

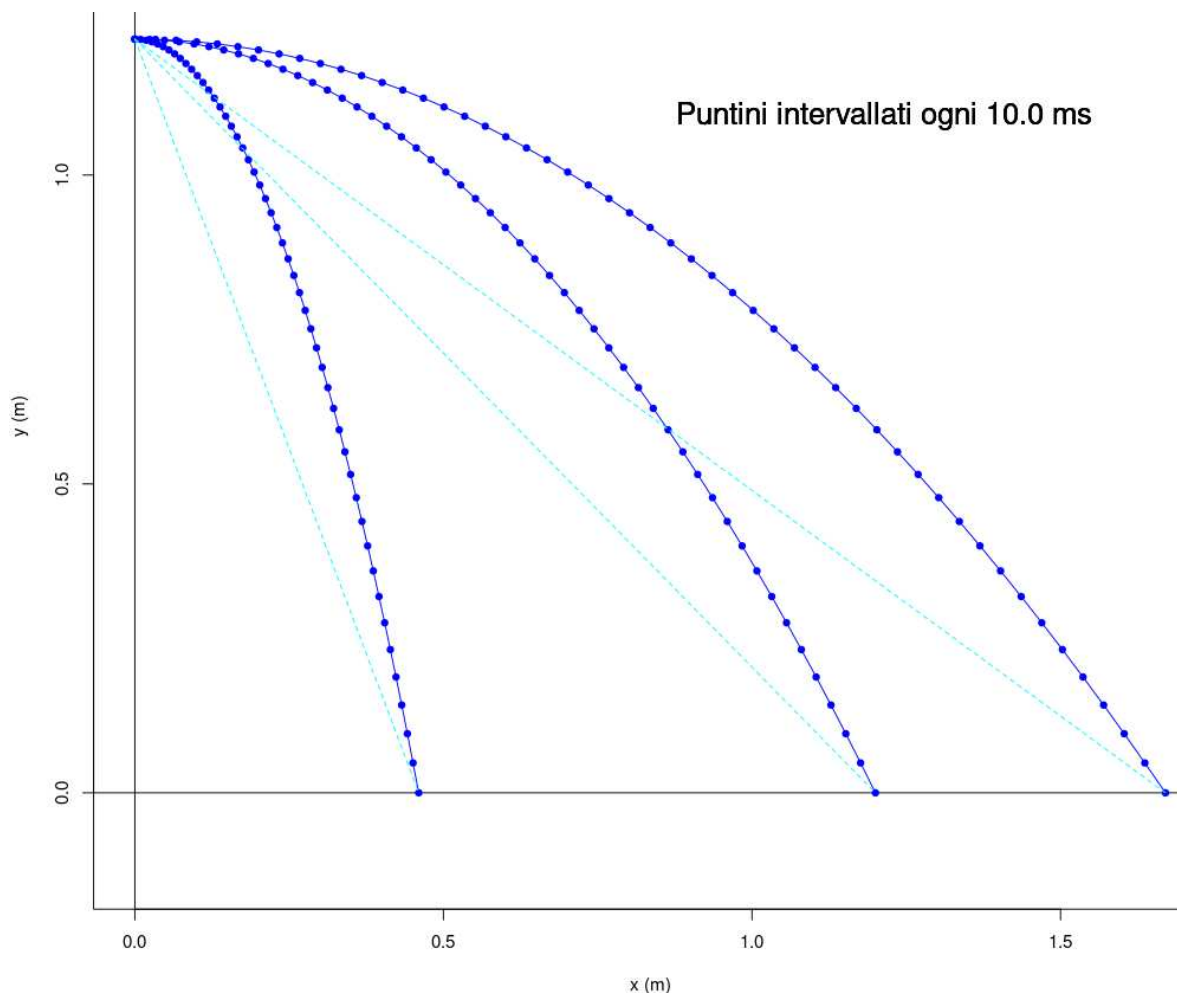
Nota sul calcolo dello spazio percorso nei lanci di monete (Fisica per SMIA – G. D’Agostini, Aprile 2023)

1. Il problema

Nel semplice esperimento del lancio orizzontale di monete dal piano della cattedra abbiamo visto come ricavarsi i parametri del moto dall’altezza del tavolo e dalla distanza raggiunta.

Abbiamo graficato quindi le equazioni orarie, ovvero $x(t)$ e $y(t)$, e le traiettorie, ovvero $y(x)$, delle quali riportiamo sotto la figura. Alle traiettorie sono sovrapposti dei puntini che indicano la posizione allo scorrere del tempo. Questi servono a darci un’idea della velocità istantanea, dato che informazione non è contenuta nella traiettoria.

Uno dei quesiti proposti era quello del calcolo dello spazio percorso lungo la traiettoria nei tre lanci. Il modo più semplice per risolvere il problema è quello di affrontarlo *numericamente*, calcolandoci la distanza spaziale fra un puntino e il successivo e sommando le distanze. Ovviamente, maggiore è il numero di puntini e maggiore è la precisione raggiunta, ma, come si vede dal grafico, i 50 intervallini mostrati in figura sono più che sufficienti per lo scopo che ci interessa (se vogliamo essere pignoli ci sono altri effetti che abbiamo trascurato, a partire dal ‘punto esatto’ dove è atterrata la moneta, e così via). I risultati che si ottengono sono, per i tre lanci, 1.344 m, 1.790 m e 2.149 m, ove il numero di cifre ridicolmente alto, per questo problema, è solo per confrontare i risultati con quelli che si possono ottenere con altri metodi.



Infine, ricordiamo che le linee tratteggiate servivano per avere una misura rozza e sottostimata delle varie lunghezze, tanto per avere l'ordine di grandezza (e un qualsiasi geometra, guardando la figura si ingegnerebbe subito per trovare un termine correttivo...). I valori che si ottengono sono 1.30 m, 1.71 m e 2.07 m (niente male!).

1 Soluzione analitica ottenuta mediante WolframAlpha

Ovviamente, qualcuno potrebbe essere tentato di fare un conto 'esatto', anche se non ha molto senso, viste le incertezze in gioco. Ma vediamo come procedere, essendo un interessante esercizio 'accademico'. Se indichiamo con S lo spazio percorso dal punto iniziale P_1 al punto finale P_2 , il problema può essere risolto calcolandoci

$$S = \int_{P_1}^{P_2} ds \quad (1)$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (2)$$

$$= \int_0^{x_f} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (3)$$

Dall'equazione della traiettoria otteniamo quindi

$$y(x) = h - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_x}\right)^2 \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{v_x^2} x \quad (5)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{g^2}{v_x^4} x^2 = \alpha^2 \cdot x^2, \quad (6)$$

con $\alpha^2 = g^2/v_x^4$, ove il quadrato è per ricordarci che tale termine è positivo.

L'integrale da risolvere è quindi

$$S = \int_0^{x_f} \sqrt{1 + \alpha^2 \cdot x^2} \cdot dx, \quad (7)$$

con α che nei tre lanci vale rispettivamente 11.531 m^{-1} , 1.6944 m^{-1} e 0.8749 m^{-1} (controllo dimensionale!), mentre le x_f valgono 0.46 m, 1.20 m e 1.67 m. (Anche in questo caso, il numero esagerato di cifre è dovuto al nostro intento di confrontare diversi risultati numerici fissando, per così dire, a 'valori nominali' le grandezze di interesse.)

A questo punto, siccome 'a occhio' l'integrale non sembra banale, lo diamo in pasto a WolframAlpha.

1. `Integrate[Sqrt[1+ alpha^2*x^2], {x,0,0.46}], where alpha=11.531`

Input interpretation

$$\int_0^{0.46} \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} dx \text{ where } \alpha = 11.531$$

Result

1.34426

2. `Integrate[Sqrt[1+ alpha^2*x^2], {x,0,1.20}]`, where `alpha=1.6944`

Input interpretation

$$\int_0^{1.2} \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} dx \text{ where } \alpha = 1.6944$$

Result

1.78989

3. `Integrate[Sqrt[1+ alpha^2*x^2], {x,0,1.67}]`, where `alpha=0.8749`

Input interpretation

$$\int_0^{1.67} \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} dx \text{ where } \alpha = 0.8749$$

Result

2.14874

Come si vede, i risultati sono praticamente coincidenti con quelli ottenuti sommando i 50 intervallini (e in caso di forte discrepanza c'è da fidarsi più del risultato ottenuto numericamente che di quello ottenuto 'non si sa come' da WolframAlpha.) E, a proposito di 'non si sa come', facciamoci dare anche l'*antiderivata* che ha usato per calcolare l'integrale:

Input:

`antiderivative Sqrt[1+ alpha^2*x^2]`

Output:

Indefinite integral

$$\int \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} dx = \frac{\alpha x \sqrt{\alpha^2 x^2 + 1} + \sinh^{-1}(\alpha x)}{2\alpha} + \text{constant}$$

Come si vede, si tratta di una funzione tutt'altro che elementare. Ed eccola implementata in R (ovviamente si raccomanda di implementarla nel linguaggio preferito):

```
# antiderivata fatta da WolframAlpha
ad.dsdx <- function(x, alpha) {
  ( alpha*x*sqrt(alpha^2*x^2+1) + asinh(alpha*x) ) / (2*alpha)
}
```

Per completezza, ecco anche l'implementazione in R della funzione a $\sqrt{1 + \alpha^2 x^2}$

```
# ds/dx
dsdx <- function(x, alpha) sqrt(1 + alpha^2 * x^2)
```

Ed ecco infine lo script per calcolare l'integrale nei tre lanci

```

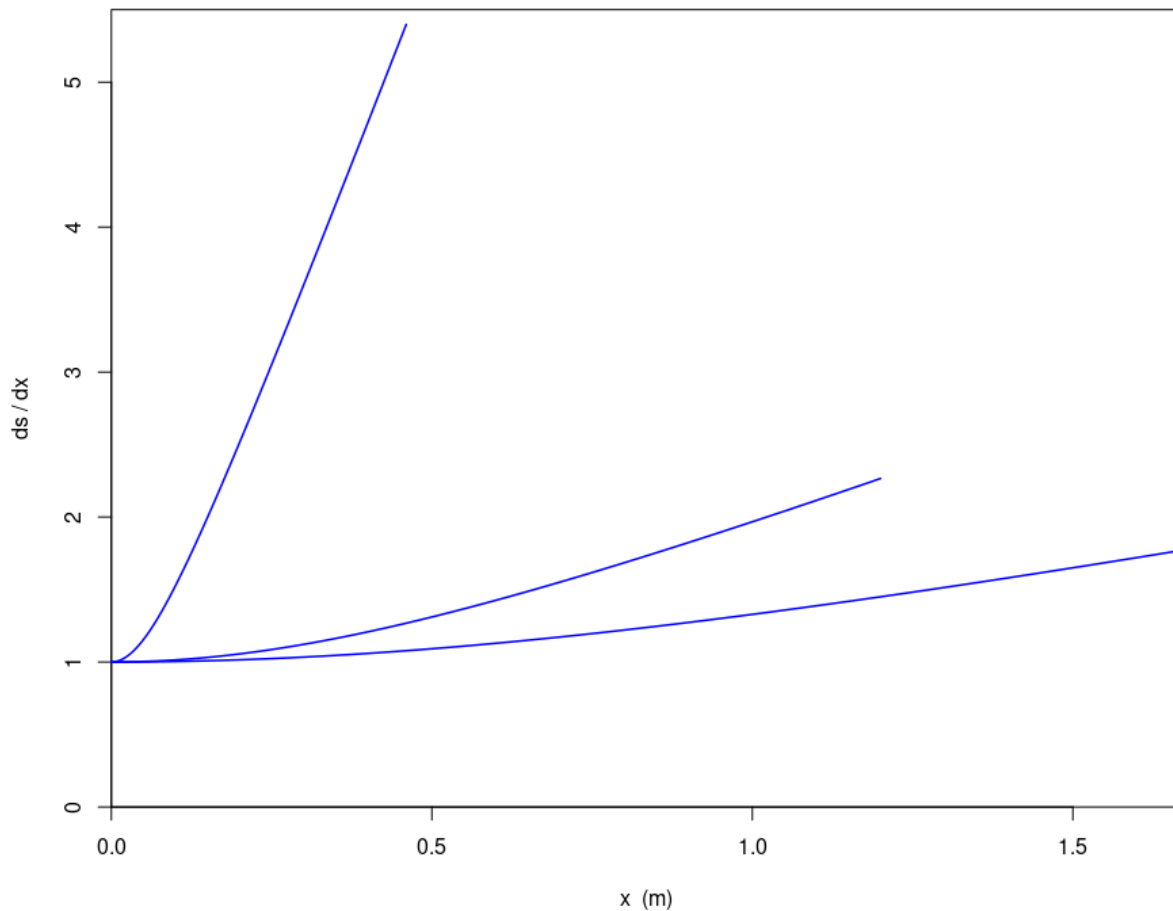
dx    <- c(46, 120, 167)/100      # cm -> m
alpha <- c(11.531, 1.6944, 0.8749) # m^-1
for( i in 1:3) {
  cat(sprintf(" - Lancio %d: %.3f m \n", i,
            ad.dsdx(dx[i], alpha[i]) - ad.dsdx(0, alpha[i])))
}

```

2 Altre soluzioni numeriche

Un altro modo per valutare l'integrale (7), che, ricordiamo, corrisponde a *sommare infiniti elementi infinitesimi*, è quello di sommare ‘tanti’ elementi ‘molto piccoli’. E questo lo possiamo fare numericamente con un piccolo programma.

Ma innanzitutto è istruttivo capire la forma della funzione integranda. Facciamo questo nella figura che segue, con tre curve, una per ogni lancio:



Come si vede, tutte e tre le funzioni assumono il valore 1 per $x = 0$, ovvero alla partenza. All’aumentare di x la pendenza delle curve aumenta e quella che raggiunge la pendenza maggiore è quella che raggiunge una distanza dal tavolo minore. Per capire questo comportamento riscrivimoci la funzione di interesse come

$$f(x) = \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \quad (8)$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (9)$$

Siccome inizialmente le monete partono orizzontalmente, lo spostamento è soltanto lungo l'asse x , da cui $ds/dx = 1$. A mano a mano che la velocità lungo y aumenta (in modulo) lo spostamento infinitesimo è dominato dalla componente y (ricordiamo che la velocità orizzontale si mantiene costante). Questo è il motivo per cui la prima curva della figura, legata al lancio più corto, è quella che si ‘impenna’ di più. (Al limite, per un oggetto in caduta verticale tale funzione assume un valore infinito in quanto la variazione di s è dovuta solo alla variazione di y , mentre x non cambia, ovvero $dx = 0$.)

Per quanto riguarda il calcolo dell'integrale, lo possiamo approssimare alla somma di tante ‘strisciole’ di larghezza Δx e altezze pari al valore della funzione calcolata al centro dell'intervallino.

2.1 Integrale numerico fatto ‘a mano’

Ecco come il problema può essere risolto, facendo uso di alcune linee di codice R (da riprodurre nel linguaggio preferito):

```
dx    <- c(46, 120, 167)/100      # cm -> m
alpha <- c(11.531, 1.6944, 0.8749) # m^-1

dsdx <- function(x, alpha) sqrt(1 + alpha^2 * x^2)

n = 100
cat(sprintf("\nIntegrale numerico fatto a 'mano' (%d intervallini):\n", n))
for(i in 1:3) {
  Dx <- dx[i]/n
  xc <- seq(Dx/2, dx[i]-Dx/2, len=n) # centri
  cat(sprintf(" - Lancio %d: %.3f m \n", i, sum(dsdx(xc, alpha[i])) * Dx))
}
```

2.2 Uso di una funzione di sistema

Come si può immaginare, problemi di integrazioni numerica sono abbastanza comuni e quindi apposite funzioni sono disponibili nei vari linguaggi. Ecco come il problema può essere risolto in R mediante la funzione `integrate()`, facendo uso dei vettori di dati e della funzione `dsdx()` definiti sopra;

```
cat("\nIntegrale usando la funzione di R 'integrate()':\n")
for( i in 1:3) {
  cat(sprintf(" - Lancio %d: %.3f m \n", i,
    integrate(dsdx, 0, dx[i], alpha=alpha[i])$value ))
}
```

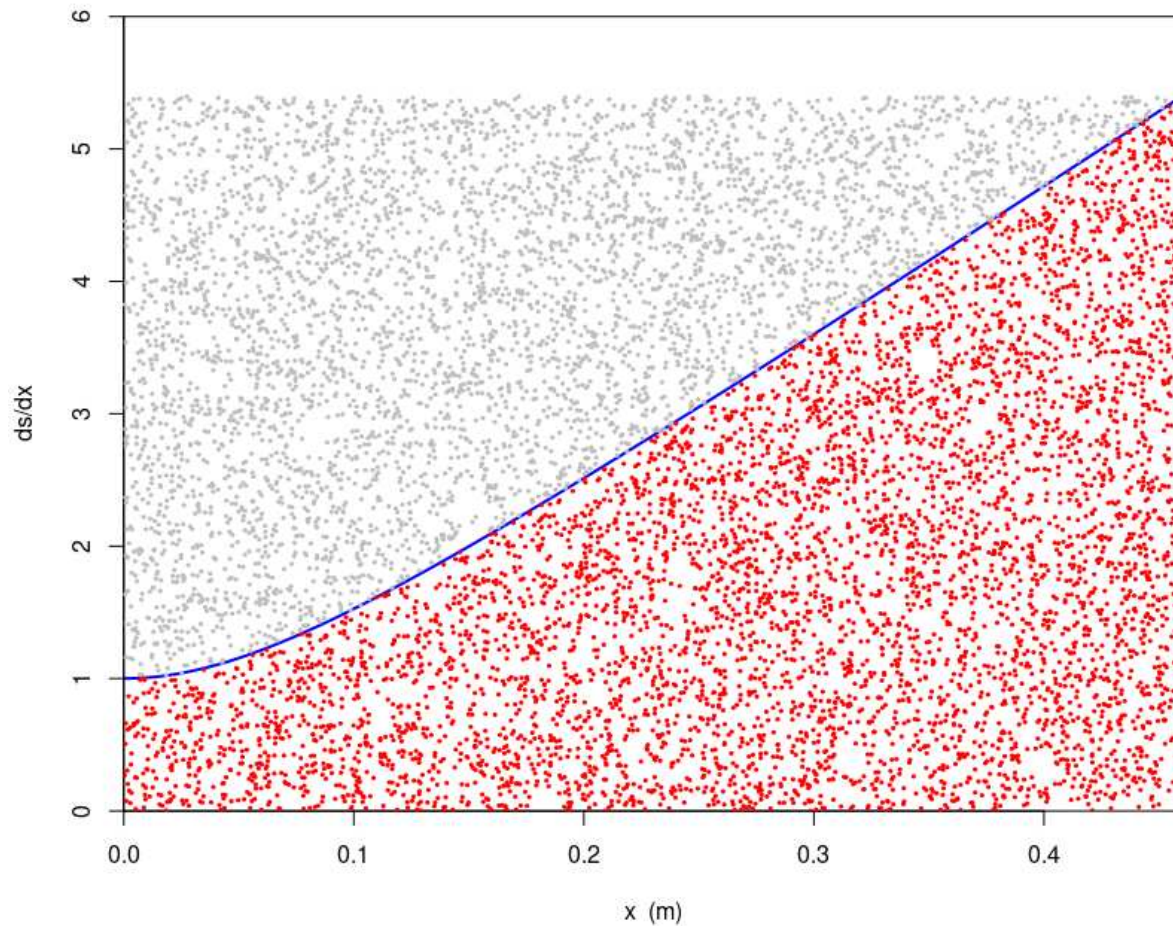
3 Valutazione dell'integrale ‘sparando punti a caso’

Per completare l'argomento, vediamo come risolvere il problema mediante una tecnica completamente diversa. Innanzitutto osserviamo che se una funzione ha un valore costante, che indichiamo con f_M , in un certo intervallo Δx , l'integrale è dato semplicemente da $f_M \cdot \Delta x$

in quanto ciascun elemento Δx_i contribuirà con $f_M \cdot \Delta x_i$ e quindi la somma sarà pari a $\sum_i f_M \cdot \Delta x_i = f_M \cdot \sum_i \Delta x_i = f_m \cdot \Delta x$.

A questo punto, con riferimento alla figura sotto, se noi estraiamo puntini ‘a caso’ all’interno del rettangolo definito dagli estremi delle ascisse e delle ordinate, *ci aspettiamo* che la frazione di numero di puntini ‘sotto la curva’ sarà *circa uguale* al rapporto fra l’area sotto la curva e l’area del rettangolo. (Non c’è niente di male a parlare di ‘area’, se si intende l’oggetto puramente grafico, ignorando le dimensioni fisiche delle grandezze che compaiono in ascissa e ordinata.)

Lancio nr. 1



Questa osservazione ci permette di sviluppare un’altra tecnica per il calcolo di integrali, che implementiamo in R nel codice sottostante (che fa uso di ‘oggetti’ definiti precedente):

```

N = 100000
cat(sprintf("\nIntegrale  'sparando punti a caso nel piano' (%d punti):\n", N))
for(i in 1:3) {
  xr <- runif(N, 0,dx[i])
  yr <- runif(N, 0, dsdx(dx[i], alpha[i]))
  sotto <- yr <= dsdx(xr, alpha[i])
  integrale <- sum(sotto)/N * dx[i]* dsdx(dx[i], alpha[i])
  cat(sprintf(" - Lancio %d: %.3f m \n", i, integrale))
}

```

Osserviamo infine che non è strettamente necessario porre l'altezza del rettangolo entro cui 'sparare' i puntini esattamente uguale al valore massimo della funzione integranda nell'intervallo di x di interesse. Ad esempio nel nostro caso avremmo potuto estrarre i valori (pseudo-)random delle y fra 0 e 6. Come si capisce facilmente, il risultato non cambia, purché si usi il corretto rettangolo di riferimento. Al più ci si rimette in *efficienza* del metodo perché i puntini che vanno sopra il massimo non ci danno informazioni utili. Ma talvolta lo si fa, se la valutazione del massimo è problematica (se per caso lo si sottostima, ci vuol poco a capire che il valore dell'integrale viene sistematicamente errato – domanda su cui pensare: in questo caso l'integrale verrà sistematicamente sotto- o sovra-stimato?)

4 Conclusioni

Abbiamo visto ben otto modi per valutare la grandezza di interesse, di cui uno è stato solo accennato a lezione, ma che per completezza inseriamo nell'elenco che segue:

1. stima 'rozza' considerando un percorso lineare dal punto di partenza al punto di arrivo;
2. valutazione numerica sommando le distanze da un punto all'altro della traiettoria, con i punti distanziati di 10 ms
(ma questo metodo richiede la conoscenza delle equazioni orarie);
3. stesso ragionamento, ma con i punti distanziati di Δx costante
(non sono stati effettuati i conti in quanto si vede a occhio che il risultato non può differire di molto da quanto ottenuto usando il metodo precedente);
4. calcolo analitico dell'integrale $\int_0^{x_f} \sqrt{1 + \alpha^2 \cdot x^2} \cdot dx$, fatto eseguire da WolframAlpha;
5. calcolo analitico di tale integrale facendo uso dell'antiderivata ('primitiva') di $f(x) = \sqrt{1 + \alpha^2 \cdot x^2}$ ottenuta da WolframAlpha;
6. calcolo numerico di tale integrale, con nostro codice, sommando tanti piccoli contributi $f(x_i) \cdot \Delta x_i$;
7. calcolo numerico di tale integrale usando una funzione di sistema (che nella sostanza fa qualcosa di simile a quanto fatto 'a mano' nel punto precedente);
8. valutazione tramite campionamento, 'sparando punti a caso in un apposito rettangolo' ('metodo di Monte Carlo').

È importante prendere confidenza con questi metodi, in quanto ai giorni d'oggi non ci sono più scuse per non essere in grado di effettuare integrali, specie se di 'bassa dimensionalità'. E anche la 'stima rozza' (1.) non è da disdegnare in quanto a) è difficile sbagliare il conto; b) il risultato approssimato ci dà una buona idea di quanto ottenibile con metodi più 'raffinati'.