

(Questa è la sola volta in cui scriviamo la soluzione *in pompa magna*, limitandoci nel seguito a dare ampiezza e fase dei vari segnali sinusoidali.)

La figura 7.3 riporta V_C in funzione del tempo, confrontata con la tensione del generatore. Si noti in particolare il significato di *sfasamento negativo*: i picchi di V_C arrivano *dopo* quello della tensione del generatore, come si può capire facilmente considerando che il picco centrale di $f(t)$ si verifica al tempo normalizzato di 1, mentre quelli di V_C arrivano dopo, con *ritardo* che cresce con la frequenza.⁴

7.4 Tensione ai capi di R

Dall'espressione di $V_C(t)$ ci possiamo ricavare la carica del condensatore e dalla sua derivata rispetto al tempo la corrente che circola nel circuito, da cui la tensione ai capi del resistore. Schematicamente

$$V_C(t) \rightarrow Q(t) \rightarrow I(t) \rightarrow V_R(t)$$

e più precisamente

$$V_R(t) = RI(t) = R \frac{dQ(t)}{dt} = RC \frac{dV_C(t)}{dt} = \tau \frac{dV_C(t)}{dt} :$$

istante per istante la tensione ai capi di R è pari alla derivata della tensione ai capi di C , con un fattore τ che poteva essere evinto da ragionamenti dimensionali.

Scrivendo $V_C(t)$ in modo compatto in termini di V_{C_0} e φ_C , otteniamo

$$V_R = RC \frac{d}{dt} [V_{C_0} \cos(\omega t + \varphi_C)] . \quad (7.20)$$

7.4.1 Derivate 'da fisico' delle funzioni sinusoidali

A questo punto, prima di arrivare al risultato che ci interessa, facciamo una piccola digressione sulle derivate rispetto al tempo di funzioni sinusoidali.

Se abbiamo una generica grandezza x sinusoidale di ampiezza X e fase φ_x , ovvero

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi_x) , \quad (7.21)$$

la sua derivata rispetto al tempo, che con grande fantasia denotiamo con v_x , vale $v_x(t) = -\omega X \sin(\omega t + \varphi_x)$, che riscriviamo convenientemente come

$$v_x(t) = \omega X \cos\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) : \quad (7.22)$$

l'effetto di derivare rispetto al tempo è quello di moltiplicare l'ampiezza per ω e aumentare la fase di $\pi/2$. (Ovviamente il risultato sarebbe stato lo stesso se fossimo partiti dalla funzione seno.)

⁴Un errore tipico è di visualizzare le varie sinusoidi come onde che si propagano verso destra, credendo così quelle del condensatore arrivano prima.

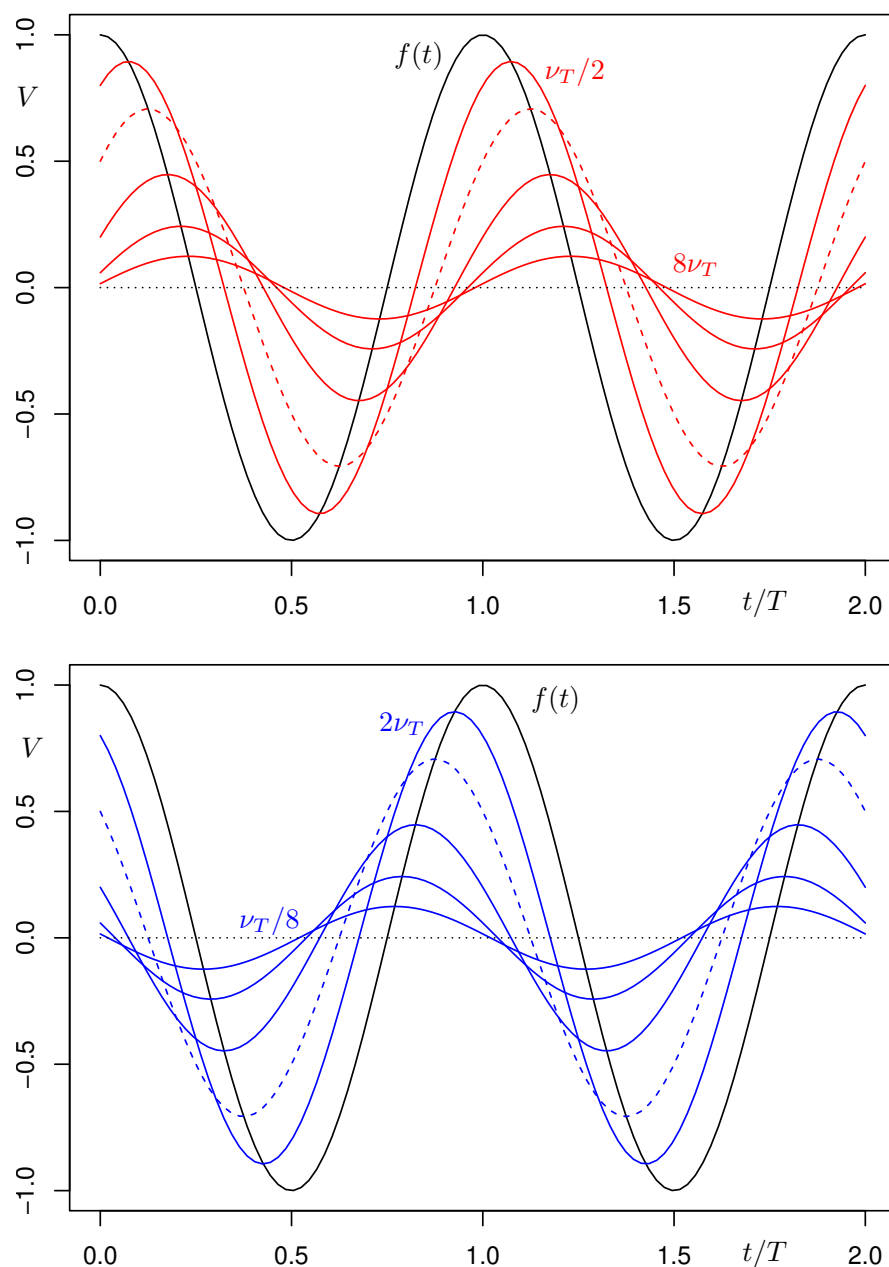


Figura 7.3: Tensioni ai capi della resistenza (in basso) e del condensatore (in alto) per alcuni valori della frequenza, confrontate con la tensione del generatore, indicata con $f(t)$. Per le tensioni del condensatore le frequenze variano di fattori 2 da $\nu_T/2$ a $8\nu_T$. Per quelle ai capi della resistenza esse vanno invece da $8/\nu_T$ a $2\nu_T$. Le tensioni corrispondenti alle frequenze di taglio sono indicate in entrambi i casi con tratteggio. Si noti anche come la scala temporale sia data in unità del periodo.

Se deriviamo una seconda volta (e indichiamo la derivata seconda con a_x) otteniamo quindi

$$a_x(t) = \omega^2 X \cos(\omega t + \varphi_x + \pi), \quad (7.23)$$

e così via:

$$\frac{d^n}{dt^n}[X \cos(\omega t + \varphi_x)] = \omega^n X \cos(\omega t + \varphi_x + n\frac{\pi}{2}). \quad (7.24)$$

Nel seguito discuteremo l'analogia con il moto circolare uniforme, già palese da queste formule.

7.4.2 Ampiezza e sfasamento di V_R

Applicando alla (7.20) la regoletta sulle derivate che abbiamo appena imparato otteniamo

$$V_R = \omega \tau V_{C_0} \cos(\omega t + \varphi_C + \pi/2), \quad (7.25)$$

dalla quale ci ricaviamo le espressioni di ampiezza e fase:

$$V_{R_0} = \omega \tau V_{C_0} = \frac{\omega/\omega_T}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_T)^2}} V_0 \quad (7.26)$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\omega_T/\omega)^2}} \quad (7.27)$$

$$\varphi_R = \varphi_C + \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_T}\right) + \frac{\pi}{2}, \quad (7.28)$$

ove i rapporti ω/ω_T all'interno delle espressioni possono essere ovviamente sostituiti da ν/ν_T . ovvero

$$V_{R_0} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\nu_T/\nu)^2}} \quad (7.29)$$

$$\varphi_R = -\arctan\left(\frac{\nu}{\nu_T}\right) + \frac{\pi}{2}. \quad (7.30)$$

Infine, possiamo dare un'espressione diretta di φ_R , ricordandoci dell'identità trigonometrica $\tan(x + \pi/2) = -1/\tan x$:

$$\varphi_R = \arctan \frac{\omega_T}{\omega} [= \arctan \frac{\nu_T}{\nu}], \quad (7.31)$$

anche se si sconsiglia fortemente di tentare di memorizzare troppe formule e si raccomanda di focalizzare l'attenzione sulla relazione di fase rispetto alla tensione ai capi del condensatore, ovvero $\varphi_R = \varphi_C + \frac{\pi}{2}$, la quale è più 'fisica' e ha una validità generale, come vedremo nel seguito per l' RLC .⁵ I risultati sono mostrati graficamente, e confrontati con quelli ai capi del condensatore, nelle