

36.2 Lente di ingrandimento – immagine all'infinito

Immaginiamo di porre l'oggetto (ad es. un piccolo insetto) **fra lente e fuoco**, talmente vicino al fuoco da scrivere p come $p = f - \epsilon$, con $\epsilon > 0$ che faremo tendere a zero.

- L'immagine si formerà quindi in

$$\begin{aligned} q &= \frac{(f - \epsilon) \cdot f}{(f - \epsilon) - f} \\ &= -\frac{f^2}{\epsilon} \longrightarrow -\infty \end{aligned}$$

→ immagine virtuale all'infinito.

- L'ingrandimento sarà

$$\begin{aligned} M &= -\frac{q}{p} = -\frac{(f - \epsilon) \cdot f}{(f - \epsilon) - f} \cdot \frac{1}{(f - \epsilon)} \\ &= \frac{f}{\epsilon} \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Che senso ha una **immagine infinitamente grande a distanza infinita**?

- In realtà quello che conta è l'**ingrandimento angolare**, ovvero il rapporto fra y'/d' e y/d , ove
 - d è la distanza fra occhio e oggetto in assenza di lente;
 - d' è la distanza fra occhio e immagine.

Si noti, inoltre, che essendo q molto grande, varrà l'approssimazione $d' \approx |q|$. Inoltre useremo l'approssimazione $\tan \alpha \approx \alpha$.

Ne segue

$$\begin{aligned} y' &= M y = \frac{f}{\epsilon} y \\ \alpha &\approx \tan \alpha = \frac{y'}{d'} \\ &\approx \frac{y'}{|q|} = \frac{f}{\epsilon} y \cdot \frac{1}{f^2/\epsilon} = \frac{y}{f}, \end{aligned}$$

da confrontare con l'angolo α_0 con il quale si vedrebbe il piccolo oggetto senza la lente di ingrandimento, pari (nella solita approssimazione 'tangente $\approx$ angolo') a

$$\alpha_0 \approx \frac{y}{d}.$$

Indicando con M_α l'ingrandimento angolare abbiamo

$$M_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{y/f}{y/d} = \frac{d}{f}.$$

- Ovviamente M_α dipenderà dalla distanza alla quale ci possiamo avvicinare per osservare y senza la lente. Chiamando d_0 la distanza minima di visione minima (dipendente dalle persone e dalla loro età e posta convenzionalmente a 25 cm – ma una persona giovane può arrivare ben più vicino!) otteniamo

$$M_{\alpha_{max}} = \frac{d_0}{f}.$$

Le lenti più 'potenti' sono quelle che hanno una focale più corta.

36.3 Lente di ingrandimento – occhio ‘attaccato’ alla lente

In realtà c'è un altro modo di usare la lente di ingrandimento, la quale produce un ingrandimento angolare maggiore. Si tratta di mettere l'occhio molto vicino alla lente e fare in modo che l'immagine si formi alla distanza d_0 (vedi problemi nr. 3 e 4 in fondo alla lezione di oggi).

36.4 Importanza della lunghezza focale sulle dimensioni di immagini su sensori di macchine fotografiche

Riprendiamo il problema nr. 2 del par 26.3 (p. 44) di questo file, problema che possiamo scrivere in modo generale come

$$(p, h, f) \Rightarrow (q, M, h').$$

La soluzione per y' è

$$\begin{aligned} y' &= M \cdot y = \left(-\frac{q}{p}\right) \cdot y \\ &= \left(-\frac{f}{p-f}\right) \cdot y \approx -\frac{f}{p} \cdot y : \end{aligned}$$

a parità di h e p (dimensioni trasversali di un oggetto posto a una certa distanza), tanto maggiore è f quanto maggiore sarà la grandezza dell'immagine sul sensore della fotocamera: $\rightarrow$ *teleobiettivo*.

36.5 Dipendenza dell'angolo di campo dalla focale dell'obiettivo e dalle dimensioni del sensore.

- Ricordiamo che in ‘normali’ situazioni fotografiche $p \gg f$ da cui $q \approx f$. Ne segue quindi che, essendo

$$|y'| = |M| \cdot y = |-q/p| \cdot y \approx (f/p) \cdot y$$

(in questa parte ci interessiamo al modulo y' , indicato con $|y'|$, in quanto siamo interessati alle dimensioni di oggetto e immagine, avendo già imparato che l'immagine è capovolta), abbiamo

$$\frac{y}{p} \approx \frac{|y'|}{f}.$$

- Indichiamo, per motivi che vedremo fra breve, $\alpha/2$ l'angolo opposto a y del triangolo rettangolo che ha i cateti y e p (e quindi uguale all'angolo opposto a y' del triangolo rettangolo che ha i cateti $|y'|$ e f). Abbiamo quindi (date le varie approssimazioni)

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{y}{p} = \frac{|y'|}{f}$$

da cui

$$\alpha = 2 \arctan \frac{y}{p} = 2 \arctan \frac{|y'|}{f}.$$

- Il massimo di α si ottiene quando $|y'|$ è massimo ($\rightarrow y'_M$), ovvero quando è pari alla **metà della dimensione** (orizzontale o verticale, o anche diagonale – attenzione alle

convenzioni!) del sensore, a seconda di quello che ci interessa, e che indichiamo con L , essendo un lato (o anche la diagonale!) del rettangolo che definisce il sensore:

$$\alpha_M = 2 \arctan \frac{y'_M}{f} = 2 \arctan \frac{L/2}{f}.$$

- L'angolo α_M è chiamato *angolo di campo* e, come dice il nome, indica l'angolo di visuale che si può comprire con una foto. Per questo è importante capire se si riferisce al lato maggiore del rettangolo della foto (foto 'orizzontale', o 'landscape'), a quello minore (foto 'verticale', o 'portrait'), o alla diagonale.
- Ad esempio, per il formato 'classico' delle foto con pellicola (il cosiddetto '35 mm', di dimensione del fotogramma $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$, detto *full frame* nelle moderne fotocamere digitali) e un obiettivo da 50 mm (obiettivo 'normale'), abbiamo

Visione orizzontale: $L = 36 \text{ mm}$,

$$\alpha_M = 40^\circ.$$

Visione verticale: $L = 24 \text{ mm}$,

$$\alpha_M = 27^\circ.$$

Diagonale: $L = 43.3 \text{ mm}$,

$$\alpha_M = 47^\circ.$$

- Per distanze focali molto grandi, ovvero $f \gg L$, gli angoli sono piccoli, e quindi possiamo far uso della consueta approssimazione 'tangente $\approx$ angolo' (in radianti!), da cui

$$\alpha_M = 2 \arctan \frac{L/2}{f} \approx 2 \left(\frac{L/2}{f} \right) = \frac{L}{f}.$$

Ad esempio un obiettivo da 200 mm montato su una macchina fotografica *full frame* (questo è il nome che si dà alle macchine fotografiche che hanno un sensore grande quanto un fotogramma delle classiche fotocamere reflex '35 mm', ovvero $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$) copre 10 gradi con la macchina fotografica tenuta orizzontalmente:

$$\begin{aligned} L &= 36 \text{ mm} \\ f &= 200 \text{ mm} \\ \alpha_M &\approx \frac{36 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 0.18 \text{ rad} \\ &\approx 10.3^\circ. \end{aligned}$$

Un obiettivo di focale 720 mm copre invece, sempre orizzontalmente, un angolo di poco inferiore ai 3 gradi (2.86°): $\rightarrow$ problema nr. 6.

36.6 Problemi

1. Dati i valori di afelio e perielio per Terra, Marte e Giove (si veda su Wikipedia) si valuti il rapporto fra la velocità al perielio e quella all'afelio di tali pianeti.
2. Esperimenti con occhiali aventi lenti convergenti (quelle che usano gli over 40 per leggere, e che qualcuno in famiglia quasi sicuramente ha – altrimenti si chiedi in giro):

- (a) mettendosi al sole (o usando una sorgente di luce ‘molto lontana’), misurare la distanza focale della lente (in cm).
 - (b) sapendo che il numero di diottrie degli occhiali è pari a $1\text{ m}/f$, calcolare le diottrie degli occhiali
3. Data una lente divergente di $f = -5\text{ cm}$ e un oggetto avente dimensione trasversa $y = 2\text{ cm}$ si calcolino q , M e y' e si costruisca l’immagine in scala (controllando la consistenza dei risultati ottenuti) per
- (a) $p = 10\text{ cm}$;
 - (b) $p = 2.5\text{ cm}$.
4. Un altro modo di utilizzare una lente di ingrandimento, rispetto a quello illustrato a lezione è quello di mettere l’occhio ‘molto vicino’ alla lente e fare in modo che l’immagine si formi alla distanza *minima di visione nitida*, indicata con d_0 . In questo problema analizzeremo cosa succede nel caso idealizzato in cui l’occhio è attaccato alla lente, situazione che ci fa capire il massimo che possiamo raggiungere. Cominciamo con l’osservare che, essendo l’immagine virtuale abbiamo, date le ipotesi, $q = -d_0$. Ricavarci quindi
- (a) l’espressione di p tale che $q = -d_0$;
 - (b) l’espressione dell’ingrandimento $M = -q/p$ per questa situazione;
 - (c) l’espressione di $y' = M y$;
 - (d) l’espressione della dimensione angolare $\alpha = |y'|/d_0$ usando la lente in questo modo;
 - (e) l’espressione della dimensione angolare $\alpha_0 = y/d_0$ osservando l’oggetto dalla stessa distanza d_0 ma senza l’uso della lente;
 - (f) l’espressione dell’ingrandimento angolare M_α definito come α/α_0 .
5. Si immagini di avere una lente convergente avente $f = 25\text{ cm}$. Si confronti ingrandimento angolare usando la lente come descritto nel problema precedente con quello che si ottiene con il metodo descritto a lezione, ovvero con immagine all’infinito (per d_0 si usi il valore convenzionale di 25 cm).
6. Calcolare l’angolo di campo orizzontale coperto da un teleobiettivo di focale 720 mm in una fotocamera ‘full frame’, ovvero avente il sensore largo 36 mm e alto 24 mm .
7. Verificare i valori delle aperture angolari riportate nell’immagine nella ‘galleria’ (si faccia attenzione a quando usare o meno l’approssimazione per piccoli angoli).
8. Un sensore di una (piccola) fotocamera ha dimensioni $6.17\text{ mm} \times 4.55\text{ mm}$. Sapendo inoltre che tale fotocamera monta un obiettivo avente $f = 133\text{ mm}$,
- (a) si calcoli l’apertura angolare orizzontale (si può usare tranquillamente l’approssimazione per piccoli angoli);
 - (b) si calcoli la lunghezza focale necessaria per avere la stessa apertura angolare orizzontale in una fotocamera avente un sensore ‘full frame’, ovvero di larghezza pari a 36 mm .
9. Sapendo inoltre che il sensore della stessa fotocamera possiede “4896 pixel per 3672 pixel” (orizzontale per verticale)
- (a) si calcolino il numero di pixel della fotocamera;
 - (b) si calcoli la dimensione in pixel di una immagine larga 4.00 mm e alta 2 mm .

36.7 Lunghezza focale equivalente

Riprendiamo la seconda domanda del problema 8 della scorsa lezione (“si calcoli la lunghezza focale necessaria per avere la stessa apertura angolare orizzontale in una fotocamera avente un sensore ‘full frame’, ovvero di larghezza pari a 36 mm”).

Siccome le dimensioni dei sensori sono molto varie (vedi immagine sul sito) e i fotografi sono abituati all’angolo ottenuto con reflex classiche, oggi si fa spesso uso della *focale equivalente* (“35 mm film equivalent”), ovvero della lunghezza focale che su una fotocamera *full frame* avrebbe dato lo stesso angolo di campo di quella usata. Ad esempio, relativamente alla **foto del cartello dell’estintore**, leggendo al computer i dettagli della foto (‘proprietà’) si legge (unità in millimetri):

focal length 720,0 (35mm film); 123,0 (lens)

Significa che la foto è stata scattata con una focale (vera) di 123 mm, equivalente (per quanto riguarda l’angolo di campo) a 720 mm su una fotocamera ‘full frame’.

Siccome la macchina fotografica tascabile usata ha un sensore di 4.55 mm × 6.17 mm possiamo verificare facilmente:

$$\frac{6.17 \text{ mm}}{123 \text{ mm}} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 2.87^\circ,$$

in pratica esattamente quanto avevamo ottenuto per un obiettivo da 720 mm montato su una fotocamera ‘full frame’ (sensore, ripetiamo, 24 mm × 36 mm).

→ Vedi in fondo al par. 36.5 e problema nr. 6 par. 36.3.

36.8 Uso telemetrico delle fotocamere – generalità

Come abbiamo visto all’inizio del corso, se in qualche modo riusciamo a stimare le dimensioni angolari di un oggetto (ad esempio per confronto con quelle note di Sole e Luna) siamo in grado di valutare la distanza a cui esso si trova se siamo in grado di ipotizzarne ragionevolmente le dimensioni lineari (o, viceversa, valutarne le dimensioni se ne conosciamo la distanza). Vediamo come estrarre le dimensioni angolari di un oggetto da una foto, facendo uso di quanto appreso nel punto precedente. Per far ciò abbiamo bisogno di conoscere

- la lunghezza focale con cui è stata scattata la foto (se si usa uno zoom questa può cambiare, ma fortunatamente tale informazione è contenuta nella foto stessa nel cosiddetto *Exif*, accessibile con i programmi di visualizzazione delle foto).
- La grandezza dell’immagine dell’oggetto sul sensore (y').

Per valutare la grandezza dell’immagine possiamo valutare la sua lunghezza in pixel e scalarla conoscendo le dimensioni del sensore sia in pixel che in millimetri. Oppure, se non è richiesta una grande precisione e l’immagine dell’oggetto occupa una frazione considerevole della foto, possiamo misurare sullo schermo le dimensioni con il righello (immagine dell’oggetto e foto intera) e, nuovamente, ottenere la grandezza di millimetri mediante opportune proporzioni.

Abbiamo comunque bisogno di conoscere le dimensioni del sensore. Un trucco per evitare l’uso di questa informazione è di usare la lunghezza focale equivalente (‘35mm film’), in quanto le dimensioni dei sensori ‘full frame’ sono ben note e, ricordiamo, valgono 24 mm × 36 mm. Quindi una semplice proporzione, o mediante il conteggio dei pixel, o usando il righello sullo schermo, ci permette di valutare facilmente *la dimensione che l’immagine sull’oggetto avrebbe su un sensore full frame*.

36.9 Uso telemetrico delle fotocamere – dettagli e un esempio numerico

Per ricondurre alle formule usate precedentemente, immaginiamo che l'oggetto sia centrato sull'asse ottico e indichiamo con ΔY la sua dimensione trasversale, in modo tale che $y = \Delta Y/2$ (ricordiamo che y nelle costruzioni ottiche che abbiamo fatto finora è 'appoggiato' sull'asse ottico e ha la freccia verso l'alto). Allo stesso modo indichiamo con $\Delta Y'$ la dimensione trasversale dell'immagine. Ovvero, anche in questo caso, $y' = \Delta Y'/2$.

Ricordando la relazione che abbiamo visto sopra, e che riscriviamo per comodità,

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{y}{p} = \frac{y'}{f}$$

otteniamo quindi

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta Y/2}{p} = \frac{\Delta Y'/2}{f}.$$

Notiamo quindi come questa relazione vale con buona approssimazione anche se oggetto e immagine non sono centrate sull'asse ottico.

Segue un esempio numerico

- Un sensore ha dimensioni 13.2 mm × 8.8 mm, con 5472 px × 3648 px ('px' sta per pixel).
- Immaginiamo che in una foto scattata con una focale di 13.3 mm (avendo tale fotocamera uno zoom, la lunghezza focale è variabile) ci sia un oggetto largo 450 px, disposto orizzontalmente.
- Scalando, otteniamo che l'immagine di tale oggetto è larga

$$\Delta Y' = \frac{450 \text{ px}}{5472 \text{ px}} \times 13.2 \text{ mm} = 1.09 \text{ mm}.$$

- Ne risulta

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \arctan \frac{\Delta Y'/2}{f} \\ &= 2 \arctan \frac{0.650 \text{ mm}}{13.2 \text{ mm}} \\ &= 0.082 \text{ rad} \\ &= 4.7^\circ. \end{aligned}$$

- Infine, se ci accade di conoscere la larghezza vera dell'oggetto, che ipotizziamo qui essere pari a 20 cm, possiamo valutarne la distanza dall'angolo, ricordando che $\tan(\alpha/2) = (\Delta Y/2)/p$:

$$p = \frac{\Delta Y/2}{\tan(\alpha/2)} = 243 \text{ cm}$$

- Ovviamente si poteva anche usare la relazione $\Delta Y/p = \Delta Y'/f$ (è una delle relazioni viste precedentemente, nella quale abbiamo semplificato un fattore 2 presente in entrambi i membri), ottenendo

$$\begin{aligned} p &= \frac{\Delta Y}{\Delta Y'} \cdot f \\ &= \frac{20 \text{ cm}}{1.09 \text{ mm}} \times 13.2 \text{ mm} = 243 \text{ cm}. \end{aligned}$$

36.10 Introduzione ai concetti basilari della tecnica fotografica

- Gli obiettivi delle macchine fotografiche sono schematizzabili con una lente convergente. Nel nostro caso (vedi info sul sito) si trattava di un 50mm, ovvero $f = 5.0$ cm montato su una vecchia macchina fotografica che dietro aveva una apertura per inserire/togliere la pellicola.
- La formazione dell'immagine deve avvenire nel piano della pellicola (ora sostituita da sensori elettronici), ove abbiamo posto la carta lucida.
- Quando si preme il pulsante di scatto, si apre l'otturatore e luce riesce a raggiungere la 'pellicola' (chiameremo così la carta lucida). Il *tempo* di apertura è una frazione di secondo. Nel nostro caso (una Nikkormat anni '70) vanno da 1 secondo a 1/1000 di secondo, selettibile a fattori di 1/2: quindi 1 s, 1/2 s, 1/4 s, ... 1/500 s, 1/1000 s (i valori dopo un po' sono arrotondati) e convenzionalmente scritti sulla ghiera come i reciproci, quindi 1, 2, 4, ..., 500, 1000.
- Ovviamente tempi troppo lunghi (diciamo $> 1/30$ s) sono (pressoché) inutilizzabili a mano libera, perché le foto verrebbero mosse. In questo caso serve una cavalletto (o un appoggio) e una estensione flessibile (il 'flessibile') del pulsante di scatto per evitare tremolii.
- Oltre a questi tempi preimpostati nella fotocamera, esiste una possibilità di tenere l'otturatore aperto a piacere. Si tratta della così detta 'posa B', indicata con B sulla ghiera dei tempi. È quella che abbiamo usato in aula per osservare immagini a lungo (vedi foto sul sito).
- Un altro importante parametro di ripresa è l'*apertura*, regolabile con la ghiera del 'diaframma', la quale riporta (nel nostro caso) i numeri n_D) 2, 2.8, 4, 5.6, ... 16, a passi di 1.4, ovvero di $\approx \sqrt{2}$. Con $n_D = 2$ l'apertura dalla quale entra la luce è massima, mentre con $n_D = 16$ essa è minima.
- Va da sé che la *quantità di luce* che arriva sulla pellicola cresce con il tempo di esposizione e con l'area dell'apertura. Se si passa quindi da '30' a '60', ovvero da 1/30 s a 1/60 s la quantità luce si dimezza: abbiamo diminuito il tempo di uno 'stop', come si dice in gergo fotografico. A ogni stop si dimezza o si raddoppia (a seconda del verso) la quantità di luce che entra.
- Per dimezzare la luce ovviamente si può anche dimezzare l'area della 'finestra' (approssimativamente) circolare in cui passa la luce. Anche in questo caso si parla di stop, e anche i numeri sulla ghiera dei diaframmi sono separati di uno stop uno dall'altro. Il motivo per cui la separazione fra un numero e l'altro va come $\sqrt{2}$ e a n_D piccolo corrisponde una grande apertura è che questo *numero di diaframma* è definito come il rapporto fra lunghezza focale e diametro del diaframma:

$$n_D = \frac{f}{d}.$$

Quindi se si conosce f e si conosce n_D si conosce anche il diametro, essendo pari a $d = f/n_D$. Per questo motivo l'apertura è indicato tecnicamente come $f/2$, $f/4$: si sta

facendo riferimento alla sezione della finestra (circa) circolare attraverso la quale entra la luce.¹³

36.11 Illuminamento, sensibilità del sensore e coppia tempo-diaframma

Supponiamo che l'obiettivo sia sottoposto a un certo illuminamento E_v , misurato in lx, dovuto al soggetto che si intende fotografare.

- Per ottenere il flusso luminoso (ϕ_v , con 'v' che sta ad indicare 'visibile') si moltiplica l'illuminamento per la l'area del diaframma (A):

$$\phi_v = E_v \cdot A.$$

- Se T è il tempo di esposizione la quantità di luce (Q_v , misurata in lm·s) che entra nella fotocamera sarà pari a

$$\begin{aligned} Q_v &= \phi_v \cdot T \\ &= E_v \cdot A \cdot T \end{aligned}$$

- Utilizzando ora il diametro dell'apertura e la sua relazione con f e nd e ignorando i fattori di proporzionalità che non ci interessano (ad esempio è chiaro che se il foro è quadrato e il sensore è rettangolare non tutta la luce, ma solo una frazione, finirà sul sensore) possiamo riscrivere la quantità di luce come

$$\begin{aligned} Q_v &\propto E_v \cdot d^2 \cdot T \\ &\propto E_v \cdot \frac{f^2}{n_D^2} \cdot T. \end{aligned}$$

- A questo punto entra in gioco la *sensibilità* del sensore (gli 'ISO', ereditati dalle pellicole): più è alta la sensibilità e minore è la quantità di luce che serve a 'impressionare' il sensore. Se gli ISO raddoppiano è sufficiente metà quantità di luce, e così via (questo è il motivo per cui anche gli ISO vanno essenzialmente di fattori due, a parte finezze: 100, 200, 400, 800, etc. Significa che con ISO 800 è sufficiente una quantità di luce un ottavo di quella che serviva con ISO 100, ovvero si può fotografare una scena che produca un illuminamento all'indietro dell'obiettivo un ottavo rispetto a ISO 100).
- Comunque, concentrandoci per il momento solo su tempo e diaframma, otteniamo che la quantità di luce ottimale ('OK') per una foto è proporzionale a T e inversamente proporzionale a n_D^2 :

$$Q_v(\text{OK}) \propto \frac{T}{n_D^2},$$

ovvero

$$\frac{T}{n_D^2} = \text{cost},$$

ovvero, possiamo fare una foto correttamente esposta con il settaggio $[T_0, n_{D_0}]$, avremo una foto altrettanto correttamente esposta con $[2 \times T_0, \sqrt{2} \times n_{D_0}]$, $[T_0/2, n_{D_0}/\sqrt{2}]$, $[4 \times T_0, 2 \times n_{D_0}]$, e così via, secondo quella che si chiama *regola di reciprocità* (aumento del tempo diminuendo opportunamente l'apertura, e viceversa).

¹³Nota: per motivi che (almeno per il momento) non stiamo a spiegare, nella fotografia non interessa il valore assoluto del diametro del diaframma, ma soltanto il diametro diviso la lunghezza focale, ovvero $d/f = n_D$. Ne segue che a parità di illuminazione dell'oggetto da riprendere quello che conta è il tempo e il numero di diaframma, indipendentemente dalla 'focale' dell'obiettivo che si sta usando.