dato un effetto osservato, non siamo sicuri della precisa causa che può averlo prodotto.

Cause → effetti

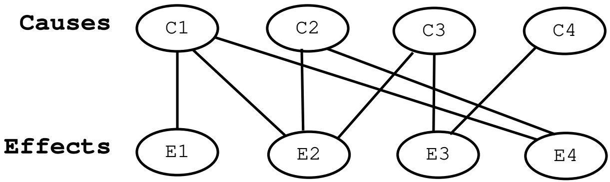
La stessa causa *apparente* può produrre differenti effetti



Dato un effetto osservato, non siamo sicuri della precisa causa che può averlo prodotto.

Cause $\rightarrow$ effetti

La stessa causa *apparente* può produrre differenti effetti



Dato un effetto osservato, non siamo sicuri della precisa causa che può averlo prodotto.

$$\mathbf{E_2} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_3\}?$$

Il "problema essenziale" del metodo sperimentale

"Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche.

Il "problema essenziale" del metodo sperimentale

"Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche.

Immaginate che io giochi a écarté con un signore che io reputi perfettamente onesto.

Il "problema essenziale" del metodo sperimentale

"Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche.

Immaginate che io giochi a écarté con un signore che io reputi perfettamente onesto. Qual'è la probabilità che estragga un Re?

Il “problema essenziale” del metodo sperimentale

“Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche.

Immaginate che io giochi a écarté con un signore che io reputi perfettamente onesto. Qual’è la probabilità che estragga un Re? E’ $1/8$.

Il "problema essenziale" del metodo sperimentale

"Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche.

Immaginate che io giochi a écarté con un signore che io reputi perfettamente onesto. Qual'è la probabilità che estragga un Re? E' $1/8$. Questa è un problema di probabilità degli effetti.

Il “problema essenziale” del metodo sperimentale

“Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche.

Immaginate che io giochi a écarté con un signore che io reputi perfettamente onesto. Qual’è la probabilità che estragga un Re? E’ $1/8$. Questa è un problema di probabilità degli effetti.

Immaginate che io giochi con un signore che non conosco. Lui ha estratto una carta dieci volte e per sei volte gli è venuto un Re.

Il “problema essenziale” del metodo sperimentale

“Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche.

Immaginate che io giochi a écarté con un signore che io reputi perfettamente onesto. Qual'è la probabilità che estragga un Re? E' 1/8. Questa è un problema di probabilità degli effetti.

Immaginate che io giochi con un signore che non conosco. Lui ha estratto una carta dieci volte e per sei volte gli è venuto un Re. Qual'è la probabilità che sia un baro?

Il "problema essenziale" del metodo sperimentale

"Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche.

Immaginate che io giochi a écarté con un signore che io reputi perfettamente onesto. Qual'è la probabilità che estragga un Re? E' 1/8. Questa è un problema di probabilità degli effetti.

Immaginate che io giochi con un signore che non conosco. Lui ha estratto una carta dieci volte e per sei volte gli è venuto un Re. Qual'è la probabilità che sia un baro? Questo è un problema di probabilità delle cause.

Il "problema essenziale" del metodo sperimentale

"Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche.

Immaginate che io giochi a écarté con un signore che io reputi perfettamente onesto. Qual'è la probabilità che estragga un Re? E' $1/8$. Questa è un problema di probabilità degli effetti.

Immaginate che io giochi con un signore che non conosco. Lui ha estratto una carta dieci volte e per sei volte gli è venuto un Re. Qual'è la probabilità che sia un baro? Questo è un problema di probabilità delle cause. Si può dire che questo sia il problema essenziale del metodo sperimentale."

(H. Poincaré – *Scienza e Ipotesi*)

Il "problema essenziale" del metodo sperimentale

"Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche.

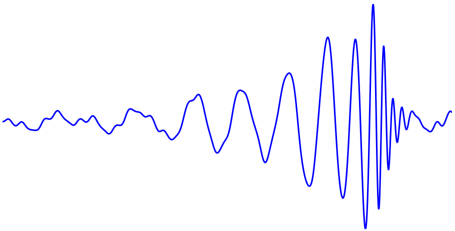
Immaginate che io giochi a écarté con un signore che io reputi perfettamente onesto. Qual'è la probabilità che estragga un Re? E' 1/8. Questa è un problema di probabilità degli effetti.

Immaginate che io giochi con un signore che non conosco. Lui ha estratto una carta dieci volte e per sei volte gli è venuto un Re. Qual'è la probabilità che sia un baro? Questo è un problema di probabilità delle cause. Si può dire che questo sia il problema essenziale del metodo sperimentale."

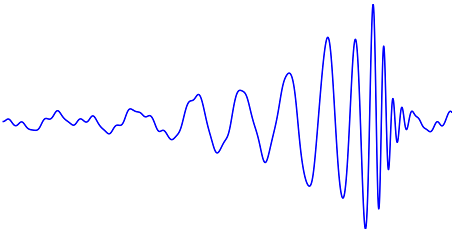
(H. Poincaré – *Scienza e Ipotesi*)

Perché (almeno alla maggior parte di noi) non ci è stato insegnato ad affrontare questo tipo di problemi?

Chi ha fatto questo ‘scarabocchio’?

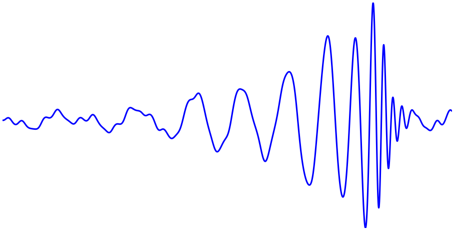


Chi ha fatto questo 'scarabocchio'?

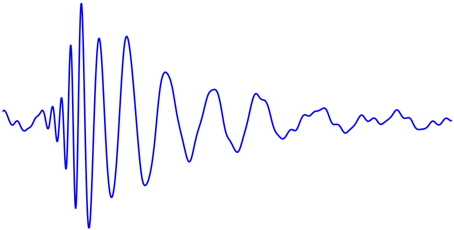


???

Chi ha fatto questo ‘scarabocchio’?

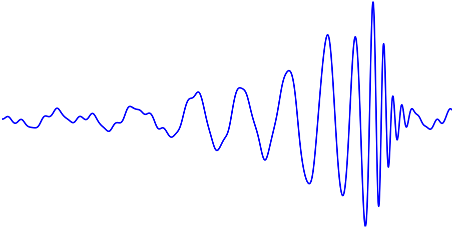


???

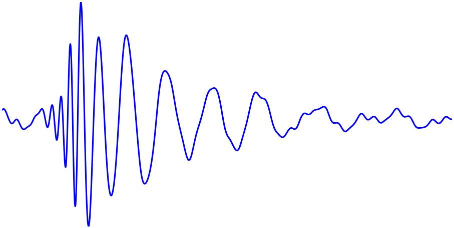


???

Chi ha fatto questo ‘scarabocchio’?



???

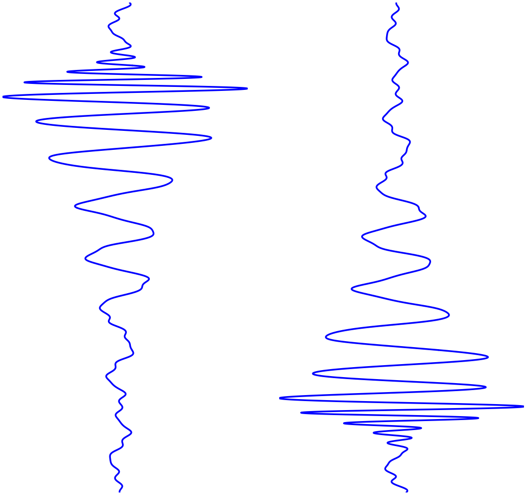


???

- Cardiogramma?
- Firma?
- Suono?
- Sisma?

Cambiamo orientazione

(pura disperazione. . .)



???

Contestualizzazione

Una informazione del genere, priva di dettagli

- con precise indicazione di cosa rappresentano i punti;

Contestualizzazione

Una informazione del genere, priva di dettagli

- con precise indicazione di cosa rappresentano i punti;
- su come è stata ottenuta;

Contestualizzazione

Una informazione del genere, priva di dettagli

- con precise indicazione di cosa rappresentano i punti;
- su come è stata ottenuta;
- con quale strumento;

Contestualizzazione

Una informazione del genere, priva di dettagli

- con precise indicazione di cosa rappresentano i punti;
- su come è stata ottenuta;
- con quale strumento;
- da **chi**;

Contestualizzazione

Una informazione del genere, priva di dettagli

- con precise indicazione di cosa rappresentano i punti;
- su come è stata ottenuta;
- con quale strumento;
- da **chi**;
- etc. etc.

non rappresenta conoscenza scientifica!

Contestualizzazione

Una informazione del genere, priva di dettagli

- con precise indicazione di cosa rappresentano i punti;
- su come è stata ottenuta;
- con quale strumento;
- da **chi**;
- etc. etc.

non rappresenta conoscenza scientifica!

Solo uno *scarabocchio*!

Contestualizzazione

Una informazione del genere, priva di dettagli

- con precise indicazione di cosa rappresentano i punti;
- su come è stata ottenuta;
- con quale strumento;
- da **chi**;
- etc. etc.

non rappresenta conoscenza scientifica!

Solo uno *scarabocchio*!

Diffidate del

Dogma dell'Immacolata Osservazione

Contestualizzazione + informazioni ulteriori

La cosa cambia completamente quando veniamo a sapere che

- viene da un interferometro per onde gravitazionali;

Contestualizzazione + informazioni ulteriori

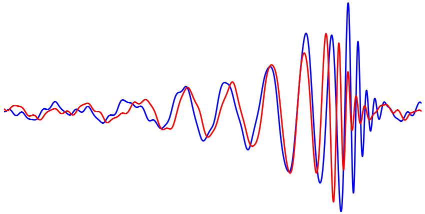
La cosa cambia completamente quando veniamo a sapere che

- viene da un interferometro per onde gravitazionali;
  [**Ottimi microsismografi**!!]

Contestualizzazione + informazioni ulteriori

La cosa cambia completamente quando veniamo a sapere che

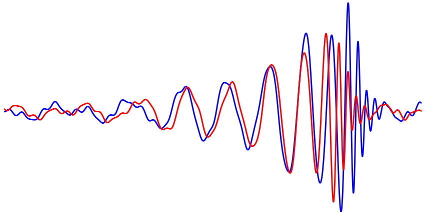
- viene da un interferometro per onde gravitazionali;
  [**Ottimi microsismografi**!!]
- una seconda 'firma', praticamente identica, rivelata pressoché simultaneamente da un altro interferometro a c.a 3000 km di distanza!



Contestualizzazione + informazioni ulteriori

La cosa cambia completamente quando veniamo a sapere che

- viene da un interferometro per onde gravitazionali;
  [**Ottimi microsismografi**!!]
- una seconda 'firma', praticamente identica, rivelata pressoché simultaneamente da un altro interferometro a c.a 3000 km di distanza!

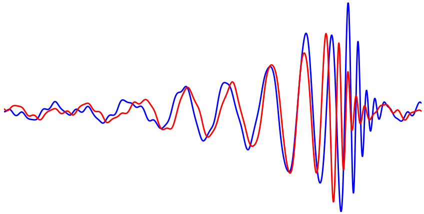


- Il firmatario è 'qualcuno' ben noto agli esperti del settore.

Contestualizzazione + informazioni ulteriori

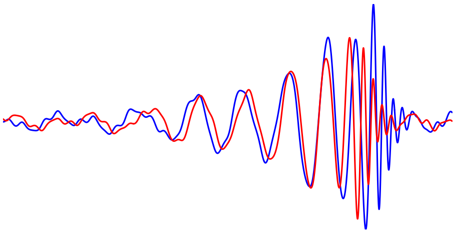
La cosa cambia completamente quando veniamo a sapere che

- viene da un interferometro per onde gravitazionali; [**Ottimi microsismografi**!!]
- una seconda ‘firma’, praticamente identica, rivelata pressoché simultaneamente da un altro interferometro a c.a 3000 km di distanza!



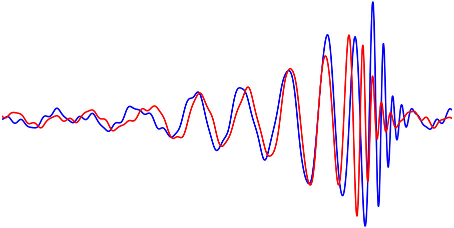
- Il firmatario è ‘qualcuno’ ben noto agli esperti del settore. [Tendiamo a credere a quanto credono coloro nei quali abbiamo fiducia]

Effetto $\rightarrow$ causa



? ? ?

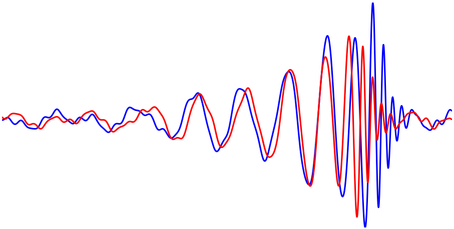
Effetto → causa



? ? ?

- Il ‘firmatario’ atteso?

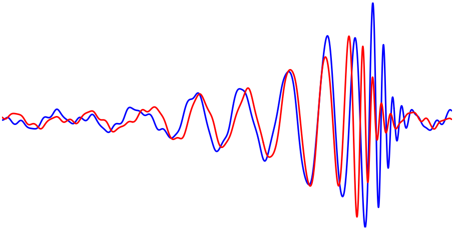
Effetto $\rightarrow$ causa



? ? ?

- Il ‘firmatario’ atteso?
- Microsisma coerente? (a 3000 km?)

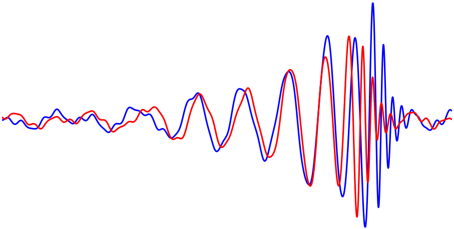
Effetto $\rightarrow$ causa



? ? ?

- Il ‘firmatario’ atteso?
- Microsisma coerente? (a 3000 km?)
- Pura coincidenza fra tremolii locali?

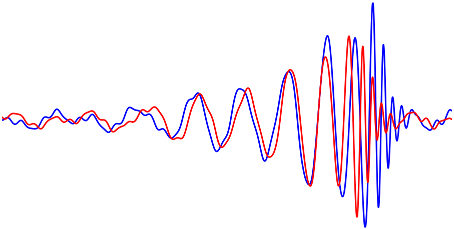
Effetto $\rightarrow$ causa



? ? ?

- Il ‘firmatario’ atteso?
- Microsisma coerente? (a 3000 km?)
- Pura coincidenza fra tremolii locali?
- Una ‘firma’ falsa per controllo?

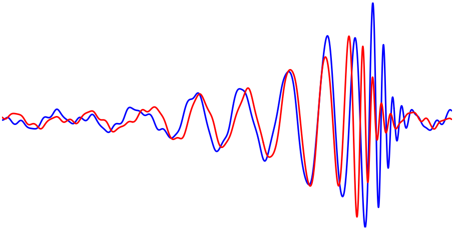
Effetto → causa



? ? ?

- Il ‘firmatario’ atteso?
- Microsisma coerente? (a 3000 km?)
- Pura coincidenza fra tremolii locali?
- Una ‘firma’ falsa per controllo?
- Un ‘sabotaggio’ per screditare la collaborazione?

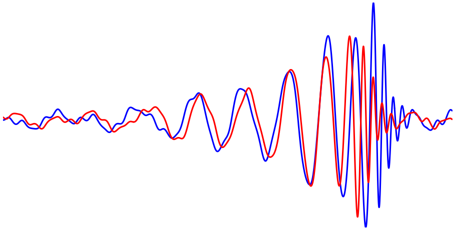
Effetto $\rightarrow$ causa



? ? ?

- Il ‘firmatario’ atteso?
- Microsisma coerente? (a 3000 km?)
- Pura coincidenza fra tremolii locali?
- Una ‘firma’ falsa per controllo?
- Un ‘sabotaggio’ per screditare la collaborazione?
- Una manomissione per favorire il teorico del ‘firmatario’ ?

Effetto → causa



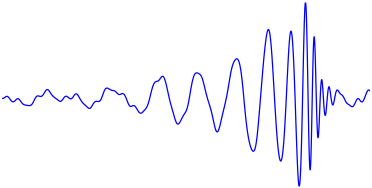
? ? ?

- Il ‘firmatario’ atteso?
- Microsisma coerente? (a 3000 km?)
- Pura coincidenza fra tremolii locali?
- Una ‘firma’ falsa per controllo?
- Un ‘sabotaggio’ per screditare la collaborazione?
- Una manomissione per favorire il teorico del ‘firmatario’?

(Le ultime due cause non sono una amenità!)

Effetto $\rightarrow$ causa

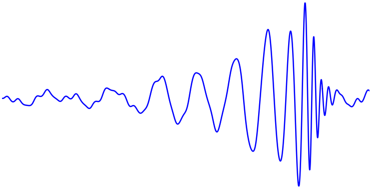
In base a tutte le conoscenze su tutte le cause possibili



$\Rightarrow$ Onde gravitazionali

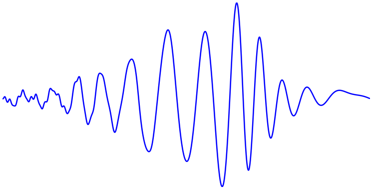
Effetto $\rightarrow$ causa

In base a tutte le conoscenze su tutte le cause possibili



$\Rightarrow$ Onde gravitazionali

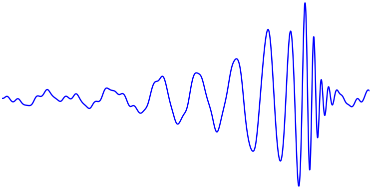
Ma se fosse stato quest'altro 'scarabocchio'



? ? ?

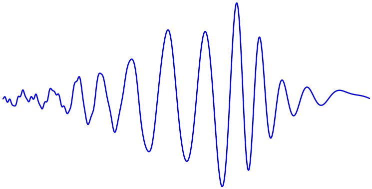
Effetto → causa

In base a tutte le conoscenze su tutte le cause possibili



⇒ Onde gravitazionali

Ma se fosse stato quest'altro 'scarabocchio'



? ? ?

Forse più probabilmente un tremolio casuale. . .

$\{$Effetto $\rightarrow$ causa$\}$ $\rightarrow$ 'concause' $\rightarrow$ corroborazione

Le nostre credenze sono rafforzate dal fatto che dalla forma del segnale si possono estrarre un certo numero di parametri sul ‘firmatario’ (masse, distanza da noi, e altro).

$\{$Effetto $\rightarrow$ causa$\}$ $\rightarrow$ 'concause' $\rightarrow$ corroborazione

Le nostre credenze sono rafforzate dal fatto che dalla forma del segnale si possono estrarre un certo numero di parametri sul 'firmatario' (masse, distanza da noi, e altro).

$\Rightarrow$ Un numero di parametri impressionante

$\{$Effetto $\rightarrow$ causa$\}$ $\rightarrow$ 'concause' $\rightarrow$ corroborazione

Le nostre credenze sono rafforzate dal fatto che dalla forma del segnale si possono estrarre un certo numero di parametri sul ‘firmatario’ (masse, distanza da noi, e altro).

$\Rightarrow$ Un numero di parametri impressionante anche se con inevitabili incertezze

{Effetto → causa} → 'concause' → corroborazione

Le nostre credenze sono rafforzate dal fatto che dalla forma del segnale si possono estrarre un certo numero di parametri sul ‘firmatario’ (masse, distanza da noi, e altro).

⇒ Un numero di parametri impressionante anche se con inevitabili incertezze

...la cui ragionevolezza rafforza la nostra credenza nel fenomeno ipotizzato

$\{$Effetto $\rightarrow$ causa$\}$ $\rightarrow$ 'concause' $\rightarrow$ corroborazione

Le nostre credenze sono rafforzate dal fatto che dalla forma del segnale si possono estrarre un certo numero di parametri sul ‘firmatario’ (masse, distanza da noi, e altro).

$\Rightarrow$ Un numero di parametri impressionante anche se con inevitabili incertezze

…la cui ragionevolezza rafforza la nostra credenza nel fenomeno ipotizzato

Notare il *filo logico*:

- **Non** possiamo dire di aver osservato onde gravitazionali, e poi cerchiamo il fenomeno che le ha prodotte.

$\{$Effetto $\rightarrow$ causa$\}$ $\rightarrow$ 'concause' $\rightarrow$ corroborazione

Le nostre credenze sono rafforzate dal fatto che dalla forma del segnale si possono estrarre un certo numero di parametri sul 'firmatario' (masse, distanza da noi, e altro).

$\Rightarrow$ Un numero di parametri impressionante anche se con inevitabili incertezze

. . . la cui ragionevolezza rafforza la nostra credenza nel fenomeno ipotizzato

Notare il *filo logico*:

- **Non** possiamo dire di aver osservato onde gravitazionali, e poi cerchiamo il fenomeno che le ha prodotte.

  Al contrario, **crediamo che siano onde gravitazionali** per la consistenza complessiva dello scenario.

{Effetto → causa} → 'concause' → corroborazione

Le nostre credenze sono rafforzate dal fatto che dalla forma del segnale si possono estrarre un certo numero di parametri sul 'firmatario' (masse, distanza da noi, e altro).

⇒ Un numero di parametri impressionante anche se con inevitabili incertezze

. . . la cui ragionevolezza rafforza la nostra credenza nel fenomeno ipotizzato

Notare il *filo logico*:

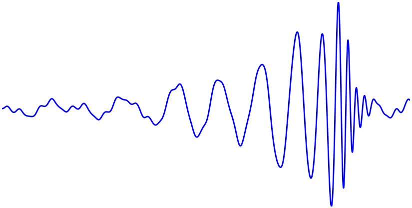
- **Non** possiamo dire di aver osservato onde gravitazionali, e poi cerchiamo il fenomeno che le ha prodotte.

  Al contrario, **crediamo che siano onde gravitazionali** per la consistenza complessiva dello scenario.

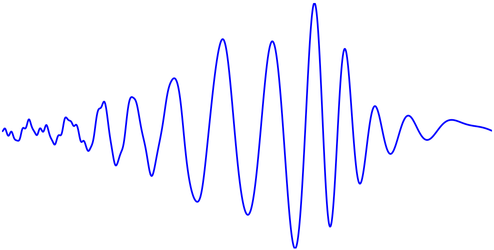
[Alla faccia delle 'sigma'. . .]

In cosa differiscono questi “scarabocchi”?

A)

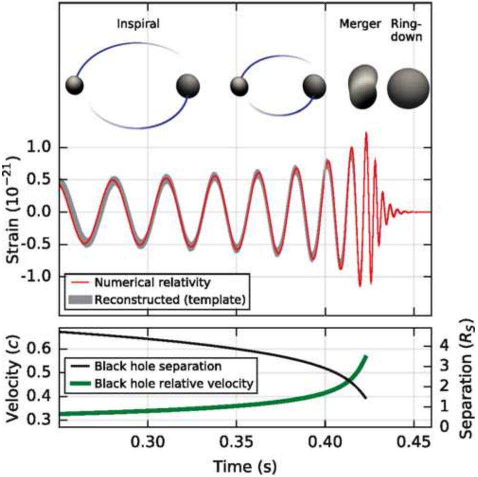


B)



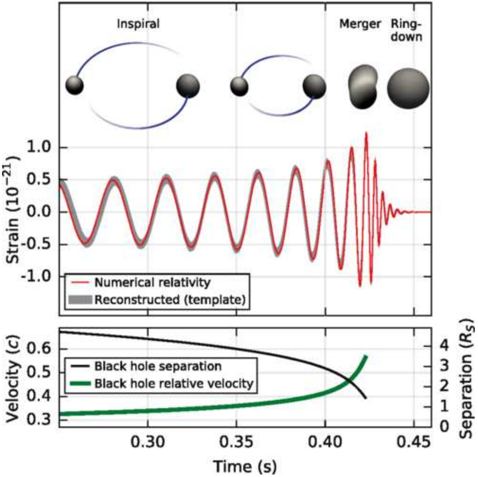
In cosa differiscono gli “scarabocchi”?

A)



In cosa differiscono gli “scarabocchi”?

A)



B)

NIENTE (almeno al momento. . .)

Dallo spazio cosmico ai problemi dei mortali

Un esempio facilmente comprensibile:

- due cause;
- due effetti;

Dallo spazio cosmico ai problemi dei mortali

Un esempio facilmente comprensibile:

- due cause;
- due effetti;
- diagnostica medica:
  - è più facile avere delle intuizioni

Dallo spazio cosmico ai problemi dei mortali

Un esempio facilmente comprensibile:

- due cause;
- due effetti;
- diagnostica medica:
  - è più facile avere delle intuizioni
  - . . . anche se qualcuno può avere intuizioni fallaci

Dallo spazio cosmico ai problemi dei mortali

Un esempio facilmente comprensibile:

- due cause;
- due effetti;
- diagnostica medica:
  - è più facile avere delle intuizioni
  - ... anche se qualcuno può avere intuizioni fallaci
    $\Rightarrow$ una guida formale fa evitare errori
    - $\Rightarrow$ **logica dell'incerto** (teoria delle probabilità)

Test dell'AIDS

Italiano scelto a caso viene sottoposto al test dell'AIDS.
Test non perfetto, come succede in pratica.

Modello semplificato:

$$\begin{aligned} P(\text{Pos}\,|\,\text{HIV}) &= 100\% \\ P(\text{Pos}\,|\,\overline{\text{HIV}}) &= 0.2\% \\ P(\text{Neg}\,|\,\overline{\text{HIV}}) &= 99.8\% \end{aligned}$$

H_1='HIV' (Infetto) $\qquad E_1 =$ Positivo

H_2='$\overline{\text{HIV}}$' (Non infetto) $\qquad E_2 =$ Negativo

Test dell'AIDS

Italiano scelto a caso viene sottoposto al test dell'AIDS.
Test non perfetto, come succede in pratica.

Modello semplificato:

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV}) &= 100\% \\
P(\mathrm{Pos}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}}) &= 0.2\% \\
P(\mathrm{Neg}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}}) &= 99.8\%
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H_1 = \text{'HIV' (Infetto)} \arrow[r] & E_1 = \text{Positivo} \\
H_2 = \text{'}\overline{\text{HIV}}\text{' (Non infetto)} \arrow[r] \arrow[ur] & E_2 = \text{Negativo}
\end{tikzcd}
$$

Test dell'AIDS

Italiano scelto <u>a caso</u> viene sottoposto al test dell'AIDS.
Test non perfetto, come succede in pratica.

Modello semplificato:

$$
\begin{aligned}
P(\text{Pos} \,|\, \text{HIV}) &= 100\% \\
\color{red}{P(\text{Pos} \,|\, \overline{\text{HIV}})} &\color{red}{= 0.2\%} \\
\color{blue}{P(\text{Neg} \,|\, \overline{\text{HIV}})} &\color{blue}{= 99.8\%}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H_1 = \text{'HIV' (Infetto)} \arrow[r] & E_1 = \text{Positivo} \\
H_2 = \text{'}\overline{\text{HIV}}\text{' (Non infetto)} \arrow[r, blue] \arrow[ur, red] & E_2 = \text{Negativo}
\end{tikzcd}
$$

Risultato: $\Rightarrow$ <u>Positivo</u>

Test dell'AIDS

Italiano scelto a caso viene sottoposto al test dell'AIDS.
Test non perfetto, come succede in pratica.

Modello semplificato:

$$
\begin{aligned}
P(\text{Pos} \,|\, \text{HIV}) &= 100\% \\
P(\text{Pos} \,|\, \overline{\text{HIV}}) &= 0.2\% \\
P(\text{Neg} \,|\, \overline{\text{HIV}}) &= 99.8\%
\end{aligned}
$$

? H_1='HIV' (Infetto) ← E_1 = Positivo

? H_2='$\overline{\text{HIV}}$' (Non infetto) ← E_1

E_2 = Negativo

Risultato: $\Rightarrow$ Positivo

Infetto o Non infetto?

Cosa ne concludiamo?

Data $P(\text{Pos} \,|\, \overline{\text{HIV}}) = 0.2\%$ e avendo osservato ‘Positivo’, possiamo affermare:

- ”Praticamente impossibile che la persona sia infetta, in quanto era ‘praticamente impossibile’ che chi non ha il virus risulti positivo”?

Cosa ne concludiamo?

Data $P(\text{Pos} \,|\, \overline{\text{HIV}}) = 0.2\%$ e avendo osservato 'Positivo', possiamo affermare:

- "Praticamente impossibile che la persona sia infetta, in quanto era 'praticamente impossibile' che chi non ha il virus risulti positivo"
- "C'è solo lo 0.2% di probabilità che la persona non abbia l'HIV"?

Cosa ne concludiamo?

Data $P(\mathrm{Pos}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}}) = 0.2\%$ e avendo osservato 'Positivo', possiamo affermare:

- "Praticamente impossibile che la persona sia infetta, in quanto era 'praticamente impossibile' che chi non ha il virus risulti positivo"
- "C'è solo lo 0.2% di probabilità che la persona non abbia l'HIV"
- "Siamo confidenti al 99.8% che la persona sia infetta"?

Cosa ne concludiamo?

Data $P(\text{Pos}\,|\,\overline{\text{HIV}}) = 0.2\%$ e avendo osservato 'Positivo', possiamo affermare:

- "Praticamente impossibile che la persona sia infetta,
  in quanto era 'praticamente impossibile' che chi non ha il virus risulti positivo"
- "C'è solo lo 0.2% di probabilità che la persona non abbia l'HIV"
- "Siamo confidenti al 99.8% che la persona sia infetta"
- "l'ipotesi H_1=Non_HIV è scartata al 99.8% C.L."

?

Cosa ne concludiamo?

Data $P(\text{Pos}\,|\,\overline{\text{HIV}}) = 0.2\%$ e avendo osservato 'Positivo', possiamo affermare:

- "Praticamente impossibile che la persona sia infetta, in quanto era 'praticamente impossibile' che chi non ha il virus risulti positivo"
- "C'è solo lo 0.2% di probabilità che la persona non abbia l'HIV"
- "Siamo confidenti al 99.8% che la persona sia infetta"
- "L'ipotesi H_1=Non_HIV è scartata al 99.8% C.L."

? NO

Invece, $P(\text{HIV}\,|\,\text{Pos, italiano a caso}) \approx 45\%$

(Lo lasciamo come esercizio – per la cui soluzione manca un dato! – con soluzione in fondo.)

Cosa ne concludiamo?

Data $P(\text{Pos} \,|\, \overline{\text{HIV}}) = 0.2\%$ e avendo osservato 'Positivo', possiamo affermare:

- ~~"Praticamente impossibile che la persona sia infetta, in quanto era 'praticamente impossibile' che chi non ha il virus risulti positivo"~~
- ~~"C'è solo lo 0.2% di probabilità che la persona non abbia l'HIV"~~
- ~~"Siamo confidenti al 99.8% che la persona sia infetta"~~
- ~~"l'ipotesi H_1=Non_HIV è scartata al 99.8% C.L."~~

? NO

Invece, $P(\text{HIV} \,|\, \text{Pos, italiano a caso}) \approx 45\%$

$\Rightarrow$ Errore serio! (non banalmente 99.8% invece di 98.3%)

Cosa ne concludiamo?

Data $P(\text{Pos} \,|\, \overline{\text{HIV}}) = 0.2\%$ e avendo osservato 'Positivo', possiamo affermare:

- ~~"Praticamente impossibile che la persona sia infetta, in quanto era 'praticamente impossibile' che chi non ha il virus risulti positivo"~~
- ~~"C'è solo lo 0.2% di probabilità che la persona non abbia l'HIV"~~
- ~~"Siamo confidenti al 99.8% che la persona sia infetta"~~
- ~~"l'ipotesi H_1=Non_HIV è scartata al 99.8% C.L."~~

? NO

Invece, $P(\text{HIV} \,|\, \text{Pos, italiano a caso}) \approx 45\%$

$\Rightarrow$ Errore serio! (non banalmente 99.8% invece di 98.3%)

... da cui possono scaturire decisioni errate!

$P(A \mid B) \leftrightarrow P(B \mid A)$

Attenzione al 'ribaltamento' arbitrario delle probabilità condizionate:

$$\text{In generale } P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$$

$P(A \mid B) \leftrightarrow P(B \mid A)$

Attenzione al ‘ribaltamento’ arbitrario delle probabilità condizionate:

In generale $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$

- $P(\text{Positivo} \mid \overline{HIV}) \neq P(\overline{HIV} \mid \text{Positivo})$

$P(A \,|\, B) \leftrightarrow P(B \,|\, A)$

Attenzione al 'ribaltamento' arbitrario delle probabilità condizionate:

In generale $P(A \,|\, B) \neq P(B \,|\, A)$

- $P(\text{Positivo} \,|\, \overline{HIV}) \neq P(\overline{HIV} \,|\, \text{Positivo})$
- $P(\text{Vincere} \,|\, \text{Giocare}) \neq P(\text{Giocare} \,|\, \text{Vincere})$ [es. Lotto]

$P(A \mid B) \leftrightarrow P(B \mid A)$

Attenzione al 'ribaltamento' arbitrario delle probabilità condizionate:

$$\text{In generale } P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$$

- $P(\text{Positivo} \mid \overline{HIV}) \neq P(\overline{HIV} \mid \text{Positivo})$
- $P(\text{Vincere} \mid \text{Giocare}) \neq P(\text{Giocare} \mid \text{Vincere})$ [es. Lotto]
- $P(\text{Pregnant} \mid \text{Woman}) \neq P(\text{Woman} \mid \text{Pregnant})$

$P(A \mid B) \leftrightarrow P(B \mid A)$

Attenzione al ‘ribaltamento’ arbitrario delle probabilità condizionate:

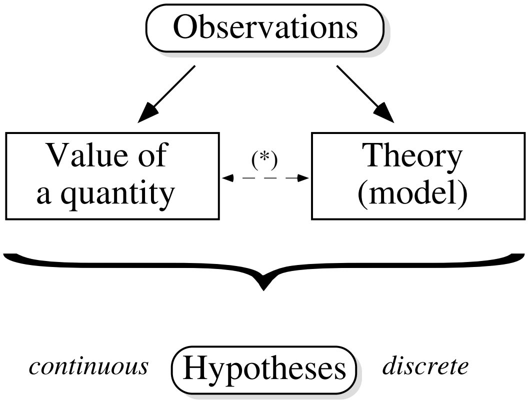
In generale $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$

- $P(\text{Positivo} \mid \overline{HIV}) \neq P(\overline{HIV} \mid \text{Positivo})$
- $P(\text{Vincere} \mid \text{Giocare}) \neq P(\text{Giocare} \mid \text{Vincere})$ [es. Lotto]
- $P(\text{Pregnant} \mid \text{Woman}) \neq P(\text{Woman} \mid \text{Pregnant})$

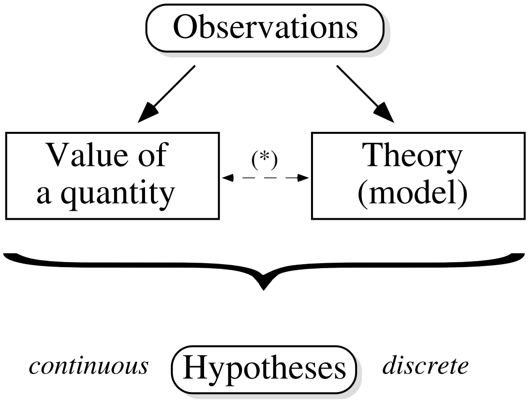
In particolare

- Una causa può produrre un certo effetto con bassissima probabilità, pur essendo tale causa la più probabile fra quelle che possono aver prodotto tale effetto, e talvolta la sola causa possibile!

Learning from data

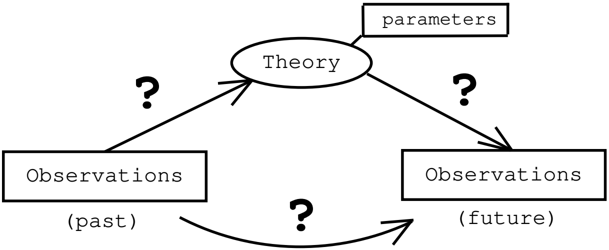


Learning from data



(*) A quantity might be meaningful only within a theory/model

From past to future



Our task:

- Describe/understand the 'physical world'

  $\Rightarrow$ inference of laws ('models') and their parameters $[\Theta]$

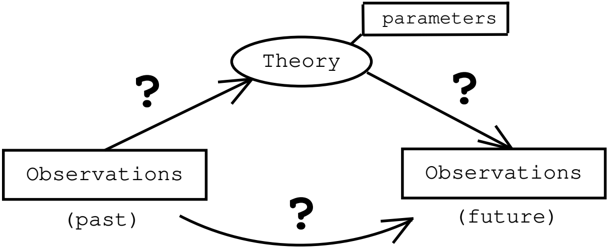
  $\Rightarrow$ $[\Theta \,|\, X_{past}]$

- Predict observations $[X]$

  $\Rightarrow$ forecasting

  $\Rightarrow$ $[X_{future} \,|\, \Theta] \quad \rightarrow \quad [X_{future} \,|\, X_{past}]$

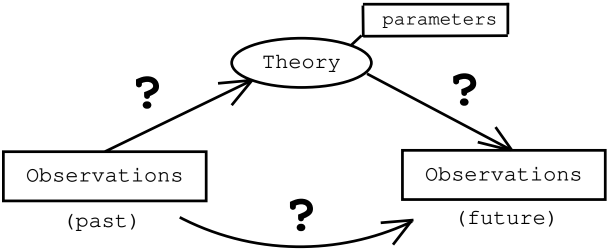
From past to future



Process

- neither automatic
- nor purely contemplative
  - $\rightarrow$ 'scientific method'
  - $\rightarrow$ planned experiments ('actions') $\Rightarrow$ decision.

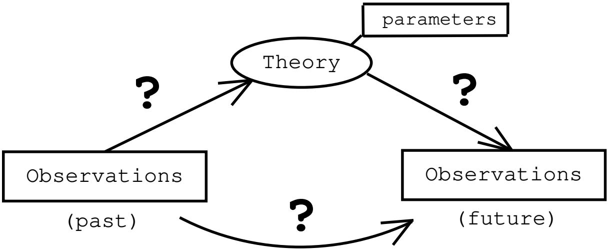
From past to future



$\Rightarrow$ The role of theories/models

- a theory and its parameters are the 'distillate' of all our knowledge about the 'universe' of interest;
- empirical analogical thinking is <u>in most cases not usable</u>:
  - A theory can predict effects never observed before
  - Example: shooting a bullet

From past to future



⇒ The role of theories/models

- a theory and its parameters are the 'distillate' of all our knowledge about the 'universe' of interest;
- empirical analogical thinking is <u>in most cases not usable</u>:

"La cognizione d'un solo effetto acquistata per le sue cause ci apre l'intelletto a 'ntendere ed assicurarci d'altri effetti senza bisogno di ricorrere alle esperienze" (Galileo)

Model thinking

"The scientific method is based on repeated experiments"
(or some like that)

Model thinking

"The scientific method is based on repeated experiments"
(or some like that)

- Are then astrophysics, cosmology etc. Science?

Model thinking

"The scientific method is based on repeated experiments"
(or some like that)

- Are then astrophysics, cosmology etc. Science?
- Who told so?

Model thinking

"The scientific method is based on repeated experiments"
(or some like that)

- Are then astrophysics, cosmology etc. Science?
- Who told so?
  … Galileo…

Model thinking

"The scientific method is based on repeated experiments"
(or some like that)

- Are then astrophysics, cosmology etc. Science?
- Who told so?
  ... Galileo...
  "The knowledge of a single effect acquired by its causes open our mind to understand and ensure us of other effects without the need of making experiments"
  (Galileo)

Model thinking

"The scientific method is based on repeated experiments"
(or some like that)

- Are then astrophysics, cosmology etc. Science?
- Who told so?
  ... Galileo...
  "The knowledge of a single effect acquired by its causes open our mind to understand and ensure us of other effects without the need of making experiments"
  (Galileo)

What really matters is to have a Model which links parameters to observations

Model thinking

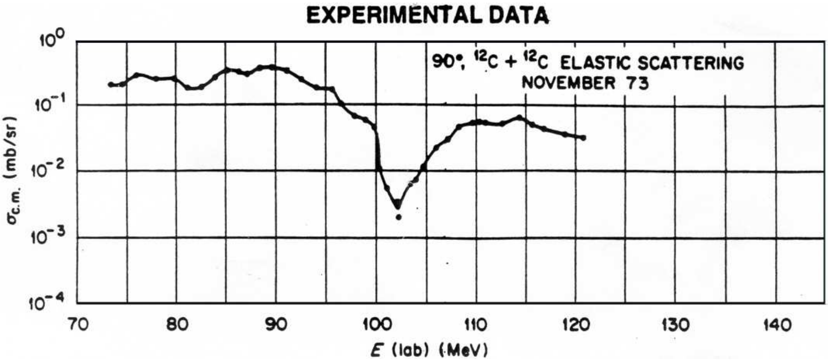
"The scientific method is based on repeated experiments"
(or some like that)

- Are then astrophysics, cosmology etc. Science?
- Who told so?
  … Galileo…
  "The knowledge of a single effect acquired by its causes open our mind to understand and ensure us of other effects without the need of making experiments"
  (Galileo)

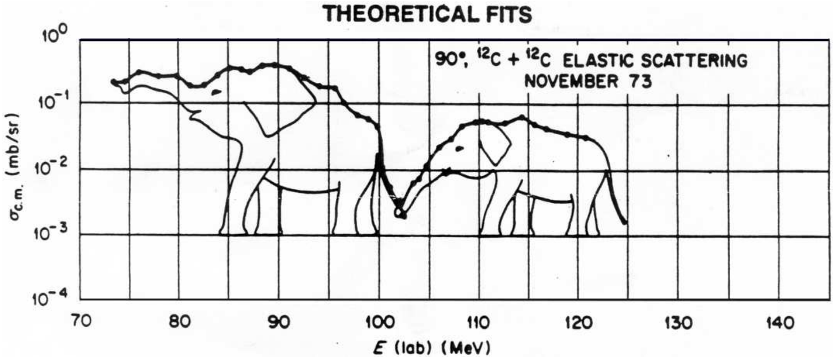
What really matters is to have a Model which links parameters to observations

But remind that "all models are wrong, some are useful"...

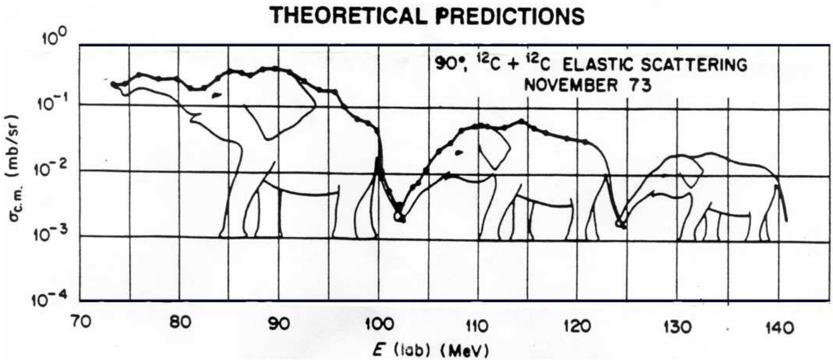
Inferential-predictive process



Inferential-predictive process

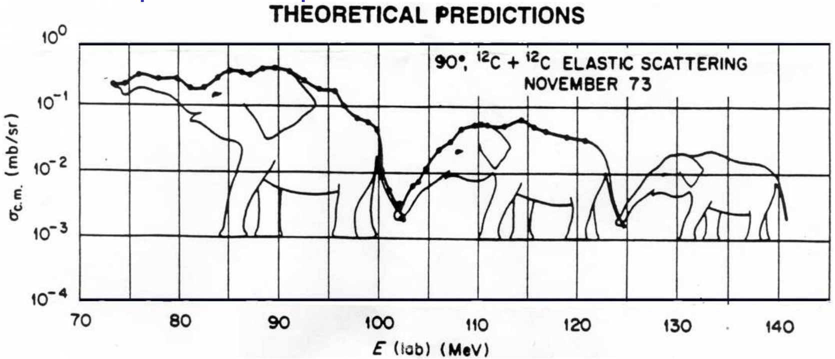


Inferential-predictive process



(S. Raman, *Science with a smile*)

Inferential-predictive process



(S. Raman, *Science with a smile*)

Even if the (*ad hoc*) model fits perfectly the data,
we do not believe the predictions
because we don't trust the model!

[Many 'good' models are *ad hoc* models!]

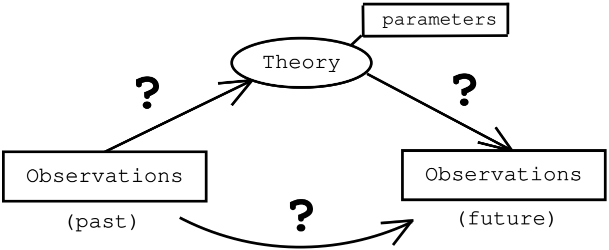
2011 IgNobel prize in Mathematics

- D. Martin of USA (who predicted the world would end in 1954)
- P. Robertson of USA (who predicted the world would end in 1982)
- E. Clare Prophet of the USA (who predicted the world would end in 1990)
- L.J. Rim of KOREA (who predicted the world would end in 1992)
- C. Mwerinde of UGANDA (who predicted the world would end in 1999)
- H. Camping of the USA (who predicted the world would end on September 6, 1994 and later predicted that the world will end on October 21, 2011)

2011 IgNobel prize in Mathematics

"For teaching the world to be careful when making mathematical assumptions and calculations"

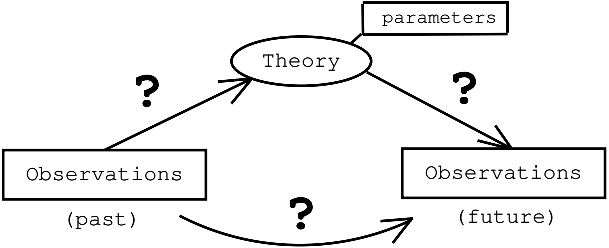
Uncertainty



⇒ Uncertainty:

1. Given the past observations, in general we are not sure about the parameters of the model (and/or the model itself)
2. Even if we were sure about theory and parameters, there could be internal ("noise", variables out of our control) or external effects (initial/boundary conditions, 'errors', etc) that make the forecasting uncertain.

Uncertainty

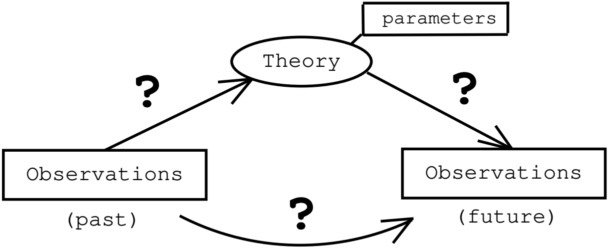


⇒ Uncertainty:

- No certainties, only probabilities

- $P(\Theta \,|\, X_{past})$
- $P(X_{future} \,|\, \Theta)$
- $P(X_{future} \,|\, X_{past})$

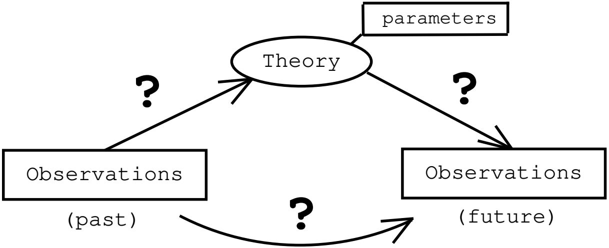
Deep source of uncertainty



Uncertainty:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Theory} & \text{— } {\color{red}?} \longrightarrow & \text{Future observations} \\
\text{Past observations} & \text{— } {\color{red}?} \longrightarrow & \text{Theory} \\
\text{Theory} & \text{— } {\color{red}?} \longrightarrow & \text{Future observations}
\end{array}
$$

Deep source of uncertainty



Uncertainty:

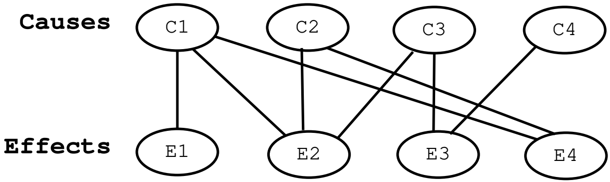
Theory	— **?** ⟶	Future observations
Past observations	— **?** ⟶	Theory
Theory	— **?** ⟶	Future observations

$\Longrightarrow$ **Uncertainty about causal connections**

CAUSE $\Longleftrightarrow$ **EFFECT**

Causes → effects

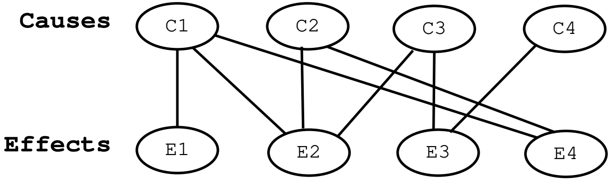
The same *apparent* cause might produce several,different effects



Given an observed effect, we are not sure about the exact cause that has produced it.

Causes $\rightarrow$ effects

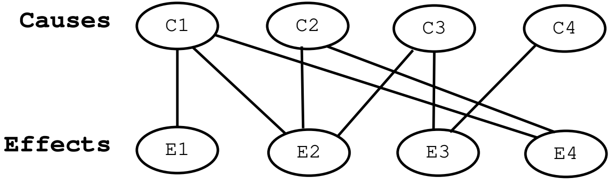
The same *apparent* cause might produce several,different effects



Given an observed effect, we are not sure about the exact cause that has produced it.

Causes $\rightarrow$ effects

The same *apparent* cause might produce several,different effects



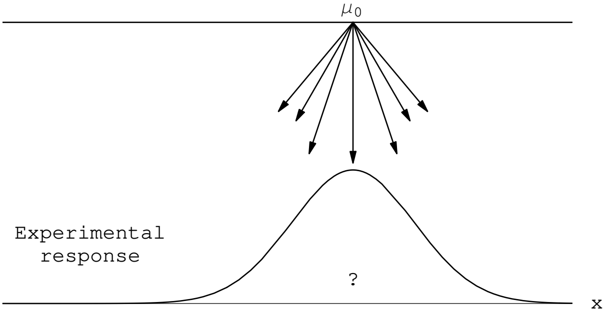
Given an observed effect, we are not sure about the exact cause that has produced it.

$$\mathbf{E_2} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_3\}?$$

→ Probability of causes

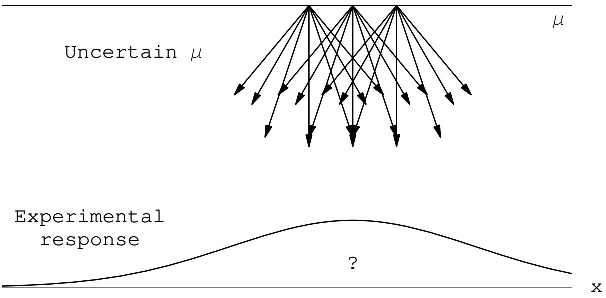
"the essential problem of the experimental method"

From ‘true value’ to observations



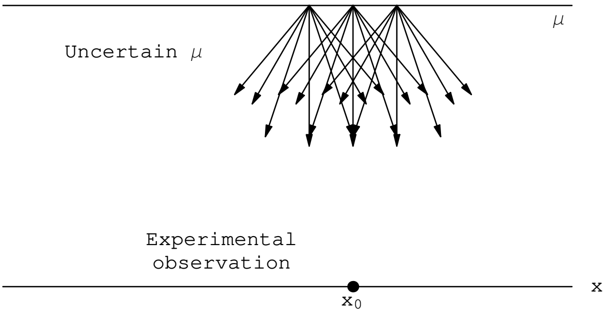
Given μ (exactly known) we are uncertain about x

From ‘true value’ to observations



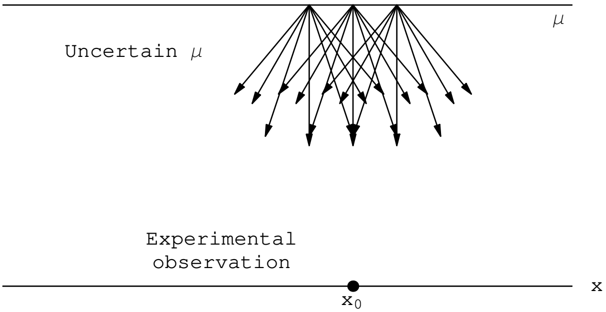
Uncertainty about μ makes us more uncertain about x

. . . and back: Inferring a true value



The observed data is <u>certain</u>: $\rightarrow$ 'true value' uncertain.

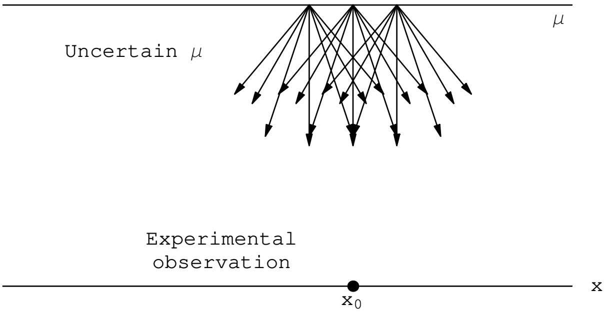
. . . and back: Inferring a true value



The observed data is <u>certain</u>: $\rightarrow$ ‘true value’ uncertain.

“data uncertainty” ?

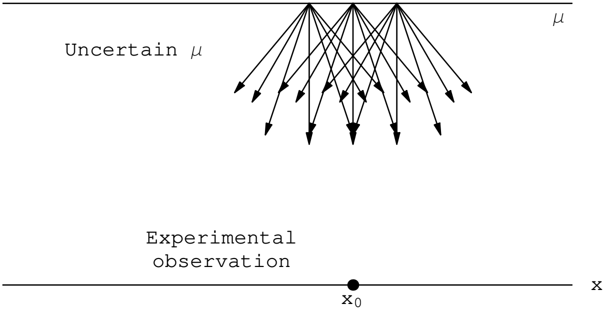
. . . and back: Inferring a true value



The observed data is <u>certain</u>: $\rightarrow$ 'true value' uncertain.

"data uncertainty" ? Data corrupted?

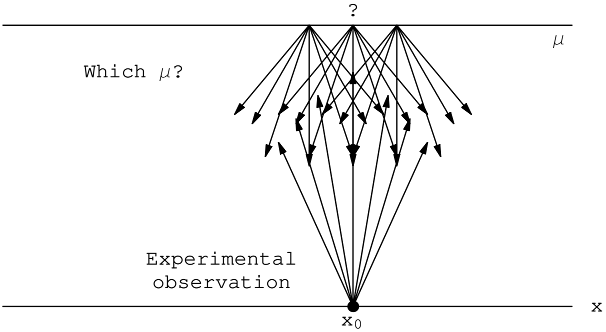
... and back: Inferring a true value



The observed data is certain: $\rightarrow$ 'true value' uncertain.

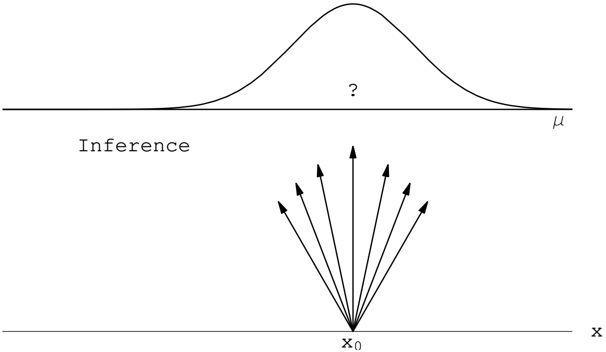
"data uncertainty" ? Data corrupted?
Even if the data were corrupted, the data were the corrupted data**!!** ...

...and back: Inferring a true value



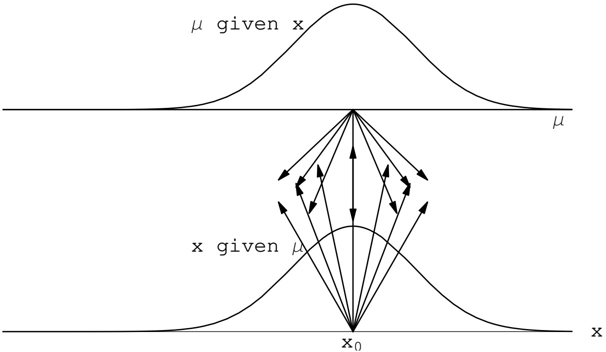
Where does the observed value of x comes from?

. . . and back: Inferring a true value



We are now uncertain about μ, given x.

. . . and back: Inferring a true value



Note the symmetry in reasoning.

Un ‘esperimento’ molto semplice

Facciamo un esperimento

Un ‘esperimento’ molto semplice

Facciamo un esperimento

- Qui
- Ora

Un 'esperimento' molto semplice

Facciamo un esperimento

- Qui
- Ora

Per semplicità

- Solo sei ipotesi possibili ($\leftrightarrow$ "possibili valori della grandezza fisica"):

$$\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{5}$$

- Solo due effetti ("possibili valori della lettura"):

$$\mathbf{0}, \mathbf{1}$$

[(1, 2); Bianco/Nero; Sì/No; ...]

Un 'esperimento' molto semplice

Facciamo un esperimento

- Qui
- Ora

Per semplicità

- Solo sei ipotesi possibili ($\leftrightarrow$ "possibili valori della grandezza fisica"):

$$\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{5}$$

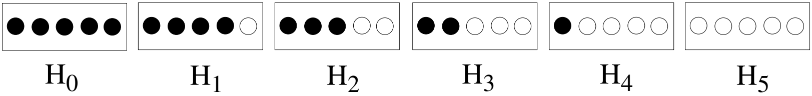
- Solo due effetti ("possibili valori della lettura"):

$$\mathbf{0}, \mathbf{1}$$

$$[\,(1,2);\ \text{Bianco/Nero};\ \text{Sì/No};\ \ldots\,]$$

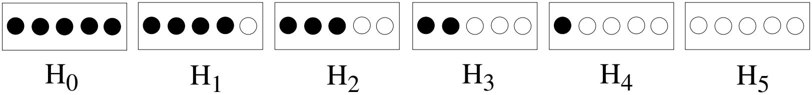
$\Rightarrow$ Poi si potrà passare (almeno virtualmente) a una continuità di ipotesi possibili e di osservazioni possibili, ma concettualmente abbiamo già tutti gli ingredienti.

Quale scatola? Quale pallina?



Scegliamo una scatola a caso.

Quale scatola? Quale pallina?



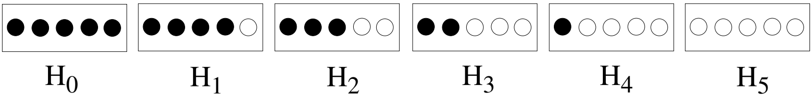
Scegliamo una scatola a caso.

Siamo in stato di incertezza su

(a) Quale scatola abbiamo preso, H_0, H_1, ..., H_5?

(b) Se estraiamo a caso una pallina dalla scatola osserveremo Bianco o Nero?

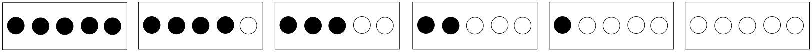
Quale scatola? Quale pallina?



Scegliamo una scatola a caso.

- Cosa succede dopo aver estratto una pallina, averne osservato il colore e averla reinserita nella scatola?
  - Intuitivamente possiamo farci delle idee *su come cambiare* le probabilità
    - della scatola, (vista come causa degli effetti osservati);
    - del risultato di estrazioni future (effetti).

Quale scatola? Quale pallina?

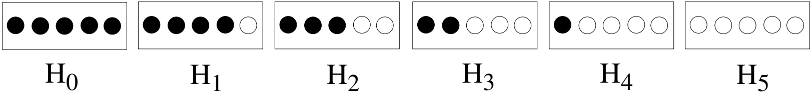


H_0 H_1 H_2 H_3 H_4 H_5

Scegliamo una scatola a caso.

- Cosa succede dopo aver estratto una pallina, averne osservato il colore e averla reinserita nella scatola?
  - Intuitivamente possiamo farci delle idee *su come cambiare* le probabilità
    - della scatola, (vista come causa degli effetti osservati);
    - del risultato di estrazioni future (effetti).
  - Siamo in grado di farlo *quantitativamente*, in 'modo oggettivo'?

Quale scatola? Quale pallina?



Scegliamo una scatola a caso.

- Cosa succede dopo aver estratto una pallina, averne osservato il colore e averla reinserita nella scatola?
  - Intuitivamente possiamo farci delle idee *su come cambiare* le probabilità
    - della scatola, (vista come causa degli effetti osservati);
    - del risultato di estrazioni future (effetti).
  - Siamo in grado di farlo *quantitativamente*, in 'modo oggettivo'?
- E dopo una sequenza di estrazioni? (ad es. NNNNN).

Un esperimento “giocattolo” istruttivo

Lo scopo dell’esperimento è quello di indovinare il contenuto della scatola (le possibili cause) senza poterci guardare dentro, soltanto osservandone gli effetti prodotti

Un esperimento "giocattolo" istruttivo

Lo scopo dell'esperimento è quello di indovinare il contenuto della scatola (le possibili cause) senza poterci guardare dentro, soltanto osservandone gli effetti prodotti

Questo Toy Experiment è concettualmente molto vicino a quello che facciamo nelle scienze pure e applicate

$\Rightarrow$ cercare di inferire quello che non vediamo (carica dell'elettrone, massa di un buco nero, etc.)

. . . da quello che è (in qualche modo) accessibile ai nostri sensi.

Un esperimento "giocattolo" istruttivo

Lo scopo dell'esperimento è quello di indovinare il contenuto della scatola (le possibili cause) senza poterci guardare dentro, soltanto osservandone gli effetti prodotti

Questo Toy Experiment è concettualmente molto vicino a quello che facciamo nelle scienze pure e applicate

⇒ cercare di inferire quello che non vediamo (carica dell'elettrone, massa di un buco nero, etc.)

  ... da quello che è (in qualche modo) accessibile ai nostri sensi.

La regola del gioco è che non ci sarà consentito guardare dentro la scatola! (Esattamente come non possiamo "aprire un elettrone" e 'leggerne' le proprietà in una targhetta posta al suo interno)

Dov'è la probabilità?

Siamo tutti d'accordo che il risultato sperimentale cambia

- la probabilità della composizione della scatola;
- la probabilità degli eventi futuri,

Dov'è la probabilità?

Siamo tutti d'accordo che il risultato sperimentale cambia

- la probabilità della composizione della scatola;
- la probabilità degli eventi futuri,

sebbene la composizione della scatola rimanga immutata (estrazioni seguite da 'reintroduzione').

Dov'è la probabilità?

Siamo tutti d'accordo che il risultato sperimentale cambia

- la probabilità della composizione della scatola;
- la probabilità degli eventi futuri,

sebbene la composizione della scatola rimanga immutata (estrazioni seguite da 'reintroduzione').

Dov'è la probabilità ?

Dov'è la probabilità?

Siamo tutti d'accordo che il risultato sperimentale cambia

- la probabilità della composizione della scatola;
- la probabilità degli eventi futuri,

sebbene la composizione della scatola rimanga immutata (estrazioni seguite da 'reintroduzione').

Dov'è la probabilità ?

Certamente non *nella* scatola!

Natura soggettiva della probabilità

“Poiché la conoscenza può essere diversa in diverse persone

Natura soggettiva della probabilità

“Poiché la conoscenza può essere diversa in diverse persone o nella stessa persona a tempi diversi,

Natura soggettiva della probabilità

"Poiché la conoscenza può essere diversa in diverse persone o nella stessa persona a tempi diversi, essi possono prevedere lo stesso evento con più o meno confidenza,

Natura soggettiva della probabilità

"Poiché la conoscenza può essere diversa in diverse persone o nella stessa persona a tempi diversi, essi possono prevedere lo stesso evento con più o meno confidenza, e così diversi valori di probabilità possono essere assegnati allo stesso evento"

Natura soggettiva della probabilità

"Poiché la conoscenza può essere diversa in diverse persone o nella stessa persona a tempi diversi, essi possono prevedere lo stesso evento con più o meno confidenza, e così diversi valori di probabilità possono essere assegnati allo stesso evento"

(Schrödinger, 1947)

Natura soggettiva della probabilità

"Poiché la conoscenza può essere diversa in diverse persone o nella stessa persona a tempi diversi, essi possono prevedere lo stesso evento con più o meno confidenza, e così diversi valori di probabilità possono essere assegnati allo stesso evento"

(Schrödinger, 1947)

La probabilità dipende dallo

stato di informazione del soggetto che la valuta.

La probabilità è sempre condizionata

“Così ogni qualvolta parliamo alla buona di ‘probabilità di un evento’, deve essere sempre interpretato: probabilità rispetto a un certo stato di informazione”

La probabilità è sempre condizionata

"Così ogni qualvolta parliamo alla buona di 'probabilità di un evento', deve essere sempre interpretato: probabilità rispetto a un certo stato di informazione"

(Schrödinger, 1947)

La probabilità è sempre condizionata

"Così ogni qualvolta parliamo alla buona di 'probabilità di un evento', deve essere sempre interpretato: probabilità rispetto a un certo stato di informazione"

(Schrödinger, 1947)

$$P(E) \quad \longrightarrow \quad P(E \,|\, I_s(t))$$

dove $I_s(t)$ sta per l'informazione disponibile al *soggetto* s al tempo t.

La probabilità è sempre condizionata

"Così ogni qualvolta parliamo alla buona di 'probabilità di un evento', deve essere sempre interpretato: probabilità rispetto a un certo stato di informazione"

(Schrödinger, 1947)

$$P(E) \quad \longrightarrow \quad P(E \,|\, I_s(t))$$

dove $I_s(t)$ sta per l'informazione disponibile al *soggetto* s al tempo t.

- Quale faccia del dado?
- I tre cofanetti.

Di cosa stiamo parlando?

"Dato il nostro stato di conoscenza su tutto ciò che concerne l'evento in questione...

Di cosa stiamo parlando?

"Dato il nostro stato di conoscenza su tutto ciò che concerne l'evento in questione. . . il valore numerico di probabilità P di questo evento è un numero reale mediante il quale proviamo in certi casi a stabilire una misura quantitativa della forza della nostra congettura o anticipazione, fondata sulla suddetta conoscenza, che l'evento risulti vero"

(Schrödinger, 1947)

Di cosa stiamo parlando?

"Dato il nostro stato di conoscenza su tutto ciò che concerne l'evento in questione...il valore numerico di probabilità P di questo evento è un numero reale mediante il quale proviamo in certi casi a stabilire una misura quantitativa della forza della nostra congettura o anticipazione, fondata sulla suddetta conoscenza, che l'evento risulti vero"

$\Rightarrow$ Quanto crediamo qualcosa

Di cosa stiamo parlando?

"Dato il nostro stato di conoscenza su tutto ciò che concerne l'evento in questione... il valore numerico di probabilità P di questo evento è un numero reale mediante il quale proviamo in certi casi a stabilire una misura quantitativa della forza della nostra congettura o anticipazione, fondata sulla suddetta conoscenza, che l'evento risulti vero"

$\rightarrow$ 'Grado di fiducia' $\leftarrow$

Come calcolare la probabilità?

Non c'è un solo modo

- Stato di simmetria rispetto alle possibilità (*elementari*)

Come calcolare la probabilità?

Non c'è un solo modo

- Stato di simmetria rispetto alle possibilità (*elementari*)
  (E non necessariamente simmetria del sistema fisico!)

Come calcolare la probabilità?

Non c'è un solo modo

- Stato di simmetria rispetto alle possibilità (*elementari*)
  (E non necessariamente simmetria del sistema fisico!)
- Estensione al futuro di regolarità del passato

Come calcolare la probabilità?

Non c'è un solo modo

- Stato di simmetria rispetto alle possibilità (*elementari*)
  (E non necessariamente simmetria del sistema fisico!)
- Estensione al futuro di regolarità del passato
  (Con tutti i caveat del caso e cercando di non fare la fine del tacchino induttivista!)

Come calcolare la probabilità?

Non c'è un solo modo

- Stato di simmetria rispetto alle possibilità (*elementari*)
  (E non necessariamente simmetria del sistema fisico!)
- Estensione al futuro di regolarità del passato
  (Con tutti i caveat del caso e cercando di non fare la fine del tacchino induttivista!)
- Altri modi difficilmente modellizzabili

Come calcolare la probabilità?

Non c'è un solo modo

- Stato di simmetria rispetto alle possibilità (*elementari*)
  (E non necessariamente simmetria del sistema fisico!)
- Estensione al futuro di regolarità del passato
  (Con tutti i caveat del caso e cercando di non fare la fine del tacchino induttivista!)
- Altri modi difficilmente modellizzabili

'Basta' che il numero corrisponda al grado di fiducia di chi lo ha valutato
(Senza la richiesta di poter confrontare con le frequenze risultanti da infinite prove sotto le stesse condizioni,

Come calcolare la probabilità?

Non c'è un solo modo

- Stato di simmetria rispetto alle possibilità (*elementari*)
  (E non necessariamente simmetria del sistema fisico!)
- Estensione al futuro di regolarità del passato
  (Con tutti i caveat del caso e cercando di non fare la fine del tacchino induttivista!)
- Altri modi difficilmente modellizzabili

'Basta' che il numero corrisponda al grado di fiducia di chi lo ha valutato
(Senza la richiesta di poter confrontare con le frequenze risultanti da infinite prove sotto le stesse condizioni, cosa che non ha senso nella maggior parte dei casi di interesse.)

Non confondere
il <u>concetto</u> di probabilità
con i modi di valutazione!

Il "teorema di Bayes"... di Laplace

"Maggiore è la probabilità di un evento osservato, data una certa causa fra quelle a cui l'evento può essere attribuito, maggiore è la probabilità di quella causa {dato quell'evento}.

$$P(C_i \mid E) \propto P(E \mid C_i)$$

Il "teorema di Bayes"... di Laplace

"Maggiore è la probabilità di un evento osservato, data una certa causa fra quelle a cui l'evento può essere attribuito, maggiore è la probabilità di quella causa {dato quell'evento}. La probabilità di una qualsiasi di tali cause {dato l'evento} è così una frazione il cui nominatore è la probabilità dell'evento data la causa, e il denominatore è la somma di simili probabilità, somma estesa a tutte le cause.

$$P(C_i \mid E) = \frac{P(E \mid C_i)}{\sum_j P(E \mid C_j)}$$

Il “teorema di Bayes”... di Laplace

“Maggiore è la probabilità di un evento osservato, data una certa causa fra quelle a cui l'evento può essere attribuito, maggiore è la probabilità di quella causa {dato quell'evento}. La probabilità di una qualsiasi di tali cause {dato l'evento} è così una frazione il cui nominatore è la probabilità dell'evento data la causa, e il denominatore è la somma di simili probabilità, somma estesa a tutte le cause. Se le varie cause non sono ugualmente probabili *a priori*, è necessario, invece della probabilità dell'evento data ciascuna causa, usare il prodotto di tale probabilità e la *possibilità della causa stessa*.”

$$P(C_i \mid E) = \frac{P(E \mid C_i)\, P(C_i)}{\sum_j P(E \mid C_j)\, P(C_j)}$$

Il "teorema di Bayes"... di Laplace

"Maggiore è la probabilità di un evento osservato, data una certa causa fra quelle a cui l'evento può essere attribuito, maggiore è la probabilità di quella causa {dato quell'evento}. La probabilità di una qualsiasi di tali cause {dato l'evento} è così una frazione il cui nominatore è la probabilità dell'evento data la causa, e il denominatore è la somma di simili probabilità, somma estesa a tutte le cause. Se le varie cause non sono ugualmente probabili *a priori*, è necessario, invece della probabilità dell'evento data ciascuna causa, usare il prodotto di tale probabilità e la *possibilità della causa stessa*."

$$P(C_i \mid E) = \frac{P(E \mid C_i)\, P(C_i)}{P(E)}$$

(*Saggio Filosofico sulle Probabilità*)

[In quanto, in generale, $P(E) = \sum_j P(E \mid C_j)\, P(C_j)$]

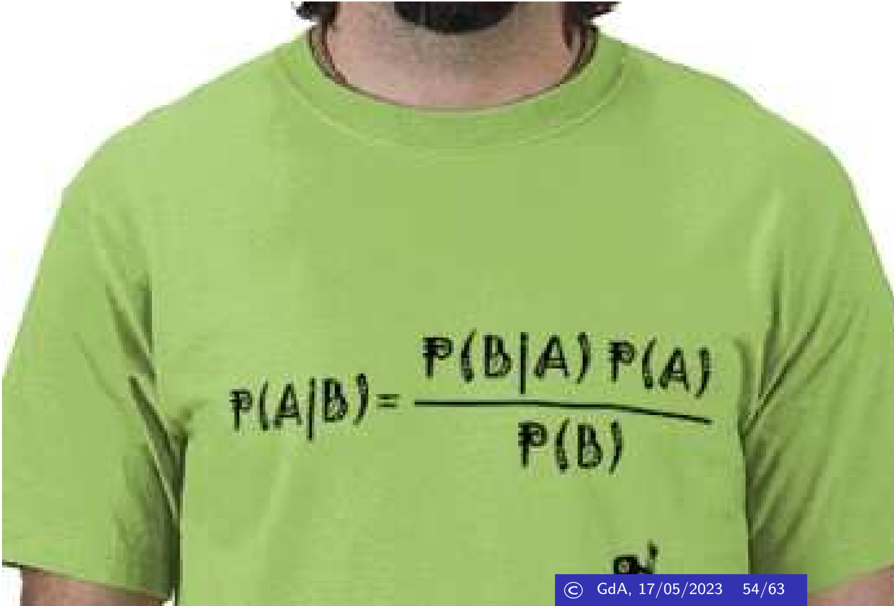
Il "teorema di Bayes"... di Laplace

$$P(C_i \mid E) \;=\; \frac{P(E \mid C_i)\, P(C_i)}{\sum_j P(E \mid C_j)\, P(C_j)}$$

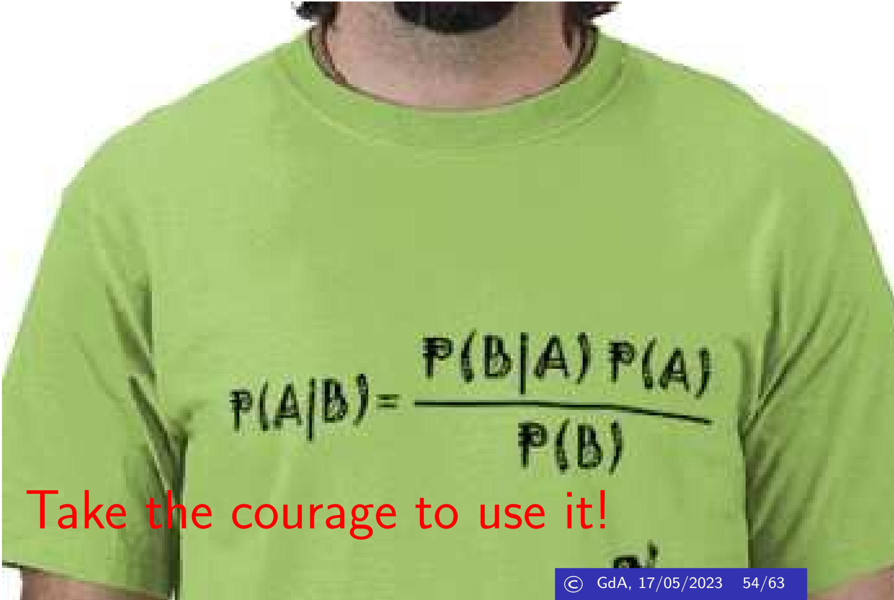
"Questo è il principio fondamentale (*) di quel ramo della teoria delle probabililità che consiste nel ragionare a posteriori dagli eventi alle cause"

(*) Nel "Saggio Filosofico" Laplace chiama 'principi' le regole fondamentali'.

Una semplice, potente e utile formula

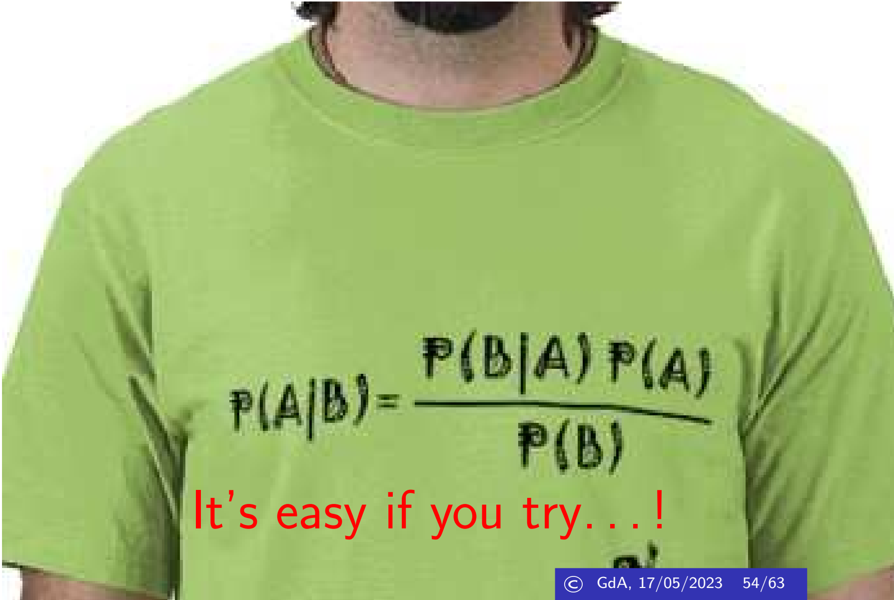


Una semplice, potente e utile formula



Take the courage to use it!

Una semplice, potente e utile formula



It's easy if you try. . . !

Il “teorema di Bayes”...di Laplace

$$
\begin{aligned}
P(C_i \mid E) &= \frac{P(E \mid C_i)\, P(C_i)}{\sum_j P(E \mid C_j)\, P(C_j)} \\
&= \frac{P(E \mid C_i)\, P(C_i)}{P(E)}
\end{aligned}
$$

Il "teorema di Bayes"... di Laplace

$$P(C_i \mid E) = \frac{P(E \mid C_i)\, P(C_i)}{\sum_j P(E \mid C_j)\, P(C_j)} = \frac{P(E \mid C_i)\, P(C_i)}{P(E)}$$

Nota: il denominatore è un semplice fattore di normalizzazione.

$$\Rightarrow \qquad P(C_i \mid E) \;\propto\; P(E \mid C_i)\, P(C_i)$$

- Modo più conveniente per comprendere l'essenza della regola di aggiornamento

Confronto fra due cause (o ipotesi)

$$P(C_1 \,|\, E) \quad \propto \quad P(E \,|\, C_1)\, P(C_1)$$

Confronto fra due cause (o ipotesi)

$$\begin{aligned} P(C_1 \,|\, E) &\propto P(E \,|\, C_1)\, P(C_1) \\ P(C_2 \,|\, E) &\propto P(E \,|\, C_2)\, P(C_2) \end{aligned}$$

Confronto fra due cause (o ipotesi)

$$\begin{aligned} P(C_1 \,|\, E) &\propto P(E \,|\, C_1)\, P(C_1) \\ P(C_2 \,|\, E) &\propto P(E \,|\, C_2)\, P(C_2) \end{aligned}$$

Facendo i rapporti

$$\frac{P(C_1 \,|\, E)}{P(C_2 \,|\, E)} = \frac{P(E \,|\, C_1)}{P(E \,|\, C_2)} \cdot \frac{P(C_1)}{P(C_2)}$$

Confronto fra due cause (o ipotesi)

$$P(C_1 \,|\, E) \;\propto\; P(E \,|\, C_1)\, P(C_1)$$
$$P(C_2 \,|\, E) \;\propto\; P(E \,|\, C_2)\, P(C_2)$$

Facendo i rapporti

$$\frac{P(C_1 \,|\, E)}{P(C_2 \,|\, E)} \;=\; \frac{P(E \,|\, C_1)}{P(E \,|\, C_2)} \cdot \frac{P(C_1)}{P(C_2)}$$

$\Rightarrow$ altro modo per ricordare facilmente l'essenza della regola di bayes

Confronto fra due cause (o ipotesi)

$$
\begin{aligned}
P(C_1 \,|\, E) &\propto P(E \,|\, C_1)\, P(C_1) \\
P(C_2 \,|\, E) &\propto P(E \,|\, C_2)\, P(C_2)
\end{aligned}
$$

Facendo i rapporti

$$\frac{P(C_1 \,|\, E)}{P(C_2 \,|\, E)} = \frac{P(E \,|\, C_1)}{P(E \,|\, C_2)} \cdot \frac{P(C_1)}{P(C_2)}$$

$\Rightarrow$ altro modo per ricordare facilmente l'essenza della regola di bayes

$\Rightarrow$ Servono almeno due cause!
[Non ha senso parlare dell'aggiornamento della probabilità di una causa se non se ne considera un'altra, della quale si riesca a valutare in qualche modo $P(E \,|\, C)$.]

Confronto fra due cause (o ipotesi)

$$
\begin{aligned}
P(C_1 \,|\, E) &\propto P(E \,|\, C_1)\, P(C_1) \\
P(C_2 \,|\, E) &\propto P(E \,|\, C_2)\, P(C_2)
\end{aligned}
$$

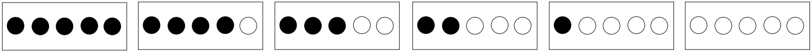
Facendo i rapporti

$$\frac{P(C_1 \,|\, E)}{P(C_2 \,|\, E)} = \frac{P(E \,|\, C_1)}{P(E \,|\, C_2)} \cdot \frac{P(C_1)}{P(C_2)}$$

$\Rightarrow$ altro modo per ricordare facilmente l'essenza della regola di bayes

$\Rightarrow$ Servono almeno due cause!
[Non ha senso parlare dell'aggiornamento della probabilità di una causa se non se ne considera un'altra, della quale si riesca a valutare in qualche modo $P(E \,|\, C)$.]
$\Rightarrow$ è il peccato originale dei "test di ipotesi" frequentisti

Applicazione al problema delle sei scatole



H_0 H_1 H_2 H_3 H_4 H_5

Remind:

- E_1 = Bianco
- E_2 = Nero

I nostri 'strumenti'

$$\boxed{P(H_j \mid E_i, I) = \frac{P(E_i \mid H_j, I)}{P(E_i \mid I)} \, P(H_j \mid I)}$$

I nostri 'strumenti'

$$\boxed{P(H_j \mid E_i, I) = \frac{P(E_i \mid H_j, I)}{P(E_i \mid I)}\, P(H_j \mid I)}$$

- $P(H_j \mid I) = 1/6$

I nostri 'strumenti'

$$\boxed{P(H_j \,|\, E_i, I) = \frac{P(E_i \,|\, H_j, I)}{P(E_i \,|\, I)}\, P(H_j \,|\, I)}$$

- $P(H_j \,|\, I) = 1/6$
- $P(E_i \,|\, I) = 1/2$

I nostri 'strumenti'

$$\boxed{P(H_j \,|\, E_i, I) = \frac{P(E_i \,|\, H_j, I)}{P(E_i \,|\, I)}\, P(H_j \,|\, I)}$$

- $P(H_j \,|\, I) = 1/6$
- $P(E_i \,|\, I) = 1/2$
- $P(E_i \,|\, H_j,\, I)$:

$$\begin{aligned} P(E_1 \,|\, H_j,\, I) &= j/5 \\ P(E_2 \,|\, H_j,\, I) &= (5-j)/5 \end{aligned}$$

I nostri ‘strumenti’

$$\boxed{P(H_j \,|\, E_i, I) = \frac{P(E_i \,|\, H_j, I)}{P(E_i \,|\, I)}\, P(H_j \,|\, I)}$$

- $P(H_j \,|\, I) = 1/6$
- $P(E_i \,|\, I) = 1/2$
- $P(E_i \,|\, H_j,\, I)$:

$$\begin{aligned} P(E_1 \,|\, H_j,\, I) &= j/5 \\ P(E_2 \,|\, H_j,\, I) &= (5-j)/5 \end{aligned}$$

Nostra credenza a priori su H_j

I nostri 'strumenti'

$$\boxed{P(H_j \,|\, E_i, I) = \frac{P(E_i \,|\, H_j, I)}{P(E_i \,|\, I)}\, P(H_j \,|\, I)}$$

- $P(H_j \,|\, I) = 1/6$
- $P(E_i \,|\, I) = 1/2$
- $P(E_i \,|\, H_j,\, I)$:

$$\begin{aligned} P(E_1 \,|\, H_j,\, I) &= j/5 \\ P(E_2 \,|\, H_j,\, I) &= (5-j)/5 \end{aligned}$$

Probabilità di E_i condizionata da una ben precisa ipotesi H_j

I nostri 'strumenti'

$$\boxed{P(H_j \mid E_i, I) = \frac{P(E_i \mid H_j, I)}{P(E_i \mid I)}\, P(H_j \mid I)}$$

- $P(H_j \mid I) = 1/6$
- $P(E_i \mid I) = 1/2$
- $P(E_i \mid H_j,\, I)$:

$$\begin{aligned} P(E_1 \mid H_j,\, I) &= j/5 \\ P(E_2 \mid H_j,\, I) &= (5-j)/5 \end{aligned}$$

Probabilità di E_i tenendo conto di tutte le possibilità H_j
$\rightarrow$ Quanto crediamo che E_i accada.

I nostri 'strumenti'

$$\boxed{P(H_j \mid E_i, I) = \frac{P(E_i \mid H_j, I)}{P(E_i \mid I)} P(H_j \mid I)}$$

- $P(H_j \mid I) = 1/6$
- $P(E_i \mid I) = 1/2$
- $P(E_i \mid H_j,\, I)$:

$$\begin{aligned} P(E_1 \mid H_j,\, I) &= j/5 \\ P(E_2 \mid H_j,\, I) &= (5-j)/5 \end{aligned}$$

Probabilità di E_i tenendo conto di tutte le possibilità H_j
$\rightarrow$ Quanto crediamo che E_i accada.
La possiamo ricrivere come
$P(E_i \mid I) = \sum_j P(E_i \mid H_j,\, I) \cdot P(H_j \mid I)$

I nostri 'strumenti'

$$\boxed{P(H_j \,|\, E_i, I) = \frac{P(E_i \,|\, H_j, I)}{P(E_i \,|\, I)}\, P(H_j \,|\, I)}$$

- $P(H_j \,|\, I) = 1/6$
- $P(E_i \,|\, I) = 1/2$
- $P(E_i \,|\, H_j,\, I)$:

$$\begin{aligned} P(E_1 \,|\, H_j,\, I) &= j/5 \\ P(E_2 \,|\, H_j,\, I) &= (5-j)/5 \end{aligned}$$

But it easy to prove that $P(E_i \,|\, I)$ is related to the other ingredients, usually easier to 'measure' or to assess somehow, though vaguely

I nostri 'strumenti'

$$\boxed{P(H_j \mid E_i, I) = \frac{P(E_i \mid H_j, I)}{P(E_i \mid I)} P(H_j \mid I)}$$

- $P(H_j \mid I) = 1/6$
- $P(E_i \mid I) = 1/2$
- $P(E_i \mid H_j, I)$:

$$\begin{aligned} P(E_1 \mid H_j, I) &= j/5 \\ P(E_2 \mid H_j, I) &= (5-j)/5 \end{aligned}$$

But it easy to prove that $P(E_i \mid I)$ is related to the other ingredients, usually easier to 'measure' or to assess somehow, though vaguely

'decomposition law': $P(E_i \mid I) = \sum_j P(E_i \mid H_j, I) \cdot P(H_j \mid I)$
($\rightarrow$ Easy to check that it gives $P(E_i \mid I) = 1/2$ in our case).

I nostri ‘strumenti’

$$\boxed{P(H_j \mid E_i, I) = \frac{P(E_i \mid H_j, I) \cdot P(H_j \mid I)}{\sum_j P(E_i \mid H_j, I) \cdot P(H_j \mid I)}}$$

- $P(H_j \mid I) = 1/6$
- $P(E_i \mid I) = \sum_j P(E_i \mid H_j, I) \cdot P(H_j \mid I)$
- $P(E_i \mid H_j, I)$:

$$\begin{aligned} P(E_1 \mid H_j, I) &= j/5 \\ P(E_2 \mid H_j, I) &= (5-j)/5 \end{aligned}$$

We are ready!

$\longrightarrow$ Let’s play with our toy

Conclusioni

"Quando le leggi della matematica si riferiscono alla realtà non sono certe; e quando sono certe non si riferiscono alla realtà." (Einstein)

"E' scientifico soltanto dire cosa è più probabile e cosa è meno probabile." (Feynman)

"La teoria della probabilità in fondo non è che buon senso ridotto a calcolo." (Laplace)

Conclusioni

"Quando le leggi della matematica si riferiscono alla realtà non sono certe; e quando sono certe non si riferiscono alla realtà." (Einstein)

"E' scientifico soltanto dire cosa è più probabile e cosa è meno probabile." (Feynman)

"La teoria della probabilità in fondo non è che buon senso ridotto a calcolo." (Laplace)

- Ma il buon senso non sempre corrisponde al senso comune.

Conclusioni

"Quando le leggi della matematica si riferiscono alla realtà non sono certe; e quando sono certe non si riferiscono alla realtà." (Einstein)

"E' scientifico soltanto dire cosa è più probabile e cosa è meno probabile." (Feynman)

"La teoria della probabilità in fondo non è che buon senso ridotto a calcolo." (Laplace)

- Ma il buon senso non sempre corrisponde al senso comune.
- Le intuizioni possono essere fallaci.

Conclusioni

"Quando le leggi della matematica si riferiscono alla realtà non sono certe; e quando sono certe non si riferiscono alla realtà." (Einstein)

"E' scientifico soltanto dire cosa è più probabile e cosa è meno probabile." (Feynman)

"La teoria della probabilità in fondo non è che buon senso ridotto a calcolo." (Laplace)

- Ma il buon senso non sempre corrisponde al senso comune.
- Le intuizioni possono essere fallaci.
- L'uso consistente della teoria delle probabilità aiuta ad evitare errori.

Conclusioni

"Quando le leggi della matematica si riferiscono alla realtà non sono certe; e quando sono certe non si riferiscono alla realtà." (Einstein)

"E' scientifico soltanto dire cosa è più probabile e cosa è meno probabile." (Feynman)

"La teoria della probabilità in fondo non è che buon senso ridotto a calcolo." (Laplace)

- Ma il buon senso non sempre corrisponde al senso comune.
- Le intuizioni possono essere fallaci.
- L'uso consistente della teoria delle probabilità aiuta ad evitare errori.
- Non c'è niente da temere dalla fraintesa probabilità soggettiva!

Conclusioni

"Quando le leggi della matematica si riferiscono alla realtà non sono certe; e quando sono certe non si riferiscono alla realtà." (Einstein)

"E' scientifico soltanto dire cosa è più probabile e cosa è meno probabile." (Feynman)

"La teoria della probabilità in fondo non è che buon senso ridotto a calcolo." (Laplace)

- Ma il buon senso non sempre corrisponde al senso comune.
- Le intuizioni possono essere fallaci.
- L'uso consistente della teoria delle probabilità aiuta ad evitare errori.
- Non c'è niente da temere dalla fraintesa probabilità soggettiva!
- Trovo molto più pericolose
  - fughe metafisiche,
  - spacciare per "regole oggettive" ricettucole imposte dall'*ipse dixit* di autorità accademiche

The End

FINE

Soluzioni

Test dell'AIDS: soluzione

Italiano scelto a caso si sottopone al test dell'AIDS.
Test non perfetto, come succede in pratica.
Ricordiamo i dati *(Modello semplificato)*:

$$\begin{aligned} P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV}) &= 100\% \\ P(\mathrm{Pos}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}}) &= 0.2\% \\ P(\mathrm{Neg}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}}) &= 99.8\% \end{aligned}$$

Test dell'AIDS: soluzione

Italiano scelto a caso si sottopone al test dell'AIDS.
Test non perfetto, come succede in pratica.
Ricordiamo i dati *(Modello semplificato)*:

$$\begin{aligned} P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV}) &= 100\% \\ P(\mathrm{Pos}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}}) &= 0.2\% \\ P(\mathrm{Neg}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}}) &= 99.8\% \end{aligned}$$

Dato *volutamente* **mancante:** probabilità che un italiano scelto a caso (senza nessun'altra informazione su di lui – nemmeno la possibilità di guardarlo infaccia!) sia infetto.

Test dell'AIDS: soluzione

Italiano scelto a caso si sottopone al test dell'AIDS.
Test non perfetto, come succede in pratica.
Ricordiamo i dati *(Modello semplificato)*:

$$\begin{aligned} P(\mathrm{Pos} \,|\, \mathrm{HIV}) &= 100\% \\ P(\mathrm{Pos} \,|\, \overline{\mathrm{HIV}}) &= 0.2\% \\ P(\mathrm{Neg} \,|\, \overline{\mathrm{HIV}}) &= 99.8\% \end{aligned}$$

Dato *volutamente* **mancante:** probabilità che un italiano scelto a caso (senza nessun'altra informazione su di lui – nemmeno la possibilità di guardarlo infaccia!) sia infetto.
Ai fini dell'esercizio prendiamo $1/600$, ovvero 0.17%:

$$P_0(\mathrm{HIV}) = 1/600 \approx 0.17\% \tag{1}$$

$$P_0(\overline{\mathrm{HIV}}) = 1 - 1/600 \approx 99.83\% \tag{2}$$

Applichiamo il teorema di Bayes

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos}) &= \frac{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV})\cdot P_0(\mathrm{HIV})}{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV})\cdot P_0(\mathrm{HIV}) + P(\mathrm{Pos}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}})\cdot P_0(\overline{\mathrm{HIV}})} \\
&= \frac{1\times 1/600}{1\times 1/600 + 0.002\times 599/500} \approx 45\%\,.
\end{aligned}
$$

Applichiamo il teorema di Bayes

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos}) &= \frac{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV})\cdot P_0(\mathrm{HIV})}{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV})\cdot P_0(\mathrm{HIV}) + P(\mathrm{Pos}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}})\cdot P_0(\overline{\mathrm{HIV}})} \\
&= \frac{1\times 1/600}{1\times 1/600 + 0.002\times 599/500} \approx 45\%\,.
\end{aligned}
$$

Altro modo conveniente (e istruttivo):

$$
\begin{aligned}
\frac{P(\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos})}{P(\overline{\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos}})} &= \frac{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV})}{P(\mathrm{Pos}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}})} \times \frac{P_0(\mathrm{HIV})}{P_0(\overline{\mathrm{HIV}})} \\
&= \frac{1}{0.002} \times \frac{1/600}{1-1/600} \\
&\approx 500 \times \frac{1}{600} \approx 0.83 < 1 \\
\Rightarrow \quad & P(\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos}) \approx 45\%\,.
\end{aligned}
$$

Applichiamo il teorema di Bayes

$$P(\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos}) = \frac{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV})\cdot P_0(\mathrm{HIV})}{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV})\cdot P_0(\mathrm{HIV}) + P(\mathrm{Pos}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}})\cdot P_0(\overline{\mathrm{HIV}})}$$

$$= \frac{1\times 1/600}{1\times 1/600 + 0.002\times 599/500} \approx 45\%\,.$$

Altro modo conveniente (e istruttivo):

$$\frac{P(\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos})}{P(\overline{\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos}})} \approx 500\times\frac{1}{600} \approx 0.83 < 1$$

$\Rightarrow$ Anche se il dato sperimentale *spinge molto* vero l'ipotesi HIV (rapporto di probabilità aggiornato di un fattore 500!), la bassissima probabilità iniziale fa sì che a posteriore tale ipotesi sia sostanzialmente probabile quanto la sua alternativa.

Applichiamo il teorema di Bayes

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos}) &= \frac{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV})\cdot P_0(\mathrm{HIV})}{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{HIV})\cdot P_0(\mathrm{HIV}) + P(\mathrm{Pos}\,|\,\overline{\mathrm{HIV}})\cdot P_0(\overline{\mathrm{HIV}})} \\
&= \frac{1\times 1/600}{1\times 1/600 + 0.002\times 599/500} \approx 45\%\,.
\end{aligned}
$$

Altro modo conveniente (e istruttivo):

$$
\frac{P(\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos})}{P(\overline{\mathrm{HIV}\,|\,\mathrm{Pos}})} \approx 500\times\frac{1}{600} \approx 0.83 < 1
$$

Nota: il fattore di aggiornamento del rapporto delle probabilità (500 nel nostro caso) è noto come fattore di Bayes (comodo e utile, in quanto molto spesso è più facile essere d'accordo su tale fattore che sulle prior e quindi tale fattore dà un'idea di cosa *preferiscano* i dati – ma per valutare le probabilità servono le prior!)