Nota su diffrazione e esperimento di Young
(Fisica per SMIA – G. D'Agostini, Giugno 2024)

Premesse

- Se due onde della stessa frequenza arrivano in uno stesso punto con differenza di fase $\Delta\varphi$ e stessa ampiezza, ovvero

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A \cdot \cos(\omega t) & (1) \\ f_2(t) &= A \cdot \cos(\omega t + \Delta\varphi)\,, & (2) \end{aligned}$$

  la loro sovrapposizione sarà data da

$$f_s(t) = f_1(t) + f_2(t) \;=\; A \cdot \cos(\omega t) + A \cdot \cos(\omega t + \Delta\varphi)\,, \qquad (3)$$

  che possiamo riscrivere, facendo uso di una *formula di prostraferesi*,[1] come

$$f_s(t) \;=\; 2A \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\,. \qquad (4)$$

  La funzione $f_s(t)$ oscilla alla stessa frequenza delle due onde, con una fase intermedia fra le due, ma con un'ampiezza che dipende dalla differenza di fase.[2] In particolare,

  - per $\Delta\varphi = 0, \pm 2\pi,\ \dots\ ,\ \pm 2\,n\pi$, con n intero, l'ampiezza è doppia rispetto a quella di ciascuna onda (picchi in fase);
  - per $\Delta\varphi = \pm\pi,\ \dots\ ,\ \pm(2\,n{+}1)\cdot\pi$ l'ampiezza si annulla ('controfase').

- Come è ben noto la frequenza viene percepita come colore (onde luminose) o come tono (onde sonore). La loro intensità è invece legata al quadrato della loro ampiezza, e più precisamente alla media, in un intervallo di tempo 'opportuno', del quadrato.
  Indicando con $f_Q(t)$ il quadrato di $f_s(t)$ e con I l'intensità, [3] abbiamo quindi, facendo uso di una *formula di Werner*,[4] abbiamo

$$f_Q(t) = f_s^2(t) \;=\; 4A^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \qquad (5)$$

---

[1] Si ha, in generale,

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

ove la seconda scrittura è per ricordare che la funzione coseno è pari, cosa che ci è utile per scrivere la (4) in un modo più comodo.

[2] Vedi immagine sul sito del corso, nel quale c'è anche uno script R, da riscrivere nel linguaggio preferito, per poter giocare con la fase.

[3] L'intensità, per come l'abbiamo definita 'non dipende dal tempo', nel senso che le oscillazioni di $f_Q(t)$ sono mediate, ma ovviamente ci può dipendere se l'ampiezza delle onde varia 'macroscopicamente' con il tempo.

[4] Sul sito è mostrato come usare Wolfram Alpha per fare la media, cosa da apprendere in quanto può tornare utile in casi generali. Ricordando invece la formula di Werner

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

la media è in questo caso riconoscibile a prima vista. (Si ricorda che le formule di Werner sono anche note come *inverse delle formule di prostaferesi* e qualcuno sarà contento di poter finalmente apprezzare l'utilità di queste formule.)

$$
\begin{aligned}
&= 4A^2\cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\omega t+\Delta\varphi\right)+\cos(0)\right] \\
&= 2A^2\cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cdot\left[1+\cos\left(2\omega t+\Delta\varphi\right)\right]\ . \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Se vede come $f_Q(t)$ oscilla con pulsazione 2ω intorno a un certo 'livello', che quindi fornisce il valore medio cercato:

$$
I = < f_Q(t) > = 2A^2\cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\ . \qquad (7)
$$

Esperimento di Young

A questo punto siamo pronti ad analizzare quantitativamente il famoso esperimento.

La prima cosa importante da capire è il trucco per ottenere due sorgenti sincrone, puntiformi nel piano in cui le andiamo ad analizzare, ma in realtà costituite tipicamente da due *fenditure parallele*, S_1 e S_2 nella figura riportata sul sito del corso.[5]

- L'onda piana che incide da sinistra sulla fenditura S_0 produce (*principio di Huygens*) un'onda cilindrica (circolare nel piano della figura) che arriva allo stesso tempo su S_1 e S_2.
- Ancora per il principio di Huygens, dalle due fenditure sono emesse due onde cilindriche sincrone, le quali arriveranno nei punti dello schermo (C) avendo percorso cammini in genere diversi. La differenza di fase è legata quindi alla differenza dei cammini percorsi.

Se la differenza di tempo fra i cammini percorsi vale Δt la differenza di fase può essere ottenuta dalla semplice proporzione

$$
\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}\,, \qquad (8)
$$

ove T è il periodo delle onde.

- Se Δt è nullo esse arrivano perfettamente in fase e quindi si sommano costruttivamente. Lo stesso avviene se arrivano con ritardi di un periodo, due periodi, etc..
- Se invece Δt vale $T/2$ la differenza di fase sarà pari a π e l'interferenza sarà distruttiva. Idem se Δt è pari a $3/2\,T$, etc.

Indicando con d la distanza fra due fenditute e (seguendo l'usuale convenzione dell'ottica) con θ l'angolo rispetto alla normale al piano delle due fenditura (e quindi anche al piano dello 'schermo') la differenza fra i due percorsi vale $\Delta s = d\sin\theta$, da cui, indicando con v la velocità dell'onda,

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta\varphi}{2\pi} &= \frac{\Delta s/v}{T} = \frac{\Delta s}{v}\cdot\frac{1}{T} \qquad (9)\\
&= \frac{d\cdot\sin\theta}{v}\cdot\frac{1}{T} = \frac{d\cdot\sin\theta}{v/\nu}\,, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

[5] `https://www.roma1.infn.it/~dagos/FisAI/galleria_FisAI_23-24.html#EsperimentoYoung`

da cui

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 2\pi \, \frac{d \cdot \sin\theta}{v/\nu} && (11) \\ &= 2\pi \, \frac{d}{\lambda} \cdot \sin\theta \,, && (12) \end{aligned}$$

avendo fatto uso della relazione $\lambda \cdot \nu = v$ che lega lunghezza d'onda, frequenza e velocità di propagazione.

Non rimane che inserire l'espressione di $\Delta\varphi$ nella (7) per ottenere l'intensità in funzione dell'angolo:

$$I = 2A^2 \cos^2\left(\pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot \sin\theta\right) \,. \tag{13}$$

L'intensità è massima quando l'argomento della funzione $\cos^2(\ldots)$ vale 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, etc., ossia

$$\pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot \sin\theta = \pm\, n\pi \quad (\text{con n} = 0,\, 1,\, 2, \ldots) \,, \tag{14}$$

da cui

$$\sin\theta = \pm\, n \cdot \frac{\lambda}{d} \quad (\text{con n} = 0,\, 1,\, 2, \ldots) \,. \tag{15}$$

⇒ Vedi figura delle *frange di interferenza* sul sito del corso.