36 $\boxed{\text{Mar 25 maggio – 2h}}$

36.1 Forze centrali, conservazione del momento della quantità di moto e legge di Keplero sulla velocità 'delle aree'

Se $\vec{r}$ e $\vec{F}$ sono paralleli (o antiparalleli), il loro momento è nullo (proprietà generale del prodotto vettoriale). Ne segue che il momento della quantità di moto si conserva. Una banale consequenza è il moto circolare uniforme in quanto forza centripeta diretta lungo $\vec{r}$. Ma essa vale nei moti orbitali, ad esempio in quello della Terra intorno al sole, essendo la forza 'centrale', anche se non costante: il momento della quantità di moto della Terra si conserva. Qualitativamente ne segue che se essa è più lontana va anche più lentamente (un caso notevole è quello delle comete).

La legge di Keplero sulla velocità aereolare è una consequenza della conservazione del momento della quantità di moto.

- Innanzitutto ricordiamo che il modulo del prodotto vettoriale $\vec{a} \wedge \vec{b}$, ovvero $a \cdot b \cdot \sin\theta$ è pari all'area del parallelogramma individuato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (se i vettori sono paralleli o antiparalleli va da sé che il parallelogramma è degenere e la sua area è nulla).

- Scriviamo quindi[12]

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \wedge \vec{p} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v} = m\,\vec{r} \wedge \frac{d\vec{s}}{dt} \\ \vec{L} &= m\frac{d}{dt}\left[\vec{r} \wedge d\vec{s}\right].\end{aligned}$$

  Ma $\vec{r} \wedge d\vec{s}$ è pari all'area del parallelogramma infinitesimo individuato da $\vec{r}$ e $d\vec{s}$, doppia all'area del triangolo i cui lati sono dati da $|\vec{r}|$ e $|d\vec{s}|$.

- Ne segue $dA = R\,v\,(\sin\theta)\,dt/2$, ovvero

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\,|\vec{r} \wedge \vec{v}|,,$$

  ovvero se si considera dA/dt come un vettore, con verso entrante o uscente a seconda di come l'area viene 'spazzata',

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\,\vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2\,m}\,\vec{L}.$$

- Caso di *forze centrali* (ad esempio quelle esercitate dal Sole su pianeti e comete): $\vec{r}$ e $\vec{F}$ sono antiparalleli, ne segue che il **momento della forza è sempre nullo**, il **momento della quantità si conserva**, e quindi **la velocità aereolare è costante** (la ben nota 'legge' di Keplero viene riottenuta dalle leggi della meccanica).

[12] Si noti come, applicando le regole generali delle derivate, si avrebbe

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r} \wedge d\vec{s}\right] = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge d\vec{s} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{s}}{dt}$$

ma il primo termine è nullo in quanto la derivata di $\vec{r}$ è la velocità $\vec{v}$, la quale è parallela a $d\vec{s}$ in quanto $d\vec{s} = \vec{v}dt$ (il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo).