

-Derivate e integrali. In genere, date le generiche variabili $y(t)$ e $x(t)$,

$$y = \frac{dx}{dt} \leftrightarrow dx = y dt \Rightarrow \Delta x|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} y(t) dt.$$

- Angolo piano e angolo solido

“rad = arco su raggio” $\rightarrow d\theta = ds/r$.

“sr = area calotta su raggio²” $\rightarrow d\Omega = dA/r^2$.

\Rightarrow cono di semiapertura θ : $\Omega = 2\pi \cdot (1 - \cos \theta)$.

In genere, per dA non ortogonale alla ‘direzione di vista’: $d\Omega = dA \cdot |\hat{r} \cdot \hat{n}| / r^2$.

Dimensione angolare per piccoli angoli: ‘dimensione trasversa diviso la distanza’.

- Andamenti esponenziali (Nota: $\alpha > 0$)

con z generica variabile (temperatura, velocità, nr. di nuclei o di batteri, tensione condensatore, etc.)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{dz}{dt} &= \alpha z \\ \Rightarrow z(t) &= z_0 e^{t/\tau} \quad [\tau = \frac{1}{\alpha}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{dz}{dt} &= -\alpha (z - z_F) \\ \Rightarrow z(t) &= z_F + (z_0 - z_F) e^{-t/\tau} \quad [\tau = \frac{1}{\alpha}] \end{aligned}$$

τ notevoli: m/β , C/η , RC , L/R
(ove le due ‘C’ sono ‘capacità’ di diverso tipo)

- Oscillatore armonico (con z generica variabile)

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) = -\omega^2 z(t) \iff z(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

con ω^2 di valore numerico positivo e *ovvie* dimensioni, con A e φ dipendenti dalle *condizioni iniziali*.

Se $z(0) = A_0$ e $\dot{z}(0) = 0 \implies z(t) = A_0 \cos(\omega t)$.

[Relazioni “pulsaz. \leftrightarrow periodo \leftrightarrow freq.”: \Rightarrow da sapere.]

Casi notevoli:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{k}{m} x \quad (\text{molla}); \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} &\approx -\frac{g}{l} \theta \quad (\text{pendolo}). \end{aligned}$$

- Onde progressive (regressive: ‘ $-\beta x$ ’ \rightarrow ‘ $+\beta x$ ’):

- equazione: $f(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x)$;

- periodicità: $T = 2\pi/\omega$; $\lambda = 2\pi/\beta$.

- velocità: $v = \omega/\beta = \lambda/T$

$\rightarrow \lambda \cdot \nu = v$; $\lambda = v \cdot T$.

Note: spesso al posto di β si usa k .

- Equazione di d’Alambert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

valida per generica $f(x, t) = g_1(x - vt) + g_2(x + vt)$.

- Basi di cinematica:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad (\text{anche } \frac{d\vec{r}}{dt})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt};$$

$$\Delta \vec{s}|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt$$

$$\Delta \vec{v}|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt$$

Inoltre :

$$\Delta \left(\frac{1}{2} v_x^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} a_x(x) dx \quad \text{etc.}$$

- Eq. parametrica cerchio; **moto circolare:**

velocità e accelerazione (anche delle componenti).

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos[\theta(t)] \\ y(t) = R \sin[\theta(t)] \end{cases}$$

$$v(t) = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|; \quad a(t) = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$$

Moto circolare uniforme: $\theta(t) = \omega t$

Periodo: $t = T \implies \theta(t) = 2\pi$.

Frequenza (ν): giri/s. Vel. ang. (ω): rad/s.

$v(t)$ a $a(t)$ costanti in moto circ. uniforme.

$\vec{v}(t)$ sempre ortogonale a $\vec{r}(t)$ e a $\vec{a}(t)$.

- Leggi della meccanica

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad [\vec{p} = m\vec{v}]$$

$$\Delta \vec{p}|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

$$\vec{F}_A^{(B)} = -\vec{F}_B^{(A)}$$

$$\vec{F}_A^{(tot)} = \sum_i \vec{F}_A^{(i)}.$$

• Sistema isolato: $\sum_i \vec{p}_i = \text{costante}$.

• Altrimenti:

$$\frac{d}{dt} (\sum_i \vec{p}_i) = \vec{F}^{(ext)} \rightarrow \frac{d}{dt} v_{CM} = \frac{\vec{F}^{(ext)}}{m_{tot}}.$$

- **Forze (un inventario):**

$$F_G = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad \left[G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \right]$$

$$= -m_2 g \quad \left[\text{se } m_1 = M_T \text{ e } d = R_T \right]$$

$$\left[\Rightarrow g \approx 9.8 \text{ N/kg} \right]$$

$$F_C = k_0 \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad \left[k_0 = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2 \right]$$

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{G}$$

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$F_{el} = -k x$$

$$\vec{F}_{Ad} = -\mu_d F_N \hat{v}$$

$$\vec{F}_{Av} = -\beta \vec{v}$$

$$F_{As} \leq \mu_s F_N$$

$$\vec{T}? \vec{F}_{As}? \Rightarrow \text{'vincoli'}$$

- **Trasformazioni di velocità:**

$$\vec{r}_{O'}(P) = \vec{r}_{O'}(O) + \vec{r}_O(P).$$

- **Lavoro, energia cinetica e potenziale. Potenza.**

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$L|_A^B = \int_A^B dL = \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \Big|_A^B \equiv \Delta E_C|_A^B$$

$$\left[= -\Delta E_p|_A^B \text{ solo } \vec{F} \text{ conserv.} \right]$$

$$F_x = -\frac{dE_p(x)}{dx}, \text{ etc.}$$

$$P = \frac{dL}{dt} \quad (\text{anche } P = \frac{dE}{dt} \text{ e } P = \frac{dQ}{dt})$$

- **Energia potenziale e potenziale (grav. e elettr.)**

$$\Delta E_p|_A^B = m \cdot \Delta V_G|_A^B \iff \Delta E_p|_A^B = q \cdot \Delta V|_A^B$$

$$\text{Percorso chiuso: } \sum_i \Delta E_{p_i} = 0.$$

- **Forza \leftrightarrow En. Pot. \iff Campo \leftrightarrow Potenziale**
(caso elettrostatico, unidimensionale)

$$\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \iff \Delta V|_{x_1}^{x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} E(x) dx$$

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \iff E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Caso particolare di forza costante:

$$\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -F \cdot \Delta x \iff \Delta V|_{x_1}^{x_2} = -E \cdot \Delta x.$$

$$\text{Inoltre, da } \sum_i \Delta E_{p_i} = 0 \text{ segue } \sum_i \Delta V_i = 0.$$

- **Zero (convenzionale) del potenziale**

- Per come sono introdotti, E_p e V sono definiti a meno di una costante additiva;

- per le forze che vanno come $1/r^2$ è di norma conveniente porre lo zero del potenziale all'infinito \Rightarrow potenziale alla distanza r da Q :

$$V(r) - V(\infty) = \Delta V|_{\infty}^r = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$V(r) = \frac{k_0 Q}{r},$$

da cui segue en. pot. E_p di q posta alla distanza r :

$$E_{p_q}^{(Q)}(r) = q \cdot V^{(Q)}(r) = \frac{k_0 q Q}{r},$$

avendo esplicitato il fatto che $V(r)$ è dovuto a Q .

Infine, **campi e potenziali sono additivi.**

- **Centro di massa ('baricentro'):**

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{F}_{tot}^{ext} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i.$$

- **Urti:** \rightarrow conservano quantità di moto.

a) perfett. elastici: \rightarrow conservano energia meccanica.

b) complet. anelastici: \rightarrow si annulla E_c nel C.M.

- **Nota**, per urti perfett. elastici collineari: cons. q. di moto e cons. $E_C \rightarrow$ regola della somma delle velocità, ovvero regola della inversione delle velocità relative.

- **Fotometria:**

$$\eta : \text{'lm/W'}$$

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm} / 1 \text{ m}^2 \text{ (illuminamento)}$$

$$1 \text{ cd} = 1 \text{ lm} / 1 \text{ sr} \text{ (intensità luminosa)}$$

$$\text{sr} \rightarrow \text{'estensione del radiante allo spazio'}$$

$$Q_v : \text{("quant. di luce") : lm} \times \text{s ("Talbot")}$$

- **Corpo nero**

Leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4$$

$$\lambda_{max} \cdot T = 2.90 \times 10^{-3} \text{ K m}$$

$$\text{ove } \sigma \approx 5.7 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$$

- **Termometria** (qui Q indica quantità di calore):

$$Q = C \Delta T$$

$$\sum_i Q_i = 0 \quad (\text{ sistema isolato })$$

$$1 \text{ cal} = 4.184 \text{ J}$$

$$\lambda_{H_2O} = 80 \text{ cal/g (fusione)}$$

$$= 540 \text{ cal/g (ebollizione)}$$

- **Andamenti esponenziali** (Nota: $\alpha > 0$)
 con z generica variabile (temperatura, velocità,
 nr. di nuclei o di batteri, etc.)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{dz}{dt} &= \alpha z \\ \Rightarrow z(t) &= z_0 e^{t/\tau} \quad \left[\tau = \frac{1}{\alpha} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{dz}{dt} &= -\alpha (z - z_F) \\ \Rightarrow z(t) &= z_F + (z_0 - z_F) e^{-t/\tau} \quad \left[\tau = \frac{1}{\alpha} \right] \end{aligned}$$

Termalizzazione: $\alpha = \eta / (cM)$.

Vel. limite (attrito tipo $-\beta v$): $\alpha = \beta / m$.

- **Fluidi:**

$$\vec{F} = (P \cdot A) \hat{n}$$

$$\frac{dP}{dz} = \rho g \quad (z > 0 \text{ verso il basso})$$

$\Delta P \rightarrow$ si trasmette a tutto il fluido

$$F_{Arch.}^\uparrow = \rho_f V_{f.s.} g$$

$$v \cdot A = \text{costante} \quad [\text{'Leonardo'}]$$

$$P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} \quad [\text{'Bernoulli'}]$$

- **Gas perfetti:**

$$PV = nRT \quad [R = 8.31 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ mol}^{-1}]$$

$$L^{(dal \text{ gas})} = P \Delta V$$

$$\Delta E_{int} = Q^{(al \text{ gas})} - L^{(dal \text{ gas})}$$

- **Momenti di forze e di quantità di moto:**

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad \left[\vec{M}_{tot} = \sum_i \vec{M}_i \right]$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad \left[\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i \right]$$

$$\vec{M}^{(ext)} = 0 \implies \vec{L} = \text{cost}$$

- **Velocità aereolare:**

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{L}$$

- **Corpo rigido:**

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \left[= \sum_i I_i \right] \rightarrow \text{"} \int dI \text{"}$$

In particolare, corpo rigido ruotante intorno ad un asse fisso:

$$\begin{aligned} x &\leftrightarrow \theta \\ v = \frac{dx}{dt} &\leftrightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} \\ a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} &\leftrightarrow \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ m &\leftrightarrow I \\ a = \frac{F}{m} &\leftrightarrow \dot{\omega} = \frac{M}{I} \\ p = mv &\leftrightarrow L = I\omega \\ F = \frac{dp}{dt} = ma &\leftrightarrow M = \frac{dL}{dt} = I\dot{\omega} \\ \dots &\leftrightarrow \dots \end{aligned}$$

- **Ottica geometrica:**

Riflessione: $\theta_i = \theta_r$;

Legge di Snell: $n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \theta_2$;

(in entrambi i casi: $\vec{i}, \vec{n}, \vec{r}$ planari).

Punti coniugati specchi sferici e lenti:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Distanze focali di specchi sferici e lenti:

$$f = \pm \frac{R}{2} \quad (\text{concavo/convesso});$$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(Si presti attenzione alle *convenzioni dei segni*.)

Ingrandimento lineare: $M = -q/p$.

- **Fotocamera:**

- apertura angolare: $\alpha = 2 \arctan((L/2)/f) \approx L/f$.

- 'numero di diaframma': $n_D = f/D$

- reciprocità $T/n_D^2 = \text{cost.}$ a parità di illum. e ISO.

- sensibilità: se ISO raddoppia è sufficiente $Q_v/2$;
 da cui $T/n_D^2 \times \text{ISO} = \text{cost.}$

- **Onde progressive (nelle regressive "+ βx "):**

- equazione: $f(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x)$;

- periodicità: $T = 2\pi/\omega$; $\lambda = 2\pi/\beta$.

- velocità: $v = \omega/\beta = \lambda/T \rightarrow \lambda \cdot \nu = v$.

- **Circuiti in corrente continua (c.c.)**

Generatore di tensione:

$$V^{(+)} - V^{(-)} \equiv f$$

Legge di Ohm, leggi di Kirchhoff, effetto Joule:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$I_{A \rightarrow B} = \frac{V_A - V_B}{R_{A \leftrightarrow B}} \Rightarrow "I = \frac{\Delta V}{R}"$$

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (\text{conduttore cilindrico})$$

$$\sum_i I_i = 0 \quad (\text{nodi})$$

$$\sum_i \Delta V_i = 0 \quad (\text{maglie})$$

$$P = I \cdot \Delta V = \dots = \dots \dots$$

Resistenze in serie e in parallelo:

$$R_s = \sum_i R_i$$

$$R_p^{-1} = \sum_i R_i^{-1}$$

- **Condensatori e circuiti con f** (costante), **R** e **C**
(→ 'carica e scarica del condensatore')

$$V_C \equiv \Delta V = \frac{Q}{C} \quad \left[\iff \Delta T = \frac{Q}{C} \quad (\text{calorimetria}) \right]$$

Energia del condensatore: $\frac{Q \cdot V_C}{2} = \dots = \dots$

Parallelo e serie: $C_p = \sum_i C_i$; $C_s^{-1} = \sum_i C_i^{-1}$.

Semplici circuiti con f , R e C :

→ stesse regole ("Ohm e Kirchhoff") dei circuiti in c.c.,
con $I(t)$, $Q(t)$ e $V_C(t)$ [e $V_R(t)$] dipendenti dal tempo,
con $I = dQ/dt = C dV_C/dt$;

→ danno luogo a equazione differenziale riscrivibile
nella forma *canonica* che dà luogo ad andamenti
esponenziali.

Analogie notevoli:

→ andamento nel tempo della termalizzazione;

→ velocità limite nel caso di forze del tipo $-\beta \vec{v}$.

- **Inferenza e previsione probabilistica**

$$P(H_i | E_{obs}, I) \propto P(E_{obs} | H_i, I) \cdot P(H_i | I)$$

$$P(E_{pr} | I) = \sum_i P(E_{pr} | H_i, I) \cdot P(H_i | I)$$

Estensione alle distribuzioni di probabilità, con π
generico parametro e x un *valore osservato* ('dato') o
osservabile (→ previsione):

$$f(\pi | x, I) \propto f(x | \pi, I) \cdot f(\pi | I)$$

$$f(x | I) = \int_{\mathcal{D}(\pi)} f(x | \pi, I) \cdot f(\pi | I) d\pi$$

ove le ' $f(\cdot)$ ' sono generiche funzioni di probabilità
o pdf, matematicamente diverse anche se indicate con
stesso simbolo, e ' $\mathcal{D}(\pi)$ ' sta per il dominio di π .

Casi notevoli di inferenza parametrica

(da *prior uniforme*):

$$(\mathbf{x}, \sigma) \rightarrow \mu \sim \text{Norm}(\bar{x}, \sigma/\sqrt{n})$$

$$n \rightarrow \lambda \sim \text{Gamma}(n+1, 1)$$

$$(n, x) \rightarrow p \sim \text{Beta}(x+1, (n-x)+1)$$

⇒ dettagli su app *Probability Distributions*

(può essere usata, sotto controllo, all'esame, anche orale)

- **Propagazione di varianze** (di X_i indep.)

$$Y(\mathbf{X}) = \sum_i c_i \cdot X_i \rightarrow \sigma^2(Y) = \sum_i c_i^2 \cdot \sigma^2(X_i)$$

Linearizzazione: i coefficienti c_i sono ottenuti
espandendo $Y(\mathbf{X})$ al primo ordine intorno a $E(\mathbf{X})$.

- **Propag. di incertezze relative** (di X_i indep.)

Data una *funzione monomia* $Y(\mathbf{X}) = \prod_i X_i^{\alpha_i}$,
con $r_{X_i} = \sigma(X_i)/E(X_i)$, etc. :

$$r_Y^2 \approx \sum_i \alpha_i^2 \cdot r_{X_i}^2$$

- **Costanti varie**

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$$

$$k_0 = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{C}^{-2} \cdot \text{m}^2 \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{C}^{-2} \cdot \text{m}^2$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \cdot \text{C}^2 \cdot \text{m}^{-2}$$

$$q_e = -1e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 1836 \times m_e$$

$$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$