Fisica per SMIA (G. D'Agostini)
— Quaderno individuale (AA 2022-2023) —

17 luglio 2023
[corregge un refuso nel problema 5.1 della versione 'finale' del 9 giugno]

Informazioni varie

- Il quaderno deve avere le pagine numerate, in modo da poter effettuare eventuali rimandi (ad esempio se ci si accorge, anche dopo settimane, che un problema era errato basta sbarrarne la soluzione e fare un rimando) e creare un indice a fine corso.
- Nello svolgimento dei problemi si raccomanda di seguire le raccomandazioni suggerite nella Lezione nr. 5. dell'8 marzo.
- Ovviamente, per eseguire i conti si possono usare i programmi al computer preferiti, senza però perdere la manualità all'uso della calcolatrice tascabile, che sarà il solo strumento di calcolo consentito all'esame.
- I problemi proposti vanno svolti regolarmente, ovvero *possibilmente* prima della lezione successiva.[1]
- Sul quaderno le soluzioni vanno identificate con la lezione nella quale i problemi sono stati assegnate e con il nr di problema della lezione (ad es 1.2, etc.).
- È sconsigliato trascrivere le tracce, mentre si raccomanda di appuntarsi bene, seppur in modo schematico il procedimento e le ipotesi (leggi fisiche, etc.) usate per svolgerlo in quanto saranno molto utili per la preparazione all'esame (vedi punto successivo).
- Chi, alla fine del corso ha il quaderno in regola beneficia di due vantaggi:
  - esonero dalla prova scritta;
  - orale consistente nel discutere tre problemi scelti a caso poco prima (20-30 min) dell'orale.
    (Durante l'orale sarà possibile consultare il *formulario del corso*.)

  Queste agevolazioni sono valide nella sola sessione estiva.
- Le cose 'da sapere' sono costanti fisiche e altro che... andrebbero sapute.

[1] Ovviamente questo non può essere vero la prima volta che questo file comparirà online la prima volta.

1. Lun 27 febbraio

1. Primo test di autovalutazione. Si riportino sul quaderno le soluzioni dei quesiti
   (a) nr 3;
   (b) nr 4;
   (c) nr 5;
   (d) nr 6;
   (e) nr 7;
   (f) nr 8.
2. Misure di densità eseguite in aula:
   (a) cilindro;
   (b) sfera;
   (c) parallelepipedo (trascurando e tenendo conto della spinta di Archimede);
   (d) prisma;
   (e) cono;
   (f) sasso.

2. Mer 1 marzo

1. Secondo test di autovalutazione. Si riportino sul quaderno le soluzioni dei quesiti
   (a) nr 2;
   (b) nr 3;
   (c) nr 4.
2. Partendo dalla costante solare 'sulla' Terra (fuori dall'atmosfera)
   (a) valutare la potenza totale che arriva sul 'disco terrestre';
   (b) valutare l'irraggiamento (kW/m^2) su un corpo distante dal Sole il doppio della Terra;
   (c) valutare l'irraggiamento (kW/m^2) su Venere e su Marte;
   (d) valutare la potenza totale emessa dal Sole (W);
   (e) valutare l'irraggiamento (kW/m^2) dalla superficie del Sole;
   (f) dal risultato ottenuto nel punto 4 e, facendo uso della famosa $E = m\,c^2$, valutare la quantità di massa trasformata in energia ogni secondo all'interno del Sole a causa delle reazioni nucleari (fusione).
3. [Extra] Un'auto passa da 0 a 100 km/h in 10 secondi.
   (a) convertire in m/s la velocità finale;
   (b) calcolare l'accelerazione media.
4. Ricavarsi, *sommando gli infiniti volumetti infinitesimi*,
   (a) il volume di un cono di altezza h e raggio di base R;
   (b) il volume di una sfera di raggio R.

3. Gio 2 marzo

1. Misura della densità dell'aria usando i dati dell'*esperimento* eseguito in aula riempiendo di aria una bottiglia inizialmente (quasi) vuota, riportando i risultati in

    - g/L, g/cm^3, g/dm^3, kg/m^3.

    Confrontare il risultato con i valori 'nominali' trovati in rete.
    (Si ricorda che la densità dell'aria dipende da tanti fattori).

2. Esprimere l'accelerazione di caduta libera ('g') in (km/h)/s.

3. Problema della distanza della statua della Minerva (dettagli sul sito).

4. Continuazione:

    (a) valutare la larghezza *angolare* del pollice visto dall'occhio dell'osservatore;

    (b) esprimere l'angolo in radianti, calcolandosene anche il suo inverso (ovvero $1/\theta$).

5. Distanza del Cupolone da dove è stata scattata la foto (vedi sul sito del corso).

6. A che distanza dall'osservatore si devono trovare

    (a) un pallone di calcio;

    (b) una pallina da tennis;

    affinché abbiano lo stesso diametro angolare con cui ci appaiono approssimativamente Lune e Sole? (Non guardare direttamente il Sole!!)
    [Per le dimensioni regolamentari di palloni e palline si cerchi su internet.]

4. Lun 6 marzo

1. [Extra] Problema nr. 6 p. 2 'vecchia dispensa'.

2. [Extra] Problema nr. 8 p. 2 'vecchia dispensa'.

3. [Extra] Problema nr. 1 p. 9 'vecchia dispensa'.

4. [Extra] Prendendo come riferimento un fabbisogno 'di riferimento' (poi è facile scalare i risultati) di 2000 kcal al giorno e assumento (molto approssimativamente) che il grosso dell'energia venga dissipata durante le ≈ 16 ore di veglia, si calcoli la potenza media dissipata (in Watt) da una persona.
    (Si ricorda che 1 W = 1 J/s, mentre per la conversione kcal $\leftrightarrow$ J si veda su libri di testo o in rete.)

5. Mer 8 mar

1. Un punto materiale viaggia lungo una traiettoria rettilinea alla velocità di 1 m/s. Ad un certo istante ($t_0 = 0$) comincia a risentire di una ~~forza~~ accelerazione(!) la quale

    - cresce linearmente con il tempo ed è nulla in t_0 mentre raggiungere il massimo di 1 m/s^2 al tempo $t_1 = 2\,$s;
    - da t_1 comincia a decrescere linearmente, fino ad annullarsi al tempo $t_2 = 4\,$s.

Dire, giustificando la risposta, se la velocità del punto materiale da t_2 in poi è uguale, maggiore o minore a quella che aveva all'istante t_0.

2. [Extra] Problema nr. 9 p. 3 'vecchia dispensa'.

3. [Extra] Problema nr. 4 p. 5 'vecchia dispensa'.

6. Gio 9 marzo

1. Con riferimento all'esperimento degli affondamenti,
   valutare la 'slope' attesa per i quattro andamenti lineari o linearizzati
   e confrontarla con quanto ottenuto empiricamente.

2. [Extra] Si calcoli le velocità

   (a) della Terra intorno al Sole (velocità media), esprimendola in km/s;

   (b) della Luna intorno alla Terra (velocità media), esprimendola in km/s;

   (c) di Roma intorno all'asse terrestre, esprimendola in km/h e in m/s.

   (Si usino delle unità di misura appropriate che aiutino la percezione della rapidità del movimento.)

3. [Extra] Un punto materiale si muove seguendo la seguente equazione oraria: $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ con $x_0 = 10\,\mathrm{cm}$ e $\omega = 10\,\mathrm{s}^{-1}$. Trovare $v(t)$, $a(t)$ e il rapporto $a(t)/v(t)$. In particolare, determinare i valori massimi e minimi di velocità e accelerazione.

4. [Extra] Un oggetto possiede una velocità che varia con il tempo secondo la funzione $v(t) = v_0\, e^{-t/\tau}$, con $\tau = 10\,\mathrm{s}$.

   (a) Calcolare il tempo necessario affinché la velocità del corpo si dimezzi.

   (b) Sapendo inoltre che $v_0$vale $10\,\mathrm{m/s}$, calcolare l'accelerazione in tale istante.

7. Lun 13 marzo

1. Facendo uso delle regolette di approssimazione per $\epsilon \ll 1$, trovare il rapporto fra ul campo gravitazionale sulla superficie terrestre e quello all'altezza della stazione orbitale ISS.

2. Trovare la condizione di galleggiamento di un corpo immerso in un liquido, ovvero calcolare la frazione di corpo immerso affinché l'oggetto sia in equilibrio.

3. Calcolare la pressione esercitata su un piano orizzontale da

   (a) pezzettino di foglio da stampanti avente una 'grammatura' di $80\,\mathrm{g/m^2}$;

   (b) una moneta da un centesimo ($m = 2.35\,\mathrm{g}$; $d = 1.63\,\mathrm{cm}$);

   (c) una moneta da un euro ($m = 7.46\,\mathrm{g}$; $d = 2.33\,\mathrm{cm}$).

4. [Extra] Dal valore 'nominale' della pressione atmosferica,

   (a) si calcoli la forza che incide normalmente a una superficie di $1\,\mathrm{m^2}$;

   (b) si calcoli quanto vale la massa di aria che sovrasta una superficie $1\,\mathrm{m^2}$ posta orizzontale (si trascuri il fatto che g varia – ma non troppo, per quello che ci interessa – con l'altezza);

   (c) si stimi quindi quanto vale la massa di aria di tutta l'atmosfera.

8. Mer 15 marzo

1. Facendo uso della legge di Stevino calcolare $\mathrm{d}P/\mathrm{d}h$ per acqua e aria.

2. Continuazione del secondo caso ($\mathrm{d}P/\mathrm{d}h^{(aria)}$), con riferimento al blocco di polistirolo ($\rightarrow$ prima lezione):

   (a) si calcoli la variazione di pressione fra superficie superiore e inferiore nei casi in cui il blocco sia verticale e orizzontale;

   (b) si calcoli le forze di pressione sopra e sotto nei due casi;

   (c) si calcolino, dalle forze di prossione sopra e sotto, la spinta di di Archimede nei due casi.

3. La 'ventosa' (tale è il suo nome commerciale) mostrata a lezione era costituita da due ventose circolari, ciascuna di diametro 11.7 cm.
   Calcolare la forza necessaria per staccarla, dopo che ha perfettamente aderito a un piano liscio, esprimendone il valore sia in newton che in *chilogrammo peso*.

4. Un oggetto è lasciato cadere da 3 m di altezza.
   Calcolare (trascurando la resistenza dell'aria, assunzione valida anche per i problemi che seguono)

   (a) il tempo impiegato a raggiungere il suolo;

   (b) la velocità raggiunta 'un istante' prima dell'impatto.

5. Un oggetto è lanciato verso l'alto e arriva a 2 m di altezza dal punto in cui si è staccato dalla mano. Calcolare:

   (a) la velocità con la quale si è staccato dalla mano:

   (b) il tempo impiegato a raggiungere il punto più alto.

6. Un oggetto è lanciato, inizialmente su un punto di un piano orizzontale è lanciato con un certo angolo, rispetto al piano orizzontale, tale che $v_x = v_y = 10\,\mathrm{m/s}$.
   Calcolare

   (a) il tempo impiegato a raggiungere il punto più alto;

   (b) la quota raggiunta;

   (c) il tempo necessario per ritornare alla quota iniziale;

   (d) il *tempo di volo*, ovvero l'intervallo temporale da quando è stato lanciato a quando è tornato alla quota iniziale;

   (e) lo spazio percorso orizzontalmente in tale lasso di tempo.

9. Gio 16 marzo

1. Si valuti lo spazio di 'caduta libera' di un oggetto

   (a) in prossimità della superficie terrestre;

   (b) alla quota della stazione orbitale ISS;

   (c) alla quota della Luna.

2. Un oggetto ruota su una circonferenza di un cerchio di raggio 2 m a velocità costante, compiendo ciascun giro in 1/2 secondo. Si valutino:

   (a) la velocità di rotazione (giri/s);

   (b) la velocità angolare ('ω', rad/s);

   (c) la velocità lungo la traiettoria circolare:

   (d) il modulo dell'accelerazione (centripeta).

3. Ricordando che in moto circolare uniforme velocità e accelerazione valgono rispettivamente (in modulo!) $v = \omega\, R$ e $a = \omega^2\, R$.

   (a) si calcoli l'espressione di ω in funzione di R e da v;

   (b) si calcoli quindi l'espressione di a in funzione di R e da v.

4. Un'automobile viaggia a 80 km/h su una curva che può essere vista come un arco di un cerchio di raggio 400 m.

   (a) Si calcoli l'accelerazione centripeta sulla vettura.

   (b) Sapendo inoltre che la vettura ha una massa di una tonnellata si calcoli la forza centripeta che agisce sulla vettura.

   (c) Infine, 'chi' esercita tale forza sulla vettura?

5. Si immagini un *ipotetico* satellite in orbita circolare 'radente' intorno alla Terra, ovvero leggermente sopra la superficie terrestre. (Tale satellite è soltanto ipotetico per effetto dell'atmosfera, ma la sua analisi è molto istruttiva e tale 'esperimento concettuale' fu inventato dallo stesso Newton.)
   Sapendo che l'accelerazione centripeta non può che essere l'accelerazione di gravità g, si calcoli la velocità orbitale di tale ipotetico satellite.

6. Un punto materiale, inizialmente fermo, ad un certo comincia a muoversi intorno ad un cerchio di raggio R con una velocità angolare che cresce, a partire da tale istante, linearmente con il tempo, ovvero $\omega(t) = \alpha \cdot t$, ove abbiamo indicato con α l'accelerazione angolare, ovvero $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$. Valutare

   (a) $\theta(t)$;

   (b) $\vec{r}(t)$, ovvero $\{x(t), y(t)\}$;

   (c) $\vec{v}(t)$, ovvero $\{v_x(t), v_y(t)\}$, e quindi $v(t)$, ovvero il suo modulo.

   (d) $\vec{a}(t)$, ovvero $\{a_x(t), a_y(t)\}$, e quindi $a(t)$, ovvero il suo modulo.

10. Lun 20 marzo

1. Dai i due punti $P_1 = (1, 3)$ e $P_2 = (-1, 1)$ del piano cartesiano, trovare:

   (a) i parametri della retta che passa per essi;

   (b) la retta che ha la stessa 'slope' ma passa per il punto $P_3 = (1, 0)$.

2. Date le seguenti coppie di forze (niente a che vedere che "le coppie delle forze"!) trovare la loro somma e l'angolo fra esse compreso

   (a) $\vec{F}_1 = (2, 2, 1)$ N e $\vec{F}_2 = (-4, -4, -2)$ N;

(b) $\vec{F}_1 = (1, 2, 3)\,\mathrm{N}$ e $\vec{F}_2 = (3, 2, 1)\,\mathrm{N}$;
(c) $\vec{F}_1 = (1, 2, -3)\,\mathrm{N}$ e $\vec{F}_2 = (3, 2, -1)\,\mathrm{N}$;
(d) $\vec{F}_1 = (2, 2, 0)\,\mathrm{N}$ e $\vec{F}_2 = (-4, 4, 0)\,\mathrm{N}$.

3. Mostrare, facendo uso di opportuni prodotti scalari, che in un moto circolare uniforme
   (a) il vettore $\vec{v}(t)$ è sempre ortogonale, istante per istante, sia al vettore $\vec{r}(t)$ che al vettore $\vec{a}(t)$;
   (b) il vettore $\vec{a}(t)$ è sempre opposto a $\vec{r}(t)$.
4. Mostrare che nel caso di moto circolare accelerato (vedi problema 9.6) $\vec{v}(t)$ è sempre ortogonale a $\vec{r}(t)$, mentre non è ortogonale ad $\vec{a}(t)$.
5. Dall'altezza della Stazione Orbitale ISS rispetto alla superficie terrestre (prendendo la cifra 'tonda' di comodo di 400 km) ricavarsi
   (a) il suo periodo di rotazione;
   (b) la sua velocità (in modulo), espressa sia in km/s che in km/h;
   (c) la sua velocità angolare, espressa sia in rad/s (quella usuale) che in gradi/min (più facilmente percepibile).
6. Sempre sulla ISS, assumendone una 'dimensione nominale' di 100 m:
   (a) si valuti la sua dimensione angolare vista da noi quando 'ci passa sopra la testa' (ovvero è *allo zenith*);
   (b) si confronti il risultato con la dimensione angolare della Luna (anch'essa 'circa allo zenit', per ovvi motivi, anche se la sua dimensione non dipende da dove si trova nel cielo, a parte piccole variazioni *relative* di distanza).
7. Come cambiano i risultati del problema precedente se la stazione orbitale è in una posizione intermedia fra orizzonte e zenith?
   (Per semplicità si usi un modello di Terra 'piatta', valida sicuramente 'localmente'.)
8. Trovare la distanza dei satelliti geostazionari rispetto al centro della Terra e al punto sulle superficie terrestre ad essi più vicino.

11. Mer 22 marzo

1. Imponendo la condizione che la forza centripeta sui pianeti del sistema solare sia la forza gravitazionale, ricavarsi, nell'ipotesi di orbite circolari (il primo punto è solo per 'riscaldamento'):
   (a) la terza legge di Keplero;
   (b) la dipendenza del periodo dalla distanza;
   (c) la dipendenza della velocità dalla distanza.
2. Riportare sulla carta logaritmica distribuita a lezione i punti sperimentali (simulati) riportati in `https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/dati_potenze.txt`.
3. (Continuazione del punto precedente) Una volta verificato che i punti sono linearizzati dall'uso delle scale log-log, si valutino i parametri di ciascuno dei 5 andamenti di potenza a cui i punti obbediscono.

4. [Extra] La velocità di un oggetto che viaggia in modo rettilineo varia secondo la legge oraria
$$v(t) = v_0\, e^{-t/\tau}\,,$$
con $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$ e $\tau = 100\,\mathrm{s}$,
   (a) Si calcoli il tempo impiegato dall'oggetto affinché la sua velocità si dimezzi.
   (b) Si calcoli il tempo impiegato dall'oggetto affinché la sua velocità diventi un decimo di quella iniziale.
   (c) Si calcoli l'espressione dell'accelerazione in funzione del tempo e si calcolino i valori di accelerazione
      i. all'istante iniziale;
      ii. quando la velocità si è dimezzata rispetto a quella iniziale;
      iii. quando la velocità è diventata un decimo di quella iniziale.

12. Gio 23 marzo

1. Nell'ipotesi che il risultato di sul diametro terrestre sia i buon accordo con quanto sappiamo oggi, si valuti la distanza lungo la superficie terrestre fra Alessandria e Siene (ora Assuan).
2. Si esegua l'analisi dei semplici esperimentini di lanci di monete eseguiti in aula, rispondendo alle **domande formulate sul sito**,
`https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/Lezioni_FisAI_22-23.html#23mar`.

13. Lun 27 marzo

1. Con riferimento alla foto presente sul sito della sequenza di foto scattate alla stazione orbitale ISS mentre attraversa la luna (che per semplicità supponiamo 'circa allo zenith'), e facendo uso dei risultati di problemi posti nelle lezioni precedenti,
   (a) si valuti la velocità angolare <u>rispetto al fotografo</u> della ISS mentre attraversa la Luna;
   (b) si valuti il tempo impiegato per attraversarla completamente;
   (c) si valuti il tempo fra uno scatto e l'altro, ovvero fra una posizione e la successiva della ISS;
   (d) si traduca tale tempo nella velocità della 'raffica' della fotocamera, espressa in fotogrammi al secondo.
2. Facendo uso dei dati dei pianeti del sistema solare
(`https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/dati_pianeti.txt`)
<u>per ciascun pianeta e nell'ipotesi di orbita circolare</u>
   (a) convertire la distanza dal Sole in metri;
   (b) convertire il periodo in secondi;
   (c) calcolare l'accelerazione centripeta;
   (d) calcolare la massa del Sole da questi dati e dalla costante G.

   (Ovviamante, per problemi di questo tipo è opportuno scrivere uno script per non ripetere la squenza di conti.)

3. Si immagini un trenino di n carrelli (es. $n = 3$) di uguale massa, che possono scivolare su piano orizzontale prino attrito. Sapendo che al primo carrello viene applicata una forza F orizzontale, calcolare

   (a) l'accelerazione del trenino (i vagoni sono solidali);

   (b) la tensione del filo fra un carrello e l'altro.

4. Un oggetto è poggiato su piano, il quale viene inclinato un po' alla volta e l'oggetto rimane fermo a causa dell'attrito statico. Sapendo che l'oggetto comincia a muoversi quando si raggiunge un angolo di 30°, trovare il coefficiente di attrito statico.

5. Un oggetto scende lungo un piano inclinato di 30 gradi rispetto al piano orizzontale. Sapendo che, a causa dell'attrito, il corpo impiega a percorrere il piano inclinato un tempo doppio a quello che avrebbe impiegato se non ci fosse stato attrito, ricavarsi il coefficiente di attrito dinamico oggetto-piano.

14. Mer 29 marzo

1. Sui dati della molla, visti nella lezione odierna,

   (a) riportare il periodo in funzione del numero di dischetti (o della massa sospesa) sulla carta log-log per valutare la legge di potenza fra T e m (o n);

   (b) idem per 'x' (punto terminale della molla) in funzione di m o di n;

   (c) ricavarsi la costante elastica della molla ('k').

2. Gli atronomi scoprono un nuovo pianeta nella nostra Galassia il quale gira intorno al suo sole con i seguenti parametri orbitali:

   - la distanza da tale pianeta e i suo sole è esattamente uguale alla distanza fra la Terra e il Sole;
   - la velocità angolare di tale pianeta è invece il doppio di quella della Terra.

   Si valuti il rapporto fra la massa di tale sole e la massa del nostro Sole.

3. Si calcoli il periodo di oscillazione di un oggetto fatto cadere nell'ipotetico pozzo passante per il centro della Terra visto a lezione e si confronti tale periodo con quello dell'altrettanto ipotetica orbita circolare radente (problema 8.5).

4. Continuazione del problema precedente: si calcoli la velocità massima (in modulo) raggiunta dal corpo fatto cadere in tale pozzo e la si confronti con quella di un corpo in orbita circolare radente.

5. A una molla di costante elastica $k = 100\,\mathrm{N/m}$, disposta verticalmente e inizialmente 'a riposo' (si trascuri la massa della molla stessa) viene appeso un oggetto di massa $500\,\mathrm{g}$.

   (a) Si calcoli di quanto essa si allunga (dopo che si sono spente le oscillazioni iniziali) per raggiungere la nuova posizione di equibrio.

   (b) Successivamente l'oggetto viene tirato verso il basso e quindi viene rilasciato con velocità iniziale nulla. Si calcolino il periodo di oscilazione e la velocità massima durante le oscillazioni nei casi in cui l'oggetto era stato spostato dalla posizione di equilibrio

   i. di 1 cm;
   ii. di 2 cm;
   iii. di 3 cm.

6. Come visto a lezione (a parte dettagli. . .), un pendolo 'semplice' *idealizzato* di lunghezza l, posto in prossimità della superficie terrestre, se inizialmente posto ad un ('piccolo'!) angolo θ_0 rispetto alla verticale e poi lasciato andare oscillerà nel seguente modo:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \,.$$

   Si ricavino

   (a) l'espressione della posizione $s(t)$ lungo l'arco di cerchio;
   (b) l'espressione della *velocità angolare* $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, a cui possiamo associare il simbolo v_θ e da non confondere con la *pulsazione* ω;
   (c) l'espressione della sua velocità $v(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$.

15. Gio 30 marzo

1. A proposito di calcolo dimensionale: mostrare che il periodo della molla con la massa sospesa (soggetta quindi alla forza peso) non può dipendere dal campo gravitazionale g. (Poi, per la ragione fisica più profonda si veda nei dettagli delle lezioni.)

2. Dimostrare che l'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x$$

   per la *generica variabile* x, con ω^2 una grandezza positiva avente le dimesioni di s^{-2} (per ovvi motivi legati alla 'struttura' dell'equazione), ha come soluzione generale

$$x(t) = X \cdot \cos(\omega\, t + \varphi)$$

   con X e φ due 'costanti' che dipendono dal problema specifico.

3. (Continuazione del problema precedente) Dimostrare che nel caso della molla, con condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_M \\ v(t=0) &= 0\,, \end{aligned}$$

   si ottiene la *famosa* soluzione $x(t) = x_M \cdot \cos(\omega t)$.

4. (Variante del problema precedente) Trovare la soluzione del moto della molla nel caso che inizialmente la massa sospesa si trovasse nel punto di equilibrio, ma ad essa viene impressa una velocità iniziale verso il basso (che abbiamo scelto convenzionalmente positivo) pari a v_0, ovvero con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(t=0) &= 0 \\ v(t=0) &= v_0 \; > 0\,. \end{aligned}$$

5. (Altra variante) Trovare la soluzione del moto della molla nel caso che inizialmente la massa sospesa si trovi nella posizione x_0 (a partire dal punto di equilibrio $\rightarrow$ verso il basso) e ad essa venga impressa una velocità iniziale verso il basso v_0, ovvero

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \ > 0 \\ v(t=0) &= v_0 \ > 0\,. \end{aligned}$$

(Per quanto riguarda l'inusuale espressione trigonometrica che compare nella soluzione, la semplifichi cercando su internet tale forma, in modo da rendere il risultato più intellegibile – come detto ripetutamente a lezione, imparare a memoria 'tutte' le formule trigonometriche è solo una perdita di tempo!)

6. A una molla di costante elastica 50 N/m e posta verticalmente (come nella dimostrazione in aula) viene sospesa una massa di 1.00 kg (circa il caso della molla mostrata in aula, con tutti i dischetti).
   (a) Trovare pulsazione e periodo di oscillazione.
   (b) Sapendo che ad un certo istante la massa sospesa (schematizzata, come di consueto, con un punto materiale) transita per posizione $x = 3.54\,\text{cm}$ con una velocità di 0.25 m/s (versi positivi verso il basso), trovare
      i. la forza di richiamo in quell'istante;
      ii. la forza totale, sempre in quell'istate, esercitata dalla molla sul 'punto materiale';
      iii. lo scostamento massimo dal punto di equilibrio raggiunto durante le oscillazioni;
      iv. la velocità massima raggiunta durante le oscillazioni.

16. Lun 3 aprile

Nota: si ricorda la raccomandazione generale di ricavarsi prima le 'formule risolutive' dei diversi quesiti e inserire solo in seguito (qualora sia richiesto) i valori numerici.

1. In un esperimento dimostrativo un oggetto di 2 kg viene fatto cadere sotto effetto della sola forza peso da un'altezza di 3 m. Si calcoli (trascurando altre forze):
   (a) il lavoro compiuto dalla forza peso nello spazio di caduta;
   (b) l'energia cinetica raggiunta dall'oggetto un'istante prima di toccare il suolo;
   (c) la velocità finale raggiunta (un istante prima di toccare il suolo).
2. Sul problema precedente: dire quali delle tre risposte cambiano, e di quanto cambiano, se la massa dell'oggetto viene dimezzata.
3. A un oggetto di massa 500 g, vincolato a rimanere su una superficie orizzontale, viene impressa una velocità iniziale 10 m/s. Sapedo che il coefficiente di attrito dinamico fra oggetto e superficie vale $\mu_D = 0.2$, si calcoli
   (a) l'energia cinetica iniziale;
   (b) la forza di attrito dinamico che agisce sul corpo (finché esso non si arresta);
   (c) il lavoro effettuato dalla forza di attrito mentre l'oggetto avanza 10 m (attenzione al segno!);

(d) l'energia cinetica che l'oggetto ha perso in 10 m;

(e) l'energia cinetica residua;

(f) la velocità residua;

(g) lo spazio totale che l'oggetto potrebbe percorrere affinché la sua energia cinetica (e quindi la sua velocità) si annulli completamente.

4. Sullo stesso problema: quanto valgono invece, rispettivamente, i lavori compiuti da

   (a) la forza peso;

   (b) la rezione vincolare della superficie.

5. A una molla di costante elastica 50 N/m e posta verticalmente (come nella dimostrazione in aula) viene sospeso un oggetto di massa di 1.00 kg (circa il caso della molla mostrata in aula, con tutti i dischetti – vedi problema 15.6 per pulsazione e periodo).
   L'oggetto sospeso viene tirato verso il basso e tenuto fermo in $x_M = 5\,\mathrm{cm}$ (essendo, come di norma, $x = 0$ la posizione di equilibrio).
   Successivamente, ad un certo istante ($t = 0$) esso viene rilasciato (quindi con velocità iniziale nulla) e comincia ad oscillare.

   (a) Calcolare il lavoro compiuto dalla forza di richiamo dall'istante iniziale a quando il corpo transita per il punto di equilibrio.

   (b) Calcolare l'energia cinetica che esso ha quando transita nel punto di equilibrio,...

   (c) e quindi la sua velocità (in modulo).

   (d) Si confronti con quanto ottenuto nel problema 15.6.

6. Continuazione del problema precedente:

   (a) Ricavarsi l'espressione (non servono calcoli numerici) del lavoro compiuto dalla forza di richiamo quando l'oggetto va

      i. da $x = 0$ a $x = -x_M$;
      ii. da $x = -x_M$ a $x = 0$;
      iii. da $x = 0$ a $x = x_M$;
      iv. da $x = x_M$ a $x = -x_M$;
      v. da $x = -x_M$ a $x = x_M$.

   (b) Cosa si può dire della variazione di energia cinetica nei cinque casi del punto precedente?

17. Mer 5 aprile

1. Un punto materiale di massa m scende lungo un piano lungo l, privo di attrito e inclinato di un angolo θ rispetto al piano orizzontale.

   (a) Ricavarsi l'espressione del lavoro effettuato dalla forza peso durante la discesa del punto materiale lungo il piano.
   Nota aggiunta: è istruttivo arrivare a tale espressione (che risulterà la stessa) in due modi diversi:

      i. usare la componente della forza peso lungo il pliano inclinato;
      ii. direttamente la forza peso, ovvero mg diretta verso il basso.

(b) Trasformare la formula ottenuta nel punto precedente in modo da esprimerla in funzione dell'altezza iniziale (h) del punto materiale rispetto al piano orizzontale.

(c) Da quanto ottenuto nel punto precedente si ricavi l'espressione della velocità (in modulo) che il punto materiale ha quando raggiunge il piano orizzontale, ipotizzando che esso avesse inizialmente velocità nulla.

(d) Infine, si immagini il caso in cui il punto materiale cada verticalmente dal punto iniziale, percorrendo quindi una distanza d per arrivare al piano orizzontale e si confronti il risultato con quanto ottenuto nel punto (b).

2. Trascurando la resistenza dell'aria, calcolare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza di gravità su un oggetto di massa m che va dalla superficie terrestre all'*infinito*, ovvero da $r = R_T$ a $r \to \infty$.
(Come il problema dell'orbita radente, del cannone di Newton e del pozzo per il centro della Terra, si tratta di una idealizzazione, ma quello che si impara è molto istruttivo anche in questo caso.)

3. Un pallone da massa 430 g cade su un pavimento speciale (d'acciao) con una velocità (un istante prima dell'urto al suolo) pari a 6.26 m/s. Dopo il rimbalzo la velocità iniziale verso l'alto è pari a 5.33 m/s.
Si calcolino

   (a) la variazione *percentuale* di energia cinetica del pallone;

   (b) la variazione di quantità di moto.

4. Valutare la densità dell'uovo di polistirolo, trascurando o tenendo conto della spinta di Archimede.

5. Un'oggetto di 100 g di alluminio (calore specifico circa 1/5 di quello dell'acqua) inizialmente a 80 gradi è immerso in 200 g di acqua a 20 gradi: trovare temperatura di equilibrio.

6. Si hanno 50 litri di acqua a 80 gradi. Quanta acqua fredda (a 15 gradi) bisogna aggiungere per ottenere una temperatura finale di equilibrio di 35 gradi?

7. Un oggetto di 100 g è estratto dall'acqua in ebollizione e raffreddato in 200 g di acqua inizialmente a 20 gradi. Sapendo che acqua e oggetto (schematizzati come un *sistema isolato*) raggiugono una temperatura di equilibrio di 24.5 gradi, calcolare il calore specifico dell'oggetto sia in cal/g°C che in J/kg°C.

18. Mer 12 aprile

1. Si immagini di avere due recipienti di forma cilindrica posti uno affianco all'altro. Il primo, di sezione A_1, è riempito di acqua fino al livello h_1. Il secondo, di sezione A_2 , è riempito di acqua fino al livello h_2.
Ad un certo istante i due cilindri sono posti in comunicazione mediante un tubo posto sul fondo. Per il *principio dei vasi comunicanti*, dopo un certo tempo l'acqua si stabilizzerà allo stesso livello h_{eq} in entrambi i recipienti.
Si calcoli l'espressione di h_{eq}. [Ricorda qualcosa?]

2. Un oggetto scivola senza attrito lungo un piano di 2 m inclinato di 30° rispetto al piano orizzontale.
Si calcoli la velocità raggiunta al termine del piano inclinato.

3. (Variante del problema precedente) Si assuma che, a causa dell'attrito dinamico, l'oggetto arrivi in fondo al piano inclinato con una velocità di 4.0 m/s.

    (a) ~~Si calcoli il lavoro compiuto (con il segno!) dalla forza di attrito.~~[2]

    (b) Si calcoli il coefficiente di attrito dinamico.

4. Rispondere al quesito (b) del problema 8.4 senza far uso dei dettagli cinematici, ma, più semplicemente, considerando il lavoro compiuto dalla forza peso e la variazione di energia cinetica dell'oggetto.[3]

5. Idem per quanto riguarda il quesito (a) del problema 8.5.[3]

6. Una persona vuole sollevare di un metro un oggetto di massa 100 kg. Siccome la persona riesce ad esercitare al più una forza di 400 N pensa a risolvere il problema mediante un piano inclinato.
   Nell'ipotesi che riesca ad organizzarsi con un piano inclinato di attrito trascurabile, si calcolino

    (a) la lunghezza di tale piano;

    (b) l'angolo di inclinazione.

7. Si vuole riempire fino al livello h un serbatorio cilindrico di sezione A pompando acqua dall'esterno con un tubo collegato al fondo del recipiente. Per semplicità si assuma che l'acqua venga 'pescata' da un grande stagno il cui livello corrisponda esattamente al fondo del recipiente – in pratica questa modellizzazione implica che possiamo trascurare il lavoro per portare l'acqua dallo stagno al fondo del serbatoio, concentrandoci solo sul lavoro necessario per farla salire in alto.
   Si immagini che a un certo istante il serbatoio sia riempito fino al livello x ($< h$).
   Il lavoro (infinitesimo) necessario per aumentare il livello di $\mathrm{d}x$ è pari a quello necessario per innalzare una massa d'acqua infinitesima $\mathrm{d}m$ affinché vada ad occupare un dischetto infinitesimo di sezione a A, spessore $\mathrm{d}x$ e situato a un'altezza x.
   Facendo uso di questo ragionamento,

    (a) si scriva l'espressione del lavoro infinitesimo $\mathrm{d}L$;

    (b) si calcoli quindi, *sommando gli infiniti lavori infinitesimi*, il lavoro (totale) per riempire il serbatoio fino al livello h;

    (c) si esprima infine il risultato ottenuto in funzione di h e della massa d'acqua contenuta nel serbatoio.

19. Gio 13 aprile

1. Le dimensioni dell'Aula Picone, approssimata a un parallelepipedo, valgono circa $8 \times 13 \times 4\,\mathrm{m}^3$.

    (a) Calcolare la massa di aria in essa contenuta.

    (b) Calcolare la capacità termica di tale massa di aria
    (a tale proposito si veda il punto nr. 17 delle cose *da sapere*.)

[2] Per rispondere a questa domanda serve conoscere la massa dell'oggetto!

[3] Da questa lezione è **fortemente sconsigliato usare 'complicazioni cinematiche'** non richieste per ottenere risultati facilmente ottenibili mediante considerazioni energetiche!

(c) Calcolare la massa di acqua che ha la stessa capacità termica di tale massa di aria.

(d) Calcolare la quantità di calore, espressa sia in kcal che in kJ, necessaria per innalzare la temperatura di tale massa di aria (e quindi della massa acqua ad essa equivalemnte per quanto riguarda la capacità termica) di 1 grado.

2. Una signora ha messo una pentola d'acqua sul fornello per preparate la pasta. Quando l'acqua sta per cominciare a bollire riceve una telefonata. Presa dalla telefonata la signora lascia l'acqua a bollire e quando se ne ricorda sono praticamente evaporati tutti e tre i litri di acqua contenuti nella pentola.

   (a) Calcolare l'energia sprecata

      i. in kcal;

      ii. in joule;

      iii. in kWh ('chilowattora', essendo un kWh l'energia fornita in un'ora da una sorgente di 1 kW di potenza – provare a calcolarsi il fattore di conversione prima di cercare in rete, sapendo che $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$).

   (b) Sapendo inoltre che in fornello ha una potenza di 2 kW si calcoli la durata della conversazione telefonica.

3. La guida di uno scivolo con giro della morte ha il punto più alto, rispetto al terreno, di 10 m. Il punto più alto del giro della morte rispetto al terreno è a una quota di 5 m, essendo approssimabile a un cerchio disposto verticalmente di raggio $R = 2.5\,\mathrm{m}$. Calcolare, trascurando gli attriti,

   (a) la velocità nel punto più alto del giro della morte;

   (b) l'accelerazione centripeta nel tratto di cerchio intorno al punto più alto del giro della morte;

   (c) la forza centripeta nello stesso punto, sapendo che il corpo che scivola ha una massa di 100 kg.

4. (Continuazione del problema precedente) Nel punto più in alto le forza in gioco sono la forza peso e la reazione vincolare della guida e quindi la forza centripeta è dovuta alla somma di queste due (entrambe dirette verso il basso). Da questa considerazione si calcoli il valore della reazione vincolare T.

5. (Ancora sul problema del giro della morte.) Siccome un contatto fra corpo che scivola e guida nel punto più alto equivale alla condizione che $T \geq 0$ (con l'espressione di T ricavata nel punto precedente), calcolare la quota minima (in unità di R) dalla quale l'oggetto deve cominciare a scivolare affinché riesca ad effettuare il giro della morte (ovviamente trascurando gli attriti).

6. Un corpo, sottoposto a una forza conservativa dipendente da x, ha una energia potenziale data dalla funzione
$$E_p(x) = K\,(x^2 - 2ax + a^2)$$
con la costante K pari a $10\,\mathrm{J/m^2}$ e $a = 10\,\mathrm{cm}$.

   (a) Si calcoli l'espressione di tale forza, ovvero di $F(x)$.

   (b) Si calcoli il punto di equilibrio, ovvero quello in cui la forza si annulla.

   (c) Dire se tale punto di equilibrio è *stabile*, *instabile* o *indifferente*.

(d) Calcolare il valore della forza per $x = 0$ e $x = 20\,\text{cm}$.

[Va da sé che è raccomandato plottare $E_p(x)$ al fine di capire meglio il problema.]

7. Facendo uso "dell'espressione del lavoro compiuto dalla forza di gravità su un oggetto di massa m che va dalla superficie terrestre all'*infinito*, ovvero da $r = R_T$ a $r \to \infty$" ($\to$ problema nr. 17.2),

   (a) si calcoli l'ipotetica$^{(*)}$ *velocità di fuga* dal pianeta Terra, ovvero la velocità con la quale bisogna inviare un corpo verso l'alto affinché arrivi a *distanza infinita con velocità praticamente nulla*
   (si ricavi prima l'espressione di v e quindi il suo valore numerico sia in km/s che in km/h);

   (b) si confronti tale risultato (sia espressione che valore numerico) con la velocità di un oggetto che gira intorno alla Terra in una ipotetica 'orbita radente'
   ($\to$ problema 9.5).

   [$^{(*)}$ Come al solito, stiamo trascurando l'effetto dell'atmosfera terrestre.]

20. Lun 17 aprile

1. Un pendolo (idealizzato come al solito) di lunghezza l è inizialmente ($t = t_0$) a riposo a un angolo θ_0 (non necessariamente 'piccolo'!) rispetto alla verticale. Sapendo che ad esso è sospeso un punto materiale di massa m, si trovi

   (a) l'espressione dell'energia potenziale per $t = t_0$;

   (b) l'espressione del modulo della velocità del punto materiale quando esso transità nel punto più in basso.

2. (Continuazione del problema precedente) Si confronti il risultato nel punto (b) del problema precedente con quanto era stato ottenuto nel problema 14.6.
   Per capire meglio la differenza numerica fra i due risultati, si pensi al caso pratico in cui l vale un metro e diversi valori di θ_0:

   (a) 1 grado;

   (b) 5 gradi;

   (c) 10 gradi;

   (d) 30 gradi.

3. Variante del problema 18.7: con piccole modifiche ai conti svolti,

   (a) si risolva lo stesso problema nel caso in cui il serbatoio cilindrico abbia il fondo a un livello h_0 rispetto al livello del 'lago' dal quale si pesca l'acqua.

4. Usando quanto appreso nei problemi 18.1 e 18.7, si immaginano due recipienti cilindrici come nella formulazione del problema 18.1. Quindi

   (a) facendo uso di quanto ottenuto nel problema 18.7 e di quanto abbiamo imparato sull'energia potenziale, si ricavi l'espressione dell'energia potenziale dell'acqua

      i. nel recipiente 1 quando era stato riempito al livello h_1;

      ii. nel recipiente 2 quando era stato riempito al livello h_2;

iii. nei due recipienti collegati, dopo che hanno raggiunto il livello di equilibrio h_{eq}.

(b) Si calcoli l'espressione della variazione di energia potenziale da quando i due recipienti erano riempiti ma isolati a quando sono comunicanti e hanno raggiunto il livello di equilibrio.

5. Si immagini un punto materiale di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ per il quale l'energia potenziale ha la seguente espressione (che si raccomanda di graficare!)

$$E_p(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}\,,$$

con $a = 10\,\mathrm{J{\cdot}m}$ e $b = 1\,\mathrm{J{\cdot}m^2}$.

(a) Trovare l'espressione del valore di x (lo si indichi con x_m) per il quale la forza su di esso si annulla.

(b) Calcolare anche il valore numerico di x_m, con i dati del problema, e spiegare perché si tratta di un punto di equilibrio stabile.

(c) Sviluppare in serie di Taylor $E_p(x)$ fino al secondo ordine nell'intorno di x_m.

(d) Indicando con z la differenza fra x e x_m mostrare quindi, a parte un irrilevante termine additivo, $E_p(z)$ ha la stessa espressione di un oscillatore armonico (per valori di $|z| = |x - x_m|$ *sufficientemente piccoli*).

(e) Si trovi quindi l'espressione del 'k' della *forza di richiamo* di tale oscillatore e se ne valuti anche il suo valore numerico (si raccomanda un controllo dimensionale al fine di assicurarsi che la formula ottenuta sia ragionevole).

(f) Si calcoli infine il periodo di oscillazione del punto materiale intorno alla sua posizione di equilibrio.

6. Un modello di batteria per bici elettrica può immagazzinare una energia[4] di $520\,\mathrm{W{\cdot}h}$.

(a) Si converta tale valore in joule e in kcal.

(b) Si calcoli la frazione di tale energia immagazzinata che occurre 'per farsi un tè', ovvero per scaldare 200 g di acqua di 80 °C (valori numerici approssimativi, ma tanto per avere un'idea se la cosa è possibile. . .).

7. In una ipotetica centrale idroelettrica l'acqua subisce una 'caduta', dal bacino di raccolta alla turbina, di 100 m. Sapendo il flusso d'acqua vale $1\,\mathrm{m^3/s}$ e assumendo unitaria l'efficienza di conversione dell'energia meccanica in energia elettrica, si calcoli la potenza prodotta da tale centrale.
(I valori numerici sono stati scelti in modo tale da poter essere facilmente riscalati ad altre situazioni realistiche.)

21. Mer 19 aprile

1. (Riformulazione del problema proposto all'inizio della lezione)
Data la funzione di due variabili

$$f(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - \beta x)$$

[4] Si veda ad esempio `https://www.niefactory.com/nief-tech/quanti-wh-quale-batteria-della-bicicletta-elettrica-sceglie` e si cerchi in rete sulle caratteristiche di questo tipo di batterie.

(a) mostrare che essa soddisfa la condizione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{(\omega/\beta)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,;$$

(b) mostrare che ω/β può essere interpretata (almeno dimensionalmente) come una velocità;

(c) mostrare che la relazione del punto (a) è soddisfatta da una qualsiasi dimensione che dipenda da '$\omega t - \beta x$', ovvero

$$f(x,t) = A\cdot g(\omega t - \beta x)\,,$$

con '$g()$' funzione arbitraria (purché, detto alla buona, 'tranquilla', ovvero continua, derivabile, etc.).

2. La funzione $f(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - \beta x)$ introdotta nel problema precedente può esser vista come

   - una funzione della sola t per una x <u>fissata</u> (che indichiamo come x_0), ovvero

   $$f(t) = A\cdot\cos(\omega t - \beta x_0)\,;$$

   - una funzione della sola x per un t <u>fissato</u> (che indichiamo come t_0), ovvero

   $$f(x) = A\cdot\cos(\omega t_0 - \beta x) = A\cdot\cos(\beta x - \omega t_0)\,.$$

   $\Rightarrow$ In analogia al periodo di una funzione sinusoidale funzione del tempo, che abbiamo già trattato in altri problemi, si trovi l'espressione della *periodicità spaziale*, ovvero quanto deve variare x affinché $f(x)$ si ripeta esattamente.

3. Trovare infine la relazione fra x e t affinché $\cos(\omega t - \beta x)$ si mantenga costante.

4. Si calcoli la potenza che arriva su un pannello di $10\,\mathrm{m}^2$ di superficie, in una giornata serena, nel caso che

   (a) il sole incida orgogonalmente alla superficie;

   (b) i raggi solari formino un angolo di 30° con la normale alla superficie;

   (c) i raggi solari formino un angolo di 45° con la normale alla superficie; i raggi solari formino un angolo di 60° con la normale alla superficie.

5. Data la funzione

   $$f(x) = \frac{1}{\log(1+\sin^4(1+x))} - 1$$

   (a) plottare la funzione fra $x = 0$ e $x = 1$;

   (b) calcolare l'integrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

      i. con WolframAlpha;

      ii. 'sparando' un gran numero di *punti a caso* nel rettangolo delimitato da $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1.5$.

22. Gio 20 aprile

1. Sulla serie di problemi 1-3 della volta scorsa:

   - dire (facendo eventuali conti) cosa succede se invece di

   $$f(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - \beta x)$$

   abbiamo la funzione

   $$f(x,t) = A \cdot \cos(\omega t + \beta x)\,.$$

2. Immaginiamo che per fare una doccia sia necessario un flusso di 10 litri/min, che la temperatura iniziale dell'acqua sia pari a 10 °C e che la temperatura dell'acqua calda sia di 40 °C.

   (a) Calcolare la potenza necessaria per mantenere il flusso di acqua calda per la durata della doccia.

   (b) Assumendo quanta energia (in kWh e in J) è necessaria per una doccia di 5 minuti.

3. Gli astronomi scoprono un nuovo pianeta nella nostra Galassia il quale gira intorno al suo sole con i seguenti parametri orbitali:

   - la distanza da tale pianeta e i suo sole è esattamente uguale alla distanza fra la Terra e il Sole;
   - la velocità angolare di tale pianeta è invece il doppio di quella della Terra.

   Si valuti il rapporto fra la massa di tale sole e la massa del nostro Sole.

4. Un recipiente di massa 100 g ('tara') e contenente un litro di acqua è posto su un piano orizzontale. Il recipiente è connesso mediante un filo 'ideale' ("non estensibile e di massa trascurabile") che passa per una carrucola 'ideale' ad un altro recipiente di pari massa che penzola verticalmente dall'altro estremità del filo. Inizialmente i due recipienti sono immobili, a causa dell'attrito statico. Si versa poi lentamente dell'acqua nel recipiente sospeso al filo. Quando sono stati versati 300 grammi di acqua il sistema comincia a muoversi, ovvero il recipiente sul tavolo comincia a scivolare orizzontalmente e quello sospeso comincia a scendere.

   → Si calcoli il coefficiente di attrito statico fra il tavolo e il recipiente poggiato su di esso.

5. Dall'irraggiameto solare al suolo e dall'efficienza luminosa del sole si valuti l'illuminamento su una superficie ortogonale ai raggi solari in una giornata serena (e sole alto nel cielo).

6. Mediante un'app si misura che l'illuminamento su una parete (di una stanza non troppo illuminata). Esso vale 75 lx. Successivamente si accende una torcia elettrica, posta a 6.0 m di distanza distanza dalla parete e puntata ad essa ortogonalmente. La torcia proietta sulla parete un cerchio di luce 'quasi omogeneo' di diametro 240 cm. In queste condizioni l'illuminamento sale a 285 lx.
   Si calcoli il flusso luminoso emesso dalla torcia (trascurando i possibili effetti di diffusione della luce della torcia nella stanza).

23. Mer 26 aprile

1. Verificare che
$$f(x,t) = \sum_k A_k \cdot \cos\left[k \cdot \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_k\right]$$
soddisfa l'equazione di d'Alambert.

2. Una lampada sospesa emette la luce su tutto l'*angolo solido*. Sapendo che il flusso luminoso emesso dalla lampada è pari a 1000 lm, si calcolino
   (a) l'intensità luminosa della sorgente (cd);
   (b) l'illuminamento prodotto (lx) a 2 m di distanza dalla luce diretta.
   (Nota: si troverà un valore molto 'basso' rispetto a quello che ci si attende, se si è a provato a fare qualche misura di illuminamento in una stanza e si ha l'ordine di grandezza dei lumen di una lampada per uso domestico: il motivo è che in questo problemino non si tiene conto della luce riflessa da soffitto e pareti, come invece si sa dall'esperienza quoditiana.)

3. (Continuazione del problema 22.6) Trovare la sua intensità luminosa della torcia (cd).

4. (Ancora sul problema 22.6) Si immagini che nella parete ci sia un 'buco nero' circolare di diametro 2 cm (ovvero un buco netro il quale la luce che vi entra viene completamente assorbita).
   (a) Si calcoli la quantità di luce (emessa dalla sola torcia) che ci entra in 10 minuti.
   (b) Inoltre, assumento per la torcia un'efficienza luminosa di 100 lm/W, si calcoli l'energia che penetra (e viene assorbita) nel 'buco nero' in quei 10 minuti.

5. (Continuazione de problema nr. 2.2) Dal risultato ottenuto al punto (e) e facendo uso della *Legge di Stefan-Boltzman* ($\rightarrow$ cercare su Wiki il fattore di proporzionalità),
   (a) valutare la temperatura alla superficie del Sole (in Kelvin);
   (b) dire inoltre quanto diventerebbe la costante solare sulla Terra se tale temperatura dovesse aumentare del 10%.

6. La velocità di un oggetto che viaggia in modo rettilineo varia secondo la legge oraria
$$v(t) = v_F\,(1 - e^{-t/\tau})$$
per $t \geq 0$ con $v_F = 30\,\mathrm{m/s}$ e $\tau = 100\,\mathrm{s}$,
   (a) Si calcoli la velocità iniziale (ovvero $t = 0$).
   (b) Si calcoli la velocità 'finale' asintotica (ovvero $t \rightarrow \infty$).
   (c) Si plotti la curva della velocità in funzione del tempo fino a $t = 5\,\tau$.
   (d) Si calcoli il tempo impiegato dall'oggetto affinché la sua velocità diventi la metà del valore asintotico.
   (e) Si calcoli il tempo impiegato dall'oggetto affinché la sua velocità diventi il 99% di quella asintotica.
   (f) Si calcoli l'espressione dell'accelerazione in funzione del tempo e si calcolino i valori di accelerazione
      i. all'istante iniziale;
      ii. quando la velocità è giunta alla metà di quella asintotica.
   (g) Si plotti la curva dell'accelerazione in funzione del tempo fino a $t = 5\,\tau$

24. Gio 27 aprile

1. Un raggio di luce passa da aria ad acqua. Calcolare l'angolo (rispetto alla normale) che esso ha in acqua per i seguenti angoli di incidenza:
   (a) 30°;
   (b) 45°;
   (c) 60°;
   (d) 85°;
   (e) 89°.

   (Per l'indice di rifrazione dell'acqua si usi $n = 1.33$)

2. Un raggio di luce passa da acqua ad aria. Calcolare l'angolo (rispetto alla normale) che esso ha in aria per i seguenti angoli di incidenza:
   (a) 20°;
   (b) 30°;
   (c) 45°;
   (d) 48°;
   (e) 60°.

3. Una lastra piana di vetro ($n = 1.5$) di spessore 2 cm è attraversata da un raggio luminoso. Calcolare lo scostamento laterale fra la direzione originale del raggio luminoso e qualle uscente dalla lastra, per i seguenti angoli: 30°, 45°, 60°.

4. Si trovino gli angoli limite (oltre il quale si ha riflessione totale) nei seguenti casi:
   (a) acqua→aria;
   (b) vetro→aria (n vetro: 1.5);
   (c) diamante→aria (n diamante: 2.42).

5. Si immagini una vasca d'acqua coperta in modo opportuno modo che la luce possa entrare soltanto da un piccolo foro posto in prossimità della superficie. Viene inviato un raggio di luce bianca, con un angolo incidenza di 45°. Sapendo che il livello dell'acqua nella vasca è pari a 1 metro ('esatto'), si calcoli quanto sarà larga la banda arcobaleno che si forma sul fondo per effetto di rifrazione (per l'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda si usino i valori del plot riportato nella *galleria di immagini* sul sito del corso).

25. Mer 3 maggio

1. Facendo uso della formulazione della Legge di Snell facente uso di n_{21} e di n_{12}, intesi dome indice di rifrazione, rispettavamente, 'del mezzo 2 rispetto al mezzo 1' e 'del mezzo 1 rispetto al mezzo 2', si trovino n_{21} e n_{12} nei seguenti casi
   (a) acqua→aria;
   (b) vetro→aria;
   (c) diamante→aria.

2. Facendo uso del Principio di Fermat, nell'accezione di *cammino che richiede il 'minor' tempo per essere percorso* (si ricorda che nella formulazione più generale il principio parla di 'punto stazionario', quindi anche un massimo)
   $\Rightarrow$ si ricavi la legge di riflessione.

3. Facendo uso dello stesso principio

   (a) si ricavi la legge di rifrazione nel passaggio da un mezzo trasparente in cui la velocità viaggia a velocità v_1 a un mezzo trasparente in cui la velocità viaggia a velocità v_2;

   (b) confrontando poi il risutato con poi la Legge di Snell si ricavi la relazione fra la velocità della luce del vuoto ('c') e quella nel mezzo trasparente di indice di rifrazione n.

4. $\Rightarrow$ Problema proposto sul sito del corso, lezione odierna.
   [Si tratta di trovare gli angoli θ_1, θ_2 e θ_3 (e i rispettivi punti x_1, x_2 e x_3) tali che i cammini delle onde provenienti dalle due fenditure differiscano di λ, 2λ e 3λ.]

26. Gio 4 maggio

1. Calcolare il tempo impiegato dalla Terra per ruotare intorno al proprio asse di mezzo grado (corrispondente a ciorca il diametro angolare di Sole e Luna)

2. Calcolare quindi di quanto si allunga il tempo di illuminazione solare sulla Terra, intorno all'equizio, per l'effetto della deviazione dei raggi luminosi in prossimità dell'orizzonte (deviazione di c.a 33').

3. Dato uno specchio concavo di raggio di distanza focale f, con un oggetto distante $p = 5f$ dal 'piano' dello specchio (siamo in approssimazione di Gauss con raggi *parassiali*)

   (a) si faccia la costruzione grafica dell'immagine, ovvero
      - si disegni il simbolo dello specchio in approssimazione di Gauss, posto verticalmente e con la superficie a sinistra;
      - si tracci l'asse ottico (orizzontale e passante per il centro dello specchio);
      - si tracci il punto focale F, sull'asse ottico e a un certo numero di quadratini (o cm se si usa carta millimetrata) a sinistra dello specchio;
      - si tracci la freccia verticale che indica l'oggetto;
      - si traccino i due *raggi notevoli* che passano (essi stessi o il loro prolungamento) per la punta della freccia;
      - si determini, dall'intersezione dei riflessi dei due raggi notevoli o dei loro prolungamenti, l'immagine della punta della freccia, e si tracci quindi la *freccia immagine*.

   (b) si calcoli la posizione lungo l'asse ottico dell'immagine facendo uso dell'*equazione dei punti coniugati*:
   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}\,,$$
   con i valori misurati in quadretti o in centimetri, e si verifichi che q sia compatibile con quanto trovato graficamente;

(c) si valuti l'ingrandimento *lineare*, ovvero il rapporto fra y' e y dalla formula

$$M = -\frac{q}{p}\,,$$

ove un eventuale risultato negativo sta ad indicare che l'immagine è rovesciata, e la si confronti con quanto ottenuto con la costruzione grafica.

4. Si ripeta il problema precedente con $p = 2f$.
5. Si ripeta il problema precedente con $p = f/2$.
6. Si ripeta il problema precedente con $p = f/4$.
7. Si calcolino (soltanto) q e M nel caso di $p = f/10$, ovvero in questo caso non è richiesta la costruzione grafica.
8. Dall'equazione dei punti coniugati e dalla formula dell'ingrandimento lineare si calcoli il limite di q e di M per $p \to 0$, ovvero quando l'oggetto è 'vicinissimo' allo specchio.
   Suggerimento: prima di cominciare a fare i conti si pensi, con ragionamento qualitativo, a cosa ci si aspetta.
9. Uno specchio sferico convesso ha un raggio di curvatura R. Si costruisca l'immagine e si calcolino q e $M = -q/p$ nei seguenti casi (si ricorda che per uno specchio convesso f è negativo):
   (a) $p = 10\,|f|$;
   (b) $p = |f|$;
   (c) $p = |f|/10$.

27. Lun 8 maggio

1. Data una lente sottile convergente avente una lunghezza focale f, porre (come al solito a sinistra della lente) un oggetto di altezza h in $p = 3\,f$ e si costruisca l'immagine (di dimensione $|h'|$) usando i due raggi notevoli raccomandati a lezione.
   Notando quindi come il raggio che dalla punta della freccia rappresentante l'oggetto passa nel fuoco forma due triangoli simili, uno di base $p - f$ e altezza h, l'altro di base f e altezza $|h'|$,
   - si esprimi il rapporto $|h'|/h$ in funzione di f e p.

   (risultato che ci servità nel prossimo problema)
2. (Continuazione del problema precedente) Facendo uso della costruzione del punto precedente,
   (a) si scrivano le equazioni delle due rette che contengono i due raggi notevoli che vanno dalla lente alla punta della freccia rappresentante l'immagine;
   (b) si trovi il punto di intersezione fra le due rette, la cui ascissa darà l'espressione di q in funzione di f, h e $|h'|$.
   (c) usando l'espressione di $|h'|/h$ ricavata nel problema precedente,
      i. si riscriva q in funzione di f e p;

ii. si mostri come tale relazione è equivalente all'equazione dei punti coniugati mostrata (senza dimostrazione) a lezione.

(d) Si riscriva infine il rapporto $|h'|/h$ in funzione di p e di q, la quale dovrebbe ricordare una espressione nota

3. Un obiettivo ha una *focale* di 50 mm. Schematizzando l'obiettivo come una semplice lente convergente avente $f = 50\,\mathrm{mm}$ e indicando con h l'altezza dell'oggetto (ortogonale all'asse ottico) e con h' l'altezza dell'immagine, risolvere i seguenti problemi (a sinistra della freccia "⇒", ci sono eventuali altri dati, a destra sono indicate, con simboli autoesplicativi, le grandezze da calcolare)

   (a) $p = 50\,\mathrm{m}$; $h = 10\,\mathrm{m} \Rightarrow q,\ M,\ h'$;
   (b) $p = 3\,\mathrm{m}$; $h = 1\,\mathrm{m} \Rightarrow q,\ M,\ h'$;
   (c) $p = 1\,\mathrm{m}$; $h = 10\,\mathrm{cm} \Rightarrow q,\ M,\ h'$;
   (d) $p = 10\,\mathrm{cm}$; $h = 1\,\mathrm{cm} \Rightarrow q,\ M,\ h'$;
   (e) $p = 7\,\mathrm{cm}$; $h = 0.5\,\mathrm{cm} \Rightarrow q,\ M,\ h'$;
   (f) $p = 5.1\,\mathrm{cm}$; $h = 1\,\mathrm{cm} \Rightarrow q,\ M,\ h'$.

   A quali situazioni fotografiche corrispondono i sei casi presi in considerazione?

4. Data una lente divergente di $f = -5\,\mathrm{cm}$ e un oggetto avente dimensione trasversa $y = 2\,\mathrm{cm}$ si calcolino q M e y' e si costruisca l'immagine in scala (controllando la consistenza dei risultati ottenuti) per

   (a) $p = 10\,\mathrm{cm}$;
   (b) $p = 2.5\,\mathrm{cm}$.

5. Il più semplice urto da analizzare è il cosidetto *anelastico* in una dimensione, in cui due 'corpi' (trattati come *punti materiali*) formanti (almeno <u>approssimativamente</u>) un *sistema isolato* dopo l'urto rimangono attaccati.
   Immaginiamo che inizialmente

   - il corpo 1, di massa m_1, ha velocità v_1 (non modulo!);
   - il corpo 2, di massa m_2, ha velocità v_2 (non modulo!).

   (Ovviamente v_1 e v_2 devono esser tali che ad un certo istante le posizioni dei due corpi coincidano, da cui l'urto.)

   (a) Applicando la conservazione della quantità di moto totale, si trovino
      i. l'espressione della quantità di moto totale prima e dopo l'urto:
      ii. l'espressione della velocità dopo l'urto dei due corpi attaccati;
      iii. l'espressione della variazione dell'energia cinetica.
   (b) Dire inoltre a cosa si riducono le tre espressioni ricavate nel punto precedente
      i. nel caso particolare in cui $v_1 \neq 0$ e $v_2 = 0$
      ii. nel caso particolare in cui $v_1 \neq 0$ e $v_2 = 0$ e $m_2/m_1 \to 0$.

28. Mer 10 maggio

1. Una lente di ingrandimento (convergente) ha una distanza focale di 5 cm. Viene posto un oggetto di dimensione trasversale $h = 1$ cm alla distanza p dalla lente. Calcolare, per i valori di p che seguono,

    - la posizione in cui si forma l'immagine (q);
    - l'ingrandimento lineare (M);
    - la dimensione trasversale dell'immagine (y');
    - l'angolo α_0 (dimensione angolare) con cui l'oggetto viene visto se si pone l'occhio a 20 cm dalla lente (ovviamente dall'altra parte rispetto all'oggetto);
    - l'angolo α a cui vista l'immagine se si pone l'occhio come nel punto precedente;
    - l'ingrandimento angolare α/α_0;

    (a) p = 4 cm;
    (b) p = 4.5 cm;
    (c) p = 4.99 cm;
    (d) p = 4.999 cm.

    Fare la costruzione grafica solo per $p = 4$ cm (si capirà bene che diventa 'impossibile' per gli altri casi).

2. Con riferimento all'animazione sul sito del corso sugli urti elastici,[5] e indicando con '1' il corpo nero (quello a sinistra) e con '2' quello blu (quello a destra), mostrare che in tutti e quattro gli urti vale la **regola dell'inversione della velocità relativa**, ovvero[6]

    $$v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2)\,,$$

    prestando attenzione ai segni. In particolare,

    - considerare le varie 'v', '$1/3\,v$', '$5/3\,v$', etc. come moduli delle velocità;
    - ne segue che v_1, v_2, v_1' e v_2' sono positive se la freccia è diretta verso destra e negative altrimenti (ad esempio nell'urto della prima animazione avremo $v_1 = +v$, $v_2 = -v$, $v_1' = -1/3\,v$ e $v_2' = +5/3\,v$).

    [Nota: dal punto di vista puramente matematico, la regola ricordata sopra è equivalente a $v_1 + v_1' = v_2 - v_2'$, ma è interessante regionare in termini di velocità relative.]

3. Sempre sulla stessa animazione, ma limitatamente al primo caso (quello con $m_1 = 2m$ e $m_2 = m$),
    ⇒ verificare che si conservano quantità di moto ed energia cinetica.

4. Problema nr. 9 del par. 11.8 della 'vecchia dispensa' (pendolo balistico).

5. Problema nr. 10 del par. 11.8 della 'vecchia dispensa' (pendolo balistico).

6. Problema nr. 13 del par. 11.8 della 'vecchia dispensa' (urto completamente anelastico + seguito con moto frenato a causa dell'attrito dinamico).

7. Problema nr. 14 del par. 11.8 della 'vecchia dispensa' (urto *idealizzato* come 'perfettamente elastico').

[5] `https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/galleria_FisAI_22-23.html#UrtiElastici`

[6] Questa espressione rende meglio della (239) l'idea del significato fisico di *inversione della velocità relativa*.

29. Gio 11 maggio

1. Problema nr. 6 del par. 11.8 della 'vecchia dispensa'.
2. Problema nr. 7 del par. 11.8 della 'vecchia dispensa'.
3. Un bicchiere di acqua di 200 g, inizialmente a 80 °C, si termalizza alla temperatura ambiente di 20°C.
   Sapendo che dopo 20 minuti la temperatura dell'acqua nel bicchiere ha raggiunto 42 °C,
   (a) determinare la costante di tempo dell'andamento esponenziale di raffreddamento;
   (b) determinare il parametro η che controlla la velocità di raffreddamento;
   (c) determinare il tempo che l'acqua ha impiegato a raggiungere 50 °C, valore intermedio fra la temperatura iniziale e quella asintotica;
   (d) calcolare il rapporto fra il tempo ottenuto nel punto precedente e la costante di tempo calcolata nel punto (a).
4. Analizzando il processo di termalizzazione verso una temperatura finale costante, associata a un 'fluido' di capacità termica infinita abbiamo incontrato l'*equazione differenziale* nella generica grandezza $x(t)$
   $$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot (x - x_F)\,,$$
   la quale ha come soluzione
   $$x(t) = x_F + (x_0 - x_F) \cdot e^{-t/\tau}\,,$$
   ove $x_0 = x(t = 0)$ e $x_F = x(t \to \infty)$.
   Alla luce di quanto appreso, si rivedano le espressioni di $v(t)$ dei problemi nr. 11.4 e 23.6:
   (a) riscrivere le espressioni di $v(t)$ che compaiono in tali problemi nella *forma canonica* con cui è stata scritta qui sopra la *generica* $x(t)$, facendo comparire in tali casi v_F e v_0.
   (b) scrivere le equazioni differenziali di cui le $v(t)$ dei due problemi sono soluzioni (anche in quasto caso scrivere le equazioni differenziali nella *forma canonica* con cui abbiamo scritto sopra dx/dt).
5. Per delle sue buone ragioni, un fisico è convinto che il numero di conteggi *rari* che risulteranno nell'esperimento in corso può essere dovuto a tre possibili valori del parametro λ di una distribuzione di Poisson:
   - $\lambda_1 = 1$;
   - $\lambda_2 = 3$;
   - $\lambda_3 = 5$,

   valori che egli reputa 'a priori' (ovvero in base alla sua migliore conoscenza del fenomeno che sta investigando e di tutte le informazioni che possiede fino a quel momento) ugualmente probabili.
   Calcolare le probabilità $P(\lambda_i\,|\,n)$ dei tre possibili valori di λ, alla luce dei numero di conteggi osservato nell'esperimento, nel caso l'esperimento dia rispettivamente

(a) $n = 0$;
(b) $n = 1$;
(c) $n = 2$.

6. (Continuazione del problema precedente) Un fisico teorico, si ritiene altresì certo che quelli siano i tre soli possibili valori di λ, ma, contrariamente al suo collega sperimentale, è convinto che la probabilità a priori di ciascun λ_i debba essere inversamente proporzionale al suo valore numerico.
   Dire quali saranno le probabilità $P(\lambda_i \,|\, n)$ che il teorico assegnerà ai tre possibili valori di λ dopo l'aggiornamento effettuato alla luce del numero di conteggi ottenuto dal collega sperimentale.

30. Lun 15 maggio

1. In una giornata piovosa senza vento, le tracce della pioggia sul finestrino laterale di un auto sono inclinate rispetto alla verticale. Sapendo che l'auto va 60 km/h su una strada pianeggiante e che le tracce di pioggia sul finestrino formano un angolo di 60° rispetto alla verticale, si valuti la velocità della pioggia.[7]

2. Sul problema del test dell'AIDS (vedi slides) e assumendo 1/100 per la probabilità che un italiano scelto a caso sia infetto dal virus HIV:
   (a) calcolare la propabilità che sia infetto alla luce dell'esito Positivo dell'analisi;
   (b) calcolare il rapporto $P(\text{Infetto})/P(\text{Non infetto})$
      i. prima dell'analisi;
      ii. dopo l'analisi (con esito 'Positivo').
   (c) Dire inoltre come cambia la probabilità di 'Infetto' e il repporto $P(\text{Infetto})/P(\text{Non infetto})$ se la stessa persona risulta positiva anche a una seconda analisi avente le stesse caratteristiche della prima.

3. Sul quesito del test di autovalutazione sulla crescita della ninfea:
   (a) calcolare la *costante di tempo* τ della crescita esponenziale;
   (b) calcolare il rapporto fra la sua superficie e quella dello stagno per $t = 0$, sapendo che per $t = 200\,\text{h}$ tale rapporto vale 1 (come dai dati del quesito);
   (c) calcolare tale rapporto per $t = 195\,\text{h}$;
   (d) calcolare tale rapporto per $t = -5\,\text{h}$ e $t = -10\,\text{h}$.

4. (Continuazione del problema precedente) Graficare l'andamento di tale rapporto in funzione del tempo usando opportuna scala logaritmica.

5. Si immagini un curioso ipotetico tacchino, il quale
   - mangia in continuazione;

[7] Per la velocità delle gocce di pioggia (**dopo** aver risolto il problema) si veda ad esempio `http://wxguys.ssec.wisc.edu/2013/09/10/how-fast-do-raindrops-fall/`.

- tanto mangia tanto ingrassa, ovvero

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dc}{dt}\,,$$

  ove m sta per la sua massa e c per il *cibo*;
- la sua *voracità*, definita come $v = \frac{dc}{dt}$, è proporzionale alla sua massa, ovvero

$$v(t) \;\propto\; m(t)\,,$$

  e quindi entrambe aumentano con il tempo (più cresce più è vorace; più è vorace e più rapidamente cresce).

Sapendo che per $t = 0$ la sua massa vale 1 kg e la sua voracità è pari a 10 g/h,

(a) trovare le costanti α e τ della crescita esponenziale;

(b) trovare il tempo che impiega a raddoppiare la sua massa;

(c) trovare quanto tempo impiega per pesare 100 kg (è un animale ipotetico. . .).

6. Riportare su carta millimetrata 'semilog' i dati del file dati_esponenziali_1.txt . Quindi

   (a) ricavarsi i parametri dell'andamento esponenziale $x(t) = x_0 \cdot e^{\alpha\cdot t}$

   (b) calcolare la *costante di tempo*;

   (c) calcolare il tempo di raddoppio o di dimezzamento, a seconda che l'andamento sia del tipo $x(t) = x_0 \cdot e^{t/\tau}$ o $x(t) = x_0 \cdot e^{-t/\tau}$.

7. Riportare su carta millimetrata 'semilog' i dati del file dati_esponenziali_2.txt , prestando attenziona al fatto che in questi 'dati' abbiamo *decrescite* esponenziale del modulo della differenza fra il valore istantaneo e il valore asintotico.
   Ricavarsi nei tre casi

   (a) la costante di tempo ('τ');

   (b) il tempo di dimezzamento ('$t_{1/2}$').

   Riportare sul quaderno anche la formula generale che lega $t_{1/2}$ a τ.

8. Analizzare i dati dell'*esperimento* delle sei scatole effettuato a lezione, ovvero

   (a) calcolare $P(H_i\,|\,W^{(1)})$ alla luce della prima osservazione (ove W sta per bianco);

   (b) calcolare $P(W^{(2)}\,|\,W^{(1)})$, ovvero di avere bianco alla seconda estrazione alla luce del risultato della prima;

   (c) calcolare $P(H_i\,|\,W^{(1)}, W^{(2)})$ condizionate dall'osservazione di due volte bianco;

   (d) calcolare quindi $P(W^{(3)}\,|\,W^{(1)}, W^{(2)})$.

31. Mer 17 maggio

1. Trasformare in Python lo script R `urti_pi.R` per analizzare gli urti elastici del video mostrato a lezione.

2. Scrivere uno script Python per valutare approssimativamente π mediante il metodo di Monte Carlo illustrato a lezione (vedi anche figura in 'galleria'). Fare una tabella del valore ottenuto all'aumentare del numero n di puntini 'sparati casualmente' all'interno del quadrato che contiene il quarto di cerchio (sono sufficienti una decina di valori, eventualmente con n – volendo si può anche graficare il valore di π ottenuto in funzione di n).

3. Un paracadutista di massa 100 kg (incluso l'equipaggiamento) durante il lancio raggiunge inizialmente una velocità di 200 km/h. Quindi, dopo aver aperto il paracadute, la velocità limite si riduce a 5 m/s.
   Nell'ipotesi che la resistenza dell'aria segua una legge del tipo $-\beta\, v$ (in realtà va con il quadrato),

   (a) si calcoli β con e senza il paracadute;

   (b) si calcoli la costante di tempo τ nei due casi;

   (c) si scriva l'espressione di $v(t)$ nei due casi.

4. Un veicolo di 1000 kg (inclusi autista e bagagli) viaggia su un tratto di strada perfettamente orizzontale alla velocità di 100 km/h. Improvvisamente è messo a folle e la velocità comincia a diminuire per effetto dell'attrito dell'aria. Nell'ipotesi che il solo attrito sia quello dell'aria e che la sua forza sia proporzionale alla velocità con $\beta = 30\,\mathrm{N/(m/s)}$:

   (a) si ricavi l'espressione della velocità in funzione del tempo, $v(t)$;

   (b) si calcoli il tempo impiegato affinché la velocità del veicolo si dimezzi.

   (c) Si calcoli inoltre l'espressione dell'accelerazione in funzione del tempo, $a(t)$.

5. (Analogo del problema nr. 29.5, ma per una distribuzione binomiale)
   Sappiamo che sono state effettuate 100 *prove* e sono stati ottenuti 25 *successi*. Abbiamo buoni motivi di ritenere che il parametro p della binomiale possa valere 0.24, 0.25 o 0.26, senza alcun motivo per credere che uno dei valori debba essere più probabile dell'altro.

   (a) Calcolare la probabilità di ciascun valore di p, ovvero $P(p_i \,|\, n, x)$, alla luce di tale informazione empirica.

   (b) Ripetere il conto nel caso avessimo avuto

      i. 250 successi su 1000 prove;

      ii. 2500 successi su 10000 prove.

6. Due ipotesi, H_1 e H_2, sono ritenute a priori ugualmente probabili. Vengono eseguiti opportuni 'test', in base ai quali gli esperti ricavano dei fattori di Bayes ('BF', ovvero *Bayes factor*), definiti come $\mathrm{BF}_i = P(R_i \,|\, H_1)/P(R_i \,|\, H_2)$, ove R_i sta per il 'risultato al test i-mo'. Essi sono:

   - $\mathrm{BF}_1 = 10$;
   - $\mathrm{BF}_2 = 30$;
   - $\mathrm{BF}_3 = 1/20$.

   Calcolare come variano le probabilità delle due ipotesi a mano a mano che vengono presi in considerazione, in sequenza, i tre fattori di Bayes.

32. Gio 18 maggio

1. Sul sito è mostrata la foto di una batteria per motoveicoli, con sopra riportate le sue specifiche.
   (a) Dal valore, detto alla buona, di 'A·h' ricavarsi la carica totale Q (convenzionale positiva) che la forza elettromotrice della batteria può portare dal potenziale più basso ('$-$') a quello più alto ('+').
   (b) Dal risultato precedente su Q facendo uso del dato nominale del 'voltaggio': calcolare il lavoro totale L che la forza elettromotrice della batteria compie per portare la arica Q dal potenziale più basso a quello più alto.
2. (Continuazione del problema precedente)
   (a) Calcolare la massa che un motore meccanico riesce a sollevare di 10 m compiendo un lavoro pari a L calcolato nel problema precedente.
   (b) Si immagini che tale lavoro L venga invece usato 'in qualche modo' (si pensi al mulinello di Joule o altro) per scaldare dell'acqua. Si calcoli la quantità di acqua che si riuscirebbe a scaldare da 10 a 70 gradi prima che la batteria si scarichi completamente (e, come al solito trascurando disperioni di vario tipo).
3. Una batteria avente una forza elettromotrice $f = 12\,\mathrm{V}$ è collegata a tre resistori poste 'in serie' (ovvero che sono attraversati dalla stessa corrente) di resistenza $R_1 = 60\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$ e $R_3 = 10\,\Omega$. Facendo uso della Legge di Ohm, calcolare
   (a) la corrente che scorre nelle tre resistenze;
   (b) la tensione (ovvero 'differenza di potenziale') ai capi di ciascuna resistenza;
4. Continuazione del problema precedente: sapendo inoltre che la batteria si scarica completamente dopo 24 ore di funzionamento continuativo, si calcoli anche (ovviamente nel modello semplificato in cui la batteria eroga sempre la stessa corrente alla stessa tensione finché non muore)
   (a) Il valore di 'A·h' della batteria;
   (b) seguendo lo stesso ragionamento usato nel punto b) del primo problama si calcoli l'energia totale fornita dalla batteria.
5. Un corpo, assimilabile a un 'punto materiale' e di massa $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ è a riposo su un piano privo di attrito. Esso viene urtato da un altro corpo, di massa $m_2 = 400\,\mathrm{kg}$ e sempre assimilabile a un punto materiale, il quale procede verso il primo alla velocità v_{2_0}. L'urto è perfettamente elastico e dopo l'urto entrambi i corpi proseguono nel verso della velocità del secondo.
   Successivamente il primo corpo urta elasticamente contro una parete di massa 'infinita' e torna indietro, colpendo il secondo corpo e quindi tornando su sé stesso, etc. etc.
   La serie di urti prosegue finché il secondo corpo torna indietro praticamente con la velocità che aveva inizialmente (in modulo), ma con verso invertito.
   [In pratica abbiamo descritto sommariamente l'animazione del video mostrato nella lezione nr. 31, `https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs`.]
   - Sapendo che la velocità iniziale del secondo corpo era pari a 10 m/s, si calcoli la velocità massima raggiunta dal primo corpo mentre va avanti e indietro fra la parete e il secondo corpo.

33. Lun 22 maggio

1. Ancora sulla batteria riportata sul sito (vedi anche problema nr. 32.1 e 32.2):

   - dalle specifiche riportate, calcolare la potenza 'nominale' che la batteria è in grado di erogare.

2. Sul *semplice circuito* riportato nei *Dettagli delle lezioni* ($\rightarrow$ `circ_fig_2_12.png`), $\Rightarrow$ trovare 'tutto', ovvero

   (a) valore della resistenza del parallelo fra R_1 e R_2;
   (b) valore della resistenza totale 'vista' dal generatore;
   (c) corrente elettrica che fluisce nel generatore (e quindi in R_0);
   (d) potenza erogata dal generatore;
   (e) potenza dissipata per effetto Joule in R_0;
   (f) differenze di potenziale ai capi di R_0 e del parallelo fra R_1 e R_2;
   (g) correnti che scorrono in R_1 e in R_2;
   (h) potenza dissipata per effetto Joule in R_1 e in R_2.

3. Sull'*esempio guida* riportato nei *Dettagli delle lezioni* ($\rightarrow$ `circ_fig_2_16.png`), $\Rightarrow$ 'risolvere il circuito' facendo uso delle Leggi di Kirchhof, ovvero

   (a) scrivere le equazioni che derivano dalla prima legge applicata ai nodi A e C;
   (b) scrivere le equazioni che derivano dalla seconda legge applicata alle maglie D-A-B-C-D, D-A-C-D e C-A-B-C;
   (c) selezionare *tre equazioni indipendenti* e risolvere per I_1, I_2 e I_3 possibilmente *facendo uso di metodi di algebra lineare* e usando librerie di sistema che permettano di operare su matrici.

   (Nota: per i versi, inizialmente arbitrari, delle correnti seguire i versi delle frecce in figura.)

4. Usando i valori delle correnti ottenuti nel problema precedente, calcolare la potenza dissipata da ciascuna resistenza.

5. Facendo uso dei risultati ottenuti nel problema 33.3 e usando come riferimento del potenziale il punto C, ovvero definendo $V_C = 0$, calcolare

   (a) V_D;
   (b) V_A;
   (c) V_B.

6. (Variante del problema 33.3, abbastanza facile se è stato risolto con metodi di algebra lineare e manipolando vettori e matrici con librerie di sistema)

   (a) Fissare f_1 a 0, ovvero cosiderando il tratto A-B come un corto circuito, e risolvere per I_1, I_2 e I_3.
   (b) Fissare f_2 a 0, ovvero cosiderando il tratto A-D come un corto circuito (ovviamente ripristinando il valore di f_1), e risolvere ancora per I_1, I_2 e I_3.
   (c) Confrontare i risultati dei due punti precedenti con quanto ottenuto nel punto (c) del problema nr. 33.3.

34. Mer 23 maggio

1. Una resistenza (R), collegata a un generatore di tensione di 12 V dissipa 1000 W. Calcolare quanto vale il valore della resistenza e l'intensità della corrente che la attraversa.

2. Sul problema precedente, considerando la resistenza dei cavi, ciascuno lungo 2 m, di diametro 2 mm e resistività $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$:
   Calcolare

   (a) la resistenza di ciascun cavo;

   (b) la corrente erogata dal generatore;

   (c) la differenza di potenziale ai capi della resistenza R e di ciascun cavo;

   (d) la potenza dissipata dalla resistenza;

   (e) la potenza dissipata dai cavi.

3. Si suppone che un certo valore 'x' di una grandezza fisica possa derivare da un modello gaussiano di parametri μ e σ. Per questioni strumentali non si può valutare *esattamente* x, ma si può solo affermare che il suo valore è in un certo intervallo di ampiezza Δx centrato in x_{oss}, ove x_{oss} sta per 'x osservato' nel display dello strumento di misura.

   Assumiamo che Δx sia talmente piccolo che la probabilità che x sia compreso in tale intervallo si possa calcolare con ottima approssimazione come la p.d.f. calcolata in x_{oss} per l'ampiezza dell'intervallo, in formule

$$P\left(x_{oss} - \frac{\Delta x}{2} \le x \le x_{oss} + \frac{\Delta x}{2}\right) \;=\; \int_{x_{oss}-\frac{\Delta x}{2}}^{x_{oss}+\frac{\Delta x}{2}} f(x\,|\,\mu,\sigma)\,\mathrm{d}x \;\approx\; f(x_{oss}\,|\,\mu,\sigma)\cdot\Delta x\,.$$

   Si immagini che sia stato osservato il valore 3.00 u, con 'u' *unità arbitraria*. Si immagini inoltre che i ricercatori hanno buoni motivi per ritenere che il valore osservato sperimentalmente possa derivare da tre soli possibili modelli, ritenuti a priori ugualmente probabili:

   - $\mathcal{M}_1$: $\mu = 3.01\,\mathrm{u}$ e $\sigma = 0.10\,\mathrm{u}$;
   - $\mathcal{M}_2$: $\mu = 3.05\,\mathrm{u}$ e $\sigma = 0.05\,\mathrm{u}$;
   - $\mathcal{M}_3$: $\mu = 3.00\,\mathrm{u}$ e $\sigma = 0.50\,\mathrm{u}$.

   Calcolare $P(\mathcal{M}_i\,|\,x_{oss})$, ovvero la probabilità che ciascuno dei modelli possa essere stato la *causa* del valore osservato.

4. Un condensatore di capacità C inizialmente scarico e collegato a un generatore di f.e.m. f mediante una resistenza R raggiunge la tensione f secondo la legge

$$V_C(t) = f\cdot\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\,,$$

   con $\tau = RC$.

   (a) Ricavarsi l'espressione della carica elettrica (sull'armatura positiva) in funzione del tempo, ovvero $Q(t)$.
   [Si indichi con $Q_F = Q(t \to \infty)$ la carica depositata su tale armatura quando il condensatore si è caricato completamente – ci servirà per il problema nr. 5.]

   (b) Ricavarsi l'espressione della corrente, ovvero $I(t)$.

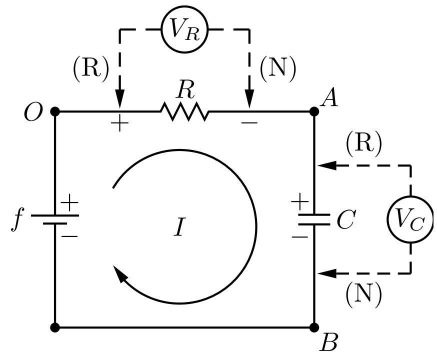

Figura 1: Circuito *RC* con convenzioni dei segni di corrente e tensioni. Per maggiore chiarezza sono anche indicati i voltmetri ideali, con le rispettive polarità (colori dei cavetti, Rosso per positiva e Nero per negativa), per la misura delle tensioni ai capi dei due elementi.

(c) Ricavarsi l'espressione della tensione ai capi di R, ovvero di V_R, *considerandola positiva quando il potenziale dal 'lato del generatore' è maggiore di quello dal 'lato del condensatore'* (vedi Figura 1).

5. (Continuazione del problema precedente) Avendo trovato l'espressione di $V_R(t)$ si trova facilmente l'espressione della potenza dissipata per *effetto Joule* in funzione del tempo, ovvero di $P_J(t)$.

   (a) Si valuti l'espressione dell'energia totale dissipata per effetto Joule durante il processo di carica, ovvero $E_J = \int_0^\infty P_J(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) La si confronti con l'espressione del lavoro totale effettuato dalla forza elettromotrice per portare la carica Q_F (vedi problema precedente) dal potenziale più basso al potenziale più alto del generatore.

6. Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che giacciono nel piano x-y, ovvero siano $\vec{a} = \{a_x, a_y, 0\}$ e $\vec{b} = \{b_x, b_y, 0\}$,

   (a) calcolare il prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ usando la tecnica del determinante vista a lezione [eq. (556) della 'vecchia dispensa'];

   (b) calcolare con la stessa tecnica $\vec{d} = \vec{b} \wedge \vec{a}$;

   (c) mostrare esplicitamente, mediante i prodotti scalari $\vec{c} \cdot \vec{a}$ e $\vec{c} \cdot \vec{b}$, che $\vec{c}$ calcolato nel punto (a) sia ortogonale sia ad $\vec{a}$ che a $\vec{b}$.

7. Una particella di carica q e massa m, in moto in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico B, esegue un moto circolare uniforme, in quanto la forza di Lorenz è la forza centripeta che la mantiene sulla traiettoria circolare.

   (a) mostrare come la velocità angolare, e quindi la frequenza di rotazione, non dipendono dalla velocità;

   (b) mostrare come il raggio di curvatura dipenda invece linearmente dalla velocità. (Come dipende invece da m, da q e da B?)

35. Gio 25 maggio

1. Un condensatore da $2.2\,\mu$F, inizialmente scarico, viene connesso ad un generatore mediante un resistore di resistenza R incognita. Trovare il valore di R sapendo che dopo $1.52\,$ms la differenza di potenziale ai capi del condensatore è pari alla metà del suo valore asintotico.

2. (Continuazione del problema nr. 34.4) Dopo che il condensatore si è caricato 'completamente' (ovvero per $t \gg \tau$), ad un certo istante (che indichiamop con $t = 0$) il generatore è sostituito da un 'corto circuito'.

   (a) Facendo uso della soluzione generale $V(t) = V_{C_F} + (V_{C_0} - V_{C_F}) \cdot e^{-t/\tau}$ (ovvero in forma *canonica*) si ricavi $V_C(t)$ nel caso specifico.

   (b) Si ricavino quindi le espressioni di $I(t)$ e di $V_R(t)$, facendosi una ragione dei segni risultanti.

   (c) Ricavarsi quindi l'espressione della potenza istantanea dissipata per effetto Joule, ovvero di $P(t)$.

   (d) In analogia a quanto fatto nel problema nr. 33.5 si ricavi l'espressione dell'energia totale dissipata per effetto Joule durante l'intero processo di scarica.

   (e) Confrontare infine l'espressione ottenuta nel punto precedente con quella ottenuta nel punto (a) del problema nr. 5.4.
   Cosa ci si impara?

3. A barretta rigida ma di massa trascurabile e di lunghezza $l = 60\,$cm sono connessi tre corpi, approssimati come punti materiali: il primo, di massa $m_1 = 100\,g$, è posto a un estremo (che indichiamo con A) della barretta; il secondo, di massa $m_2 = 200\,g$, è posto al centro; il terzo, di massa $m_3 = 400\,g$, è posto all'altro estremo ('B'). Calcolare il momento di inerzia quando la barretta è messa in rotazione intorno a un asse ortogonale alla barretta stessa e che passi

   (a) per il punto A;

   (b) per il centro della barretta;

   (c) per il punto B.

4. Uno scooter ha una 'coppia' massima (ovvero massimo momento della forza) di 14 N·m a 7000 giri al minuto. Calcolare la potenza dello scooter a tale regime del motore.

5. Due oggetti di massa m sono posti agli estremi di una barra rigida di lunghezza l e massa trascurabile (ovvero la sua inerzia di rotazione è trascurabile a quella dei due oggetti). La barra ruota con velocità angolare ω_0. Improvvisamente, mediante un sistema meccanico azionato dall'interno della barra (insomma non ci sono forza esterne ad agire!) i due oggetti vengono avvicinati fino a che la loro distanza diventi la metà di quella iniziale.

   (a) Scrivere l'espressione della velocità angolare con cui la barra ruota quando le due masse sono state avvicinate.

   (b) Scrivere l'espressione della variazione di energia cinetica.

   Si diano anche le soluzioni numeriche per $m = 1\,$kg, $l = 1\,$m e <u>frequenza di rotazione</u> di 1 giro/s.

6. Una ruota di raggio $R = 30\,\mathrm{cm}$ e massa pari ad $1\,\mathrm{kg}$ è posta in rotazione intorno al proprio asse ad una velocità tale che la ruota, lasciata libera al suolo, andrebbe ad una velocità di $40\,\mathrm{km/h}$. Immaginando che (praticamente) tutta la massa della ruota sia concentrata sulla sua circonferenza (come nel caso della ruota mostrata a lezione), calcolare

   (a) il momento di inerzia della ruota;

   (b) la sua energia l'energia cinetica.

7. (Continuazione del problema precedente) Si immagini che la stessa ruota sia inizialmente a riposo e che da un certo istante ($t = 0$) si applicchi, su un punto della circonferenza, una forza di intensità $10\,\mathrm{N}$ e che si mantenga sempre tangenziale alla circonferenza stessa. Si calcolino

   (a) l'accelerazione angolare;

   (b) il tempo impiegato affinché la velocità angolare della barra arrivi a $100\,\mathrm{rad/s}$;

   (c) quanti giri (e quanti radianti) ha fatto la barra nell'istante in cui la velocità angolare arrivi a tale valore.

36. Lun 29 maggio

1. Un numero ('X') rispetto al quale siamo in condizioni di incertezza ('variabile aleatoria') potrebbe valere 0, 1/2 o 1. A tali valori assegniamo rispettivamente probabilità 0.2, 0.3 e 0.5.
   Si calcolino, per tale *distribuzione di probabilità*,

   (a) valore atteso;

   (b) varianza;

   (c) deviazione standard.

2. (Variante del problema 35.3) A una barretta rigida ma di massa trascurabile e di lunghezza $l = 1\,\mathrm{m}$ sono connessi tre corpi, approssimati come punti materiali: il primo, di massa $m_1 = 0.2\,\mathrm{kg}$, è posto a un estremo (che indichiamo con A, al quale associamo $x = 0$) della barretta; il secondo, di massa $m_2 = 0.3\,\mathrm{kg}$, è posto al centro ($x = l/2$); il terzo, di massa $m_3 = 0.5\,\mathrm{kg}$, è posto all'altro estremo ('B', al quale associamo $x = l$).
   Si calcolino, per tale *distribuzione di masse*,

   (a) il centro di massa;

   (b) il momento di inerzia rispetto al centro di massa, ossia l'*inerzia al cambiamento di stato di moto rotazionale* nel caso in cui alla barretta venga applicata una forza ortogonale sia alla barretta che all'asse intorno a cui essa ruota.

3. Una barra ha sezione rettangolare di lati a e b, spessore c e densità ρ. Nell'approssimazione che lo spessore sia molto minore delle dimensioni dei lati, affinché abbia senso (beché in modo approssimato) l'espressione "asse passante per il lato a" e simili, si calcoli il momento di inerzia

   (a) rispetto all'asse che passa per il lato a;

   (b) rispetto all'asse parallelo al lato a e passante per $b/2$.

4. Si immaginino tre piani inclinati affiancati, entrambi lunghi 2 m e inclinato di 60 gradi rispetto al piano orizzontale.

   (a) Nel primo scivola senza attrito un 'punto materiale';

   (b) nel secondo rotola senza scivolare un cilindro di massa m e raggio R;

   (c) nel terzo rotola senza scivolare un tubo massa m e raggio R (si immagini che lo spessore della parete del tubo sia trascurabile rispetto a R, in modo che tutta la massa sia sostanzialmente a distanza R dall'asse del tubo).

   Facendo uso della conservazione dell'energia meccanica, si trovi l'espressione della velocita di traslazione finale nei tre casi.
   [Nota: per un oggetto che rotola c'è una semplice relazione fra la velocità traslazionale e la velocità angolare di rotazione intorno al proprio asse.]

5. Se un protone (carica positiva) passa da un punto all'altro dello spazio tali che differenza di potenziale ΔV è negativa la sua variazione energia potenziale è negativa e quindi la sua variazione di energia cinetica è positiva. Discorso analogo vale per l'elettrone, a parte il fatto che, essendo la sua carica negativa, affinché la sua energia cinetica aumenti ΔV deve essere positiva.

   (a) Si valuti l'energia cinetica acquisita da un protone inizialmente a riposo quando 'attraversa' una differenza di potenziale di $-1\,\mathrm{V}$;

   (b) Si valuti l'energia cinetica acquisita da un elettrone inizialmente a riposo quando 'attraversa' una differenza di potenziale di $+1\,\mathrm{V}$.

   $\rightarrow$ Queste energie definiscono l'*elettronvolt* ('eV'), i cui multipli sono il keV (*chiloelectronvolt*, pronunciato 'kev') il MeV (*megaelectronvolt*, pronunciato 'mev'), etc.

6. Un protone inizialmente 'a riposo' (ovvero avente energia trascurabile rispetto a quella che acquisterà nel seguito) viene accelerato facendogli attraversare una differenza di potenziale $\Delta V = -1000\,\mathrm{V}$. Successivamente entra in una regione di spazio ove è presente soltanto un campo megnetico di intensità $B = 1.0\,T$. In tale regione di spazio il protone viaggia su una traiettoria circolare e dopo aver percorso 'mezzo cerchio' riesce dalla regione (a forma di una 'D') in cui è presente il campo magnetico (si veda l'illustrazione del *ciclotrone* sul sito del corso).

   (a) Si valuti l'energia cinetica raggiunta nella fase di *accelerazione*;

   (b) si valuti anche la velocità raggiunta, esprimendola sia in m/s che come frazione della velocità della luce;

   (c) si valuti la velocità angolare nel moto 'semicircolare' e quindi il tempo impiegato per uscire dalla regione 'a forma di D' dove è presente il campo magnetico, notando come tali valori non dipendano dalla velocità del protone;

   (d) si valuti infine il raggio di curvatura della traiettoria 'semicircolare' e quindi la distanza fra il punto di ingresso e il punto di uscita nella regione 'a forma di D' ove è presente il campo magnetico.

   Nota: ovviamente nella regione ove 'corre' il protone è stato fatto il 'vuoto' (anche se non assoluto) per minimizzare gli urti con le molecole dell'aria.

37. Mer 31 maggio

1. (Continuazione del problema nr. 36.6) Dopo che il protone è uscito dalla D, percorre un tratto in cui incontra di nuovo la stessa differenza di potenziale ΔV (mentre percorreva la traiettoria nella D è stato fatto in modo che si scambiasse la polarità del campo elettrico fra le D in modo tale da essere nuovamente accelerato e non frenato). Quindi il protone viene accelarato, entra nella seconda D, vi percorre un'orbita semicircolare poi ne esce, viene accelerato nuovamente, rientra nella prima D, etc. etc. (si veda figura sul sito).
   Si faccia una tabella con energia (espressa in keV), velocità, raggio di curvatura e tempo di permanenza
   (a) la prima volta che transita nella prima D;
   (b) la prima volta che transita nella seconda D;
   (c) la seconda volta che transita nella prima D;
   (d) la seconda volta che transita nella seconda D.
2. Mostrare come l'espressione $\frac{1}{2}\,C\,V^2$ abbia effettivamente la dimensione di energia e che sia espressa in joule se C è espresso in farad e V in volt.
3. Calcolare la capacità un condensatore affinché possa immagazzinare la stessa energia della batteria mostrata in 'galleria' se caricato alla stessa tensione che può erogare tale batteria.
4. Sul problema precedente: calcolare la tensione ai capi di tale condensatore quando l'energia si è ridotta del 50% rispetto a quella iniziale.
5. Si confronti la formula dell'energia del condensatore con quanto appreso nel problema nr. 18.7, compilando una tabella di analogie.
6. I valori di due grandezze fisiche omogenee sono valutati indipendentemente mediante inferenza probabilistica. I risultati, riportati con le *incertezze standard*, sono
   $$\begin{aligned} a &= 2.34 \pm 0.15\,\mathrm{u} \\ b &= 2.15 \pm 0.12\,\mathrm{u} \end{aligned}$$
   ove 'u' sta per 'unità di misura arbitraria'.
   Si valuti il valore atteso e l'incertezza standard di
   (a) $s = a + b$;
   (b) $d = a - b$.

38. Gio 1 giugno

1. (Dalle slides presentate a lezione) Si immagini che siano stati misurati i due lati di un foglio A4, ottenendo i seguenti risultati, riportati come 'valore atteso' ± 'incertezza standard':
   $$\begin{aligned} a &= 29.73 \pm 0.03\,\mathrm{cm} \\ b &= 21.45 \pm 0.04\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$
   Valutare valore atteso e incertezza standard delle seguenti quantità da essi derivate:

   (a) perimetro: $p = 2\,a + 2\,b$;
   (b) area: $A = a \cdot b$;
   (c) diagonale: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$;
   (d) rapporto: $r = a/b$.

2. (Continuazione del problema precedente) Valutare l'*incertezza relativa*, ovvero il *rapporto fra incertezza standard e il modulo del valore atteso*[8] di

   (a) a;
   (b) b;
   (c) A;
   (d) r.

3. Si immaginino tre 'variabili aleatorie' Y_1, Y_2 e Y_3 che dipendono da altre due, adimensionali, X_1 e X_2, secondo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \cdot X_2; \\ Y_2 &= X_1 \cdot X_2^2; \\ Y_3 &= X_1^2 \cdot X_2. \end{aligned}$$

   Sapendo che valore atteso e deviazione standard ('incertezza standard') di X_1 valgono 1.00 e 0.02, mentre valore atteso e deviazione standard di X_2 valgono 2.00 e 0.02, valutare l'<u>incertezza relativa</u> di

   (a) X_1;
   (b) X_2;
   (c) Y_1;
   (d) Y_2;
   (e) Y_3.

   (Si riesce a intravedere una qualche regola generale nella *propagazione delle incertezze relative*?)

4. Un punto materiale descrive un moto circolare uniforme con velocità v su una traiettoria di raggio R.

   (a) Si trovi l'espressione della *velocità aereolare* dA/dt del punto rispetto al centro del cerchio e se ne calcoli il valore numerico nel caso di $R = 1\,\mathrm{m}$ e frequenza di rotazione di 1 giro/s.
   (b) Si trovi l'espressione dell'area 'spazzata' in un periodo, ovvero $(dA/dt) \cdot T$, con T il periodo di rotazione. (Ovviamente dovrà tornare la ben nota formula dell'area del cerchio, ma è importante arrivare al risultato seguendo la traccia.)

5. Un ipotetico oggetto orbitante intorno al Sole al perielio dista dal Sole 0.5 U.A., mentre all'afelio dista da esso 2 U.A. . Sapendo che la sua velocità all'afelio vale v_A e ricordando che al perielio e all'afelio il vettore velocità è ortogonale all'asse maggiore, si trovi, facendo uso della legge delle aree di Keplero, il rapporto fra la velocità v_P al perielio e quella all'afelio.

[8] In questo caso la precisazione di 'modulo' è irrilevante in quanto le grandezze in gioco sono tutte positive, ma è si è voluto precisare il concetto di incertezza relativa al caso generale.

39. Lun 5 giugno

1. In una macchina idraulica un autoveicolo è tenuto sollevato su un pistone di 30 cm di diametro. In un altro punto del recipiente del liquido idraulico una specie di siringa di un centimentro di diametro, che funge da pistoncino, può essere tenuta premuta con un pollice. Calcolare la forza da imprimere sul pistoncino della siringa per poter sostenere il peso di autoveicolo e pistone di massa totale 1200 kg.
   Riuscirebbe un bambino a tenere in elevazione l'autoveicolo?

2. (Continuazione) Di quanto si solleva l'autoveicolo se il pistoncino della siringa viene spinto in avanti di 10 cm?

3. Con riferimento alla figura alla lavagna ('lavagna_5giugno.jpg' sul sito):

   - un fluido incompressibile avanza (verso destra, in figura), in *regime stazionario* lungo un tubo orizzontale;
   - in un primo tratto la sezione del tubo vale A_1 mentre in un secondo tratto vale A_2;
   - chiaramente il volume $\mathrm{d}V$ che transita nel tempo $\mathrm{d}t$ in una qualsiasi sezione del tubo deve essere la stessa per l'ipotesi di incompressibilità;
   - in un tempo infinitesimo $\mathrm{d}t$ la 'porzione di fluido' indicata con la freccia spessa in basso si sposta verso destra (altra freccia spessa, posta sopra la prima);
   - il lavoro effettuato dalla forza di pressione P_1 a sinistra di tale 'porzione di fluido' (e <u>esterna</u> ad essa) vale $+P_1 A_1 \mathrm{d}s_1$ (forza e spostamento concordi);
   - il lavoro effettuato dalla forza di pressione P_2 a destra di tale 'porzione di fluido' (e <u>esterna</u> ad essa) vale $-P_2 A_2 \mathrm{d}s_2$ (forza e spostamento opposti);
   - siccome il moto del fluido è stazionario, la velocità per ogni sezione del tubo è costante e quindi anche l'energia cinetica infinitesima ad essa associata, pari a $(1/2)\rho dV v^2$, è costante;
   - la variazione di energia cinetica totale del 'tratto di fluido' preso in considerazione è quindi pari a quella dell'elemento $\mathrm{d}V$ a destra nella figura meno quella dell'elemento $\mathrm{d}V$ a sinistra (dal punto di vista energetico è come se l'elemento $\mathrm{d}V$ si fosse spostato da sinistra a destra e tutto il resto fosse rimasto immutato – nota: se non ci fosse variazione di sezione la variazione di energia cinetica sarebbe nulla).

   Alla luce di questo modello (in cui <u>non ci sono attriti</u>) e alla figura di riferimento,

   (a) trovare l'espressione che lega v_1 a sinistra con v_2 a destra;

   (b) trovare l'espressione del lavoro (infinitesimo) totale compiuto dalle forze di pressione esterne al 'tratto di fluido' preso in considerazione;

   (c) trovare l'espressione della variazione (infinitesima) di energia cinetica del 'tratto di fluido' preso in considerazione;

   (d) eguagliado il lavoro compiuto con la variazione di energia cinetica si trovi la relazione che lega, per ogni punto del tubo, pressione e velocità.

4. Facendo uso della formula per la propagazione delle incertezze (standard) relative, si ricavino le incertezze (standard) relative di area A e rapporto r definiti sul foglio A4 del problema nr. 38.1 e le si confronti con quanto ottenuto rispondendo ai quesiti 38.1.c e 38.1.d.

5. Si risolva nuovamente il problema nr. 38.3, facendo uso, questa volta, della formula di propagazione delle incertezze relitive e si confrontino i risultati con quanto otenuto precedentemente – e ora si capisce il senso della domanda in fondo a tale problema.

6. Nel caso di *prior uniforme* abbiamo visto come l'inferenza su λ della poissoniana sia data da
$$f(\lambda\,|\,n) \propto e^{-\lambda}\cdot\lambda^n\,,$$
avendo assorbito in '$\propto$' i fattori che non dipendono da λ.
Trovare il *valore modale* di λ (o '*moda*'), ovvero il valore che massimizza da funzione densità di probabilità.
[Suggerimento: conviene far uso del logaritmo della funzione densità di probabilità, come si capirà facendo i conti.]

7. Vengono eseguiti due esperimenti per determinare λ di una distribuzione di Poisson. Il primo osserva $n_1 = 3$; il secondo $n_2 = 6$.
Trovare
   (a) i valori attesi e le incertezze standard di λ_1 e di λ_2;
   (b) valore atteso e incertezza standard della loro differenza, ovvero di $\lambda_2 - \lambda_1$.

   Cosa possiamo dire sul fatto che il *valore vero* di λ dei due esperimenti possa essere lo stesso? (Si provi a dare una risposta qualitativa.)

40. Mer 7 giugno

1. Si esegua lo script R poisson_inf_predictive.R a disposizione sul sito (non vale la pena di trasformarlo in Python, soprattutto perché, in questo momento, si perderebbe tempo solo per emulare la parte grafica, senza imparare niente di sostanziale) con i seguenti valori di n (osservati, 'del passato'): 10, 20, 30, 40 e 50.
Si compili quindi una tabella in cui, per ogni n, sono riportati
   - $\mathrm{E}(\lambda)$;
   - $\sigma(\lambda)$;
   - $\mathrm{E}(n_F)$;
   - $\sigma(n_F)$;
   - $\sigma(\lambda)\,/\,\sigma(n_F)$.

   Che regola generale si 'intravede' per il rapporto $\sigma(\lambda)\,/\,\sigma(n_F)$?

2. Un pistone di diametro 10 cm a cui è applicata una pressione costante di 10^5 Pa comprime un gas avanzando di 10 cm. Si calcoli la variazione di energia interna del gas.

3. Un tubo di diametro 2 cm è posto orizzontalmente e in esso scorre dell'acqua, con un flusso di 30 litri/minuto. Il tubo è unito mediante un raccordo a un secondo tubo di diametro 1 cm e anch'esso posto orizzontalmente, allo stesso livello del primo.
Si calcolino:
   (a) il flusso espresso in m^3/s;
   (b) la velocità dell'acqua nel primo tubo;
   (c) la velocità dell'acqua nel secondo tubo;

(d) la differenza di pressione nei due tubi, ovvero $P_2 - P_1$ (i dati non sono sufficienti per ottenere i valori assoluti di pressione).

4. (Continuazione del problema precedente) Rispondere agli stessi quesiti nel caso in cui i due tubi di diametro diverso sono entrambi stesi orizzontalmente, ma il primo sul pavimento e il secondo sulla superficie di un tavolo a un'altezza di 1 m. (Ovviamente i tubi sono opportunamente raccordati per consentire lo scorrimento dell'acqua).

5. Un grosso recipiente pieno di acqua è posto su un tavolo il cui piano è a 80 cm rispetto al pavimento. Nella parete laterale del recipiente era stato effettuato un foro, a 10 cm dal fondo, e da tale foro fuoriesce uno schizzo orizzontale. Ad un certo istante il livello dell'acqua rispetto al fondo del recipiente è 60 cm. Si calcolino

   (a) la velocità del getto d'acqua;

   (b) la distanza orizzontale, rispetto al foro, che il getto raggiunge sul pavimento.

6. Variante del problema nr. 27.3. Questa volta fissiamo distanze e grandezza dell'oggetto e cambiamo la distanza focale. Quindi siano $p = 50\,\mathrm{m}$ e $h = 2\,\mathrm{m}$. Quindi riportando i valori di q e di y' in millimetri (attenzione al fatto che i valori di p e h sono dati in metri, per il motivo che si capirà),

   (a) $f = 25\,\mathrm{mm} \Rightarrow q,\ M,\ h'$;

   (b) $f = 50\,\mathrm{mm} \Rightarrow q,\ M,\ h'$;

   (c) $f = 100\,\mathrm{mm} \Rightarrow q,\ M,\ h'$;

   (d) $f = 200\,\mathrm{mm} \Rightarrow q,\ M,\ h'$;

   (e) $f = 400\,\mathrm{mm} \Rightarrow q,\ M,\ h'$.

   Chiaro cosa cosa fa lo zoom? Si tenga conto che il sensore delle fotocamere professionali (*full frame,* vedi figura sul sito del corso) ha dimensioni $24\,\mathrm{mm} \times 36\,\mathrm{mm}$ (verticale $\times$ orizzontale), mentre quello della maggior parte degli smart è di $3.42\,\mathrm{mm} \times 4.54\mathrm{mm}$ (un'area circa 56 volte inferiore!).

7. Il sensore di una (piccola) fotocamera ha dimensioni $6.17\,\mathrm{mm} \times 4.55\,\mathrm{mm}$ possiede "4896 pixel per 3672 pixel" (orizzontale per verticale)

   (a) si calcolino il numero di pixel della fotocamera;

   (b) si calcoli la dimensione in pixel di una immagine larga 4.00 mm e alta 2 mm.

41. Gio 8 giugno

1. Si calcoli l'angolo di campo orizzontale prodotto da un obiettivo di focale 26 mm

   (a) quando è montato su una fotocamera 'full frame';

   (b) quando è montato su uno smart, assumendo, in questo caso, un sensore di dimensioni $4.54\,\mathrm{mm} \times 3.42\,\mathrm{mm}$.
   (Si suggerisce di ripetere l'esercizio usando i dati del sensore del proprio dispositivo.)

   Dire inoltre se gli angoli ottenuti nei due casi corrispondono a un teleobiettivo o un grandangolo.

2. (Continuazione del problema precedente) Dire quanto deve valere la lunghezza focale di un fotocamera 'full frame' per avere lo stesso angolo di campo ottenuto nel punto (a).

3. Un sensore di una (piccola) fotocamera ha dimensioni $6.17\,\mathrm{mm} \times 4.55\,\mathrm{mm}$. Sapendo inoltre che tale fotocamera monta un obiettivo avente $f = 133\,\mathrm{mm}$,

   (a) si calcoli l'apertura angolare orizzontale
   (si può usare tranquillamente l'approssimazione per piccoli angoli);

   (b) si calcoli la lunghezza focale necessaria per avere la stessa apertura angolare orizzontale in una fotocamera avente un sensore 'full frame', ovvero di larghezza pari a 36 mm.

4. Con riferimento all'immagine dell'estintore dell'Aula Pasquini mostrata sul sito insieme ai parametri della foto:

   (a) si calcoli la distanza da cui è stata effettuata la foto;

   (b) si calcoli la larghezza angolare (espressa in gradi o sue frazioni, ovvero primi o secondi di arco)

      i. dell'intero cartello;
      ii. del rettangolo che rappresenta l'estintore;
      iii. nella lettera **N** di estintore.

5. In un esperimento si eseguono 100 prove ottenendo 25 successi. In un altro se ne eseguono 200, con 60 successi.

   (a) Riportare il valore di p risultante da ciascun esperimento in termini di valore atteso e incertezza standard,(*) assumendo in entrambi i casi una prior uniforme.

   (b) Calcolare la differenza (con incertezza standard) fra il valore ottenuto nel secondo esperimento e quello ottenuto nel primo.

   (*) Usare l'app Probability Distributions suggerita a lezione (vedi 'Dettagli delle lezioni')

   - sia leggendo direttamente i momenti ($\rightarrow$ 'Moments') che dà l'app, avendo impostato i corretti valori di α e β;
   - sia applicando le formule riportate dall'app ($\rightarrow$ 'Formulas').

6. (Continuazione del problema precedente) La comunità scientifica ha buoni motivi per ritenere, anche alla luce di quanto ottenuto le punto (b), che i due esperimenti stiano dando informazioni sullo stesso parametro p del modello binomiale che descrive il numero di successi dato il numero di prove. Quale risultato, riportato come valore atteso $\pm$ incertezza standard, ne segue quindi per p facendo uso dei dati di entrambi gli esperimenti?
   [Si ragioni sul fatto che l'inferenza su p alla luce del primo esperimento, ovvero $f(p\,|\,n_1, x_1)$, diventa la nuova prior quando si usano anche i dati del secondo esperimento. Ragionando sulle p.d.f non normalizzate si arriva facilmente al risultato, estendibile a tante prove, in ciascuna delle quali si osserva un certo numero di successi (ovviamente sotto l'ipotesi che le osservazioni derivino da binomiali con la stessa p).]

'Da sapere' (costanti, grandezze fisiche, formule)

(Si raccomanda di ripassarle di quanto in quanto)

1. Costante solare (fuori l'atmosfera) e irraggiamento al suolo (in W/m^2 e in W/cm^2).
2. Potenza media emessa da una persona.
3. Distanza media Terra-Sole.
4. Latitudine e longitudine di Roma.
5. Velocità di Roma intorno all'asse terrestre, espressa sia in km/h che in m/s.
6. Velocità dela Terra intorno al Sole, espressa in km/s.
7. Velocità angolare (media) della Terra intorno al Sole, espressa in gradi/giorno.
8. Velocità angolare (media) della Luna intorno alla Terra, espressa in gradi/giorno.
9. Densità (a valori 'nominali') dell'aria, espressa in kg/m^3, in g/dm^3 e in g/litro.
10. Diametro angolare medio di Sole e Luna visti dalla Terra.
11. Periodo orbitale dell'ipotetico satellite in orbita radente intorno alla Terra e della stazione orbitale ISS.
12. Valore di g in (m/s)/s e in (km/h)/s
    (ricordando che, visto come *campo gravitazionale*, le sue dimensioni naturali sono N/kg!)
13. Accelerazione della Luna verso la Terra in (mm/s)/s.
14. Distanza percorsa in caduta libera nel primo secondo verso il centro della Terra
    - di un oggetto in prossimità della superfice terrestre;
    - degli astronauti sulla ISS;
    - della Luna.
15. Fattore di conversione cal $\leftrightarrow$ J (e quindi kcal $\leftrightarrow$ kJ).
16. Calore specifico dell'acqua, espresso in cal/(g °C) e kcal/(kg °C),
    anche con due sole cifre *significative*.
17. Calore specifico dell'aria 'standard' espresso sia come frazione di quello dell'acqua che in cal/(L °C).
18. Efficienza luminosa del Sole (lm/W), da cui l'illuminameto su superficie ortogonale ai raggi solari in una giornata serena.
19. Angolo osservatore-goccia-Sole per il rosso e il blu dell'arcobaleno (arco primario).
20. Dimensioni del sensore di fotocamere 'full frame' (anche chiamato '35mm').