

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA  
" LA SAPIENZA "  
Dipartimento di Fisica

# ***Esercitazioni di fisica sperimentale per Chimici***

***Canale A - L***

Termologia e calorimetria  
Oscilloscopio  
Spettroscopio  
Corrente alternata  
Gazzetta - Ufficiale - Unita' di misura

***Proff. ri Alessio - Improta***

---

---

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA

"La Sapienza"

Dipartimento di Fisica

Appunti delle lezioni di

E S P E R I M E N T A Z I O N E F I S I C A

M. Alessio - S. Improta

MISURAZIONI DI TERMOLOGIA

## PARTE TERZA

1) Misurazioni di temperatura. Generalità.

La misurazione della temperatura di un sistema fisico viene generalmente eseguita mediante strumenti tarati, detti termometri, sfruttando fenomeni in cui variazioni di temperatura sono legate a variazioni di altre grandezze. Tra queste si ricordano: il volume di un solido e di un liquido, la pressione di un gas mantenuto a volume costante, la resistività di un materiale conduttore, la tensione di vapore saturo di un liquido, la differenza di potenziale tra le due saldature di una termocoppia, etc.

Nella maggior parte dei casi un termometro interagisce termicamente con il sistema fisico scambiando con esso calore. Si tratta pertanto di una interazione "perturbativa" il cui effetto è tanto più piccolo quanto minore è la capacità termica del termometro.

In secondo luogo le modalità di scambio termico fanno sì che lo strumento si metta in equilibrio termico con l'ambiente con un certo "ritardo" che è tanto più piccolo quanto maggiore è la prontezza del termometro.

Le esigenze di minima perturbazione e di elevata prontezza, dipendendo dalle particolarità costruttive, sono spesso in contrasto con le caratteristiche di sensibilità, precisione e giustezza: in tali casi è necessario addivenire ad opportuni compromessi.

2) Termometri a liquido.

Un termometro a liquido è costituito da un bulbo di vetro connesso con un capillare esso pure di vetro e contenente un liquido scelto con particolari criteri. Un tale strumento

consente di misurare la temperatura di un sistema per il fatto che il coefficiente di dilatazione del liquido termometrico è molto più elevato di quello del vetro. Per esempio il coefficiente di dilatazione termica del mercurio è  $0,0001826 \text{ K}^{-1}$  mentre quello del vetro, a seconda della composizione, è da 10 a 1000 volte minore.

Per effetto di una variazione della temperatura, sia il contenitore in vetro (sostanzialmente il bulbo), sia il liquido in esso contenuto subiscono una variazione di volume; la diversità dei coefficienti di dilatazione consente di osservare una variazione del liquido nel capillare. Tale variazione di livello si assume come misura della variazione di temperatura che l'ha provocata.

Un termometro a liquido deve essere tarato con un termometro assoluto (termometro a gas).

Il liquido termometrico viene scelto anzitutto a seconda dell'intervallo termico in cui si devono eseguire le misurazioni: tale intervallo non può infatti eccedere gli estremi fissati dalla temperatura di solidificazione e dalla temperatura di ebollizione del liquido.

In realtà un liquido può essere usato come liquido termometrico anche a temperatura superiore alla propria temperatura di ebollizione se viene usato l'artificio di introdurre nel capillare, al di sopra del liquido, un gas a pressione opportuna. Tuttavia con un termometro a liquido non si possono di norma misurare temperature superiori a  $500^\circ\text{C}$  circa, perché a tali temperature il vetro comincia a deformarsi.

E' bene inoltre che il liquido termometrico abbia un coefficiente di dilatazione debolmente dipendente dalla temperatura; ciò consente infatti che la scala sia praticamente lineare, il che semplifica sia il tracciamento della scala stessa, sia la lettura su di essa. Appunto per questo è importante che il liquido termometrico sia facilmente purificabile: la presenza di impurità influenza infatti notevolmente

l'andamento del coefficiente di dilatazione in funzione della temperatura.

Il liquido termometrico deve inoltre possedere un coefficiente di conduzione termica abbastanza elevato da potere ritenere, istante per istante, tutto il liquido alla stessa temperatura.

Il mercurio soddisfa molto bene questi requisiti; inoltre l'intervallo tra temperatura di solidificazione ( $-38,87^{\circ}\text{C}$ ) e di ebollizione ( $356,58^{\circ}\text{C}$ ) è abbastanza esteso, e perciò esso è molto usato come liquido termometrico.

Per temperature inferiori alla minima misurabile con un termometro a mercurio si possono usare termometri ad alcool (temp. di solid.  $-117,3^{\circ}\text{C}$ ), pentano (temp. di solid.  $-129,72^{\circ}\text{C}$ ), toluolo (temp. di solid.  $-95^{\circ}\text{C}$ ), oppure termometri di altro tipo.

Un termometro a liquido è facilmente soggetto a stararsi, soprattutto perché il vetro si comporta più come un liquido molto viscoso che come un solido e quindi:

- a) - se il vetro non è sufficientemente stagionato subisce una sensibile deformazione, lenta ma continua, dovuta al fatto che va modificando la sua struttura microscopica. Tale fenomeno si esalta se il termometro viene tenuto a lungo a temperature molto diverse tra loro;
- b) - il vetro subisce fenomeni di ricottura, con effetti che possono essere vistosi soprattutto per i termometri destinati a misure di temperature elevate;
- c) - se il termometro viene sottoposto ad una violenta variazione di temperatura e poi riportato alla temperatura iniziale, il volume del bulbo torna al valore iniziale molto lentamente così da dare luogo ad una staratura

temporanea dello strumento;

- d) - il volume del bulbo risente delle variazioni della pressione esterna (nei termometri comunemente in uso la sensibilità a tali variazioni è dell'ordine di  $10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{Pa}}$ ).

Le variazioni di volume del bulbo dovute alle ragioni accennate non sono di notevole entità, ma ci si rende conto della loro importanza se si pensa che in un comune termometro a mercurio il volume del bulbo è uguale al volume di capillare impegnato da una variazione di temperatura di circa 6000 K e quindi una variazione del volume del bulbo dello 0,01% corrisponde ad una variazione della temperatura segnata dal termometro di circa 0,5 K.

E' necessario quindi procedere a controlli periodici della taratura. Questi si eseguono disponendo di almeno due termostati a temperature note e convenientemente scelte. Siano  $T'_A$  e  $T'_B$  i valori veri di tali temperature,  $T_A$  e  $T_B$  le temperature segnate dal termometro quando viene posto in equilibrio con l'uno o l'altro termostato: essendo in prima approssimazione lineare la relazione  $T'$  e  $T$ , cioè

$$T' = a + bT$$

si ricava

$$T' = \frac{T'_A T_B - T_A T'_B}{T_B - T_A} + \frac{T'_B - T'_A}{T_B - T_A} T.$$

E' da tener presente inoltre che i termometri a liquido sono generalmente del tipo detto "a immersione totale", cioè la temperatura letta sulla loro scala è giusta solo se il termometro è completamente contenuto nell'ambiente la cui temperatura si deve misurare. Di solito invece soltanto il bulbo e una parte del capillare si trovano nell'ambiente a temperatura incognita; da ciò deriva un errore sul valore letto, che si

può correggere mediante una opportuna formula, ove si conosca la differenza tra i coefficienti di dilatazione del liquido termometrico e del vetro con cui è costruito il termometro.

### 3) Perturbazione di un termometro.

Si voglia misurare la temperatura  $T_1$  di un sistema fisico, di capacità termica  $C_1$ , isolato dall'ambiente e sia  $T_A$  la temperatura di quest'ultimo. L'operazione da eseguire è quella di porre il termometro, supposto in equilibrio con l'ambiente, in contatto con il sistema.

Ne segue uno scambio di calore, tra termometro e sistema fisico, al termine del quale entrambi sono in equilibrio alla temperatura  $T_2$  misurata dallo strumento. Sarà, ovviamente

$$T_1 > T_2 > T_A \quad \text{per} \quad T_1 > T_A$$

Indicando con  $C_2$  la capacità termica del termometro si ha la seguente equazione di scambio:

$$C_2 (T_2 - T_A) = C_1 (T_1 - T_2)$$

Ricavando  $T_2$  si ha:

$$T_2 = \frac{T_1 + \frac{C_2}{C_1} T_A}{1 + \frac{C_2}{C_1}}$$

Ne segue che  $T_2 \neq T_1$  per qualunque valore del rapporto  $C_2/C_1$  ad eccezione del caso, ovvio, in cui  $T_1 = T_A$ . Per  $C_2 \ll C_1$  è  $T_2 \simeq T_1$  se  $T_A$  non è molto maggiore di  $T_1$ .

L'entità della perturbazione introdotta dallo strumento di misura, che individua l'errore sistematico su  $T_2$ ,  $\Delta T_2 \text{ sist}$ , è data da:

$$\Delta T_2 \text{ sist} = |T_1 - T_2| = \frac{|T_1 - T_A|}{1 + \frac{C_1}{C_2}}$$

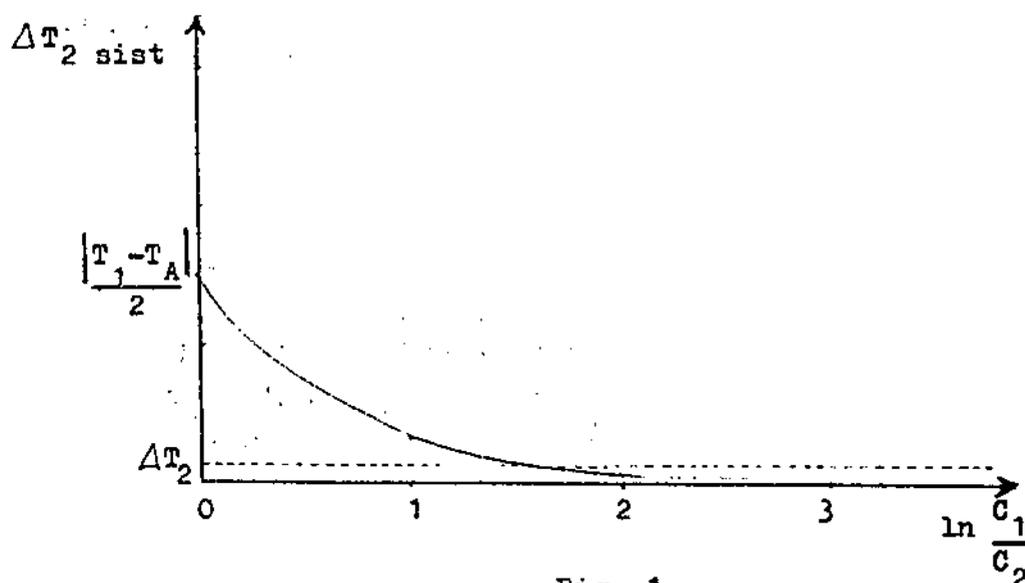


Fig. 1

Per un fissato valore della differenza  $|T_1 - T_A|$ ,  $\Delta T_2 \text{ sist}$  è funzione univoca del rapporto  $C_1/C_2$  (v. Fig.1), al crescere del quale esso diventa trascurabile rispetto all'errore di lettura  $\Delta T_2$ .

#### 4) Prontezza di un termometro a liquido.

Ci si propone ora di studiare l'andamento in funzione del tempo della temperatura misurata da un termometro quando esso venga posto in contatto con un sistema a temperatura costante diversa da quella ambiente. Sia la conducibilità termica del liquido termometrico abbastanza grande da poter supporre che

esso si trovi tutto, ad ogni istante, alla stessa temperatura.

Questa ipotesi è basata sulla esiguità della massa di liquido che si muove nel capillare in confronto a quella che rimane nel bulbo ed è verificata tanto meglio quanto più lento è l'ingresso di calore nel termometro e quanto minore è la disuniformità di temperatura, nel caso che una parte del termometro si trovi a temperatura diversa da quella del bulbo; se l'ipotesi non è verificata, la capacità termica e la temperatura del liquido non sono più esattamente definibili.

Si supponga di immergere istantaneamente il termometro in un ambiente a temperatura  $T_1$  costante anche in seguito alla interazione con il termometro e di indicare con  $T$  la temperatura del mercurio, che è funzione del tempo.

L'andamento temporale si può dividere in due fasi che saranno indicate come fase 1 (iniziale o di transizione) e fase 2.

#### Fase 1

All'istante dell'immersione, le temperature dell'ambiente, del vetro costituente l'involucro e del liquido termometrico sono schematicamente indicate in fig. 2a. Attraverso situazioni intermedie, qualitativamente indicate dalle fig. 2b, 2c, si arriva ad una condizione del tipo di quella mostrata in fig. 2d, in cui si è stabilito, nell'interno della parete di vetro, un andamento lineare della temperatura in funzione della distanza dalla sorgente di calore. In questa descrizione si fa l'ipotesi che durante tutta la prima fase la temperatura del liquido termometrico non cambi apprezzabilmente; questo è tanto più vicino al vero quanto più sottile è l'involucro del bulbo, in modo da abbreviare il periodo di transizione; e quanto maggiore è la capacità termica del liquido.

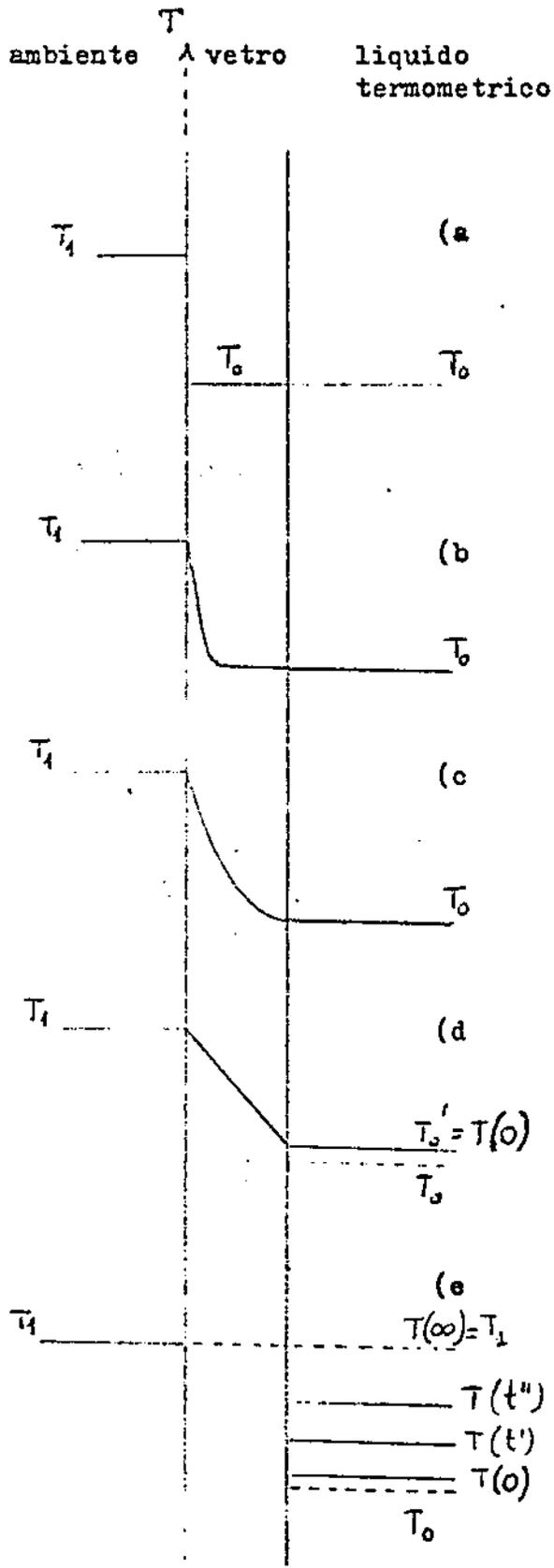


Fig. 2

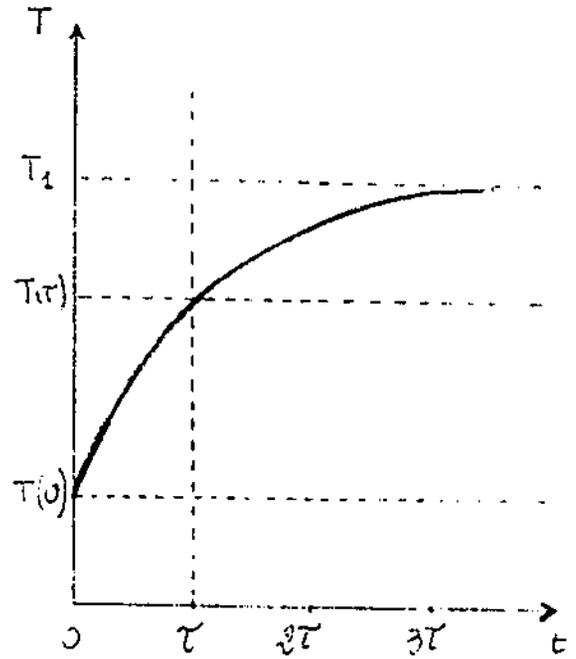


Fig. 3

Fase 2

Una volta stabilita la situazione di fig. 2d, eventualmente con una  $T(0) \neq T_0$ , la quantità di calore elementare  $dQ$  che viene trasmessa nell'intervallo di tempo  $dt$  dall'ambiente a temperatura  $T_1$  al liquido termometrico a temperatura  $T(t)$  è

$$dQ = \delta [T_1 - T(t)] dt \quad (*)$$

ove  $\delta$  è una costante che dipende dal materiale costituente l'involucro. Ne consegue una variazione  $dT(t)$  della temperatura del liquido termometrico secondo la relazione

$$dQ = C dT(t)$$

ove  $C$  è la capacità termica del liquido termometrico.

Confrontando le due equazioni precedenti si ottiene l'equazione differenziale a variabili separate

$$\frac{dT}{T_1 - T(t)} = \frac{\delta}{C} dt$$

da cui

$$-d \ln [T_1 - T(t)] = - \frac{\delta}{C} dt.$$

Ponendo  $\tau = \frac{C}{\delta}$  ed integrando tra gli istanti 0 e  $t$  si ottiene

$$T_1 - T(t) = [T_1 - T(0)] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1)$$

---

(\*) Attraverso una lastra omogenea a facce piane e parallele di superficie  $S$  molto estesa rispetto al suo spessore  $l$ , si propaga durante il tempo  $dt$  la quantità di calore  $dQ$  espressa dalla relazione

(la nota continua alla pag. seg.)

La costante  $\tau$ , che ha le dimensioni di un tempo, è la "costante di tempo" caratteristica del termometro: essa rappresenta, nelle situazioni in cui la durata della fase iniziale sia  $\ll \tau$ , il tempo necessario perchè la differenza fra la temperatura del mercurio e la temperatura del mezzo circostante si riduca ad  $\frac{1}{e}$  ( $e = 2,718 \dots$ ) del <sup>proprio</sup> valore iniziale. Un termometro può quindi dirsi tanto più "pronto", cioè capace di mettersi rapidamente in equilibrio con l'ambiente, quanto minore è la sua costante di tempo (v. fig.3).

Il tipo di dipendenza della temperatura dal tempo espresso dall'equazione precedente si traduce, come si vede scrivendo tale equazione nella forma

$$\ln \frac{T_1 - T(t)}{T_1 - T(0)} = - \frac{t}{\tau},$$

nella dipendenza lineare della funzione  $\ln \frac{T_1 - T(t)}{T_1 - T(0)}$  dal tempo, il che consente, mediante un'opportuna rappresentazione grafica, di misurare  $\tau$  attraverso la determinazione del coefficiente angolare di una retta.

(z)

$$dQ = k \frac{S(T_2 - T_1) dt}{l},$$

ove  $T_2$  e  $T_1$  sono le temperature, supposte costanti, delle due facce della lastra e  $k$  è il coefficiente di conducibilità o conduttività interna, caratteristico del materiale costituente la lastra e della temperatura media

$$T_m = \frac{T_1 + T_2}{2} \text{ della lastra.}$$

La costante  $\delta$  che compare nel testo equivale quindi a  $k \frac{S}{l}$ .

Se è possibile eseguire misurazioni di  $T(t)$  anche durante la fase di transizione (fase I), il che avviene se la durata di tale fase non è trascurabile rispetto alla costante di tempo del termometro, e questa è a sua volta abbastanza grande da consentire materialmente le misurazioni, si può osservare un andamento iniziale della risposta del termometro in funzione del tempo diverso da quello descritto dall'equazione (1); ciò potrebbe consentire di valutare  $T'_0$ .

Se invece  $\tau$  è così piccola da non consentire di distinguere diversi andamenti nella risposta, quella che si può misurare è una costante di tempo "equivalente", cioè la costante di tempo che il termometro avrebbe se l'andamento di  $T(t)$  fosse, fin dall'istante dell'immersione nell'ambiente a temperatura  $T_1$ , quello descritto dall'equazione (1).

La trattazione è stata finora svolta nell'ipotesi che l'ambiente a temperatura  $T_1$  fosse una sorgente di calore, nel senso che si è supposta costante la sua temperatura. Ciò si traduce in pratica nella condizione che la capacità termica  $C_1$  di tale ambiente sia molto maggiore di quella,  $C$ , del termometro. Se si prescinde da tale ipotesi si rende necessario fare qualche considerazione diversa, poichè anche la temperatura  $T_1$  dell'ambiente, come la temperatura  $T$  del termometro, varia in funzione del tempo verso il raggiungimento di una temperatura  $\vartheta$  di equilibrio. In questo caso la quantità di calore  $dQ$  che, assorbita dal liquido termometrico, ne varia la temperatura di  $dT$  si esprime sempre come

$$dQ = C dT(t)$$

mentre la quantità di calore trasferita dall'ambiente in cui il termometro viene immerso al liquido termometrico durante l'intervallo di tempo  $dt$  è

$$dQ = \delta [T_1(t) - T(t)] dt.$$

Confrontando le due precedenti equazioni si ottiene

$$\frac{dT(t)}{T_1(t) - T(t)} = \frac{\delta}{C} dt \quad (2)$$

Allo scopo di integrare questa equazione differenziale si può esprimere  $T_1(t)$  in funzione di  $T(t)$  e di grandezze costanti; ciò si può ottenere mediante l'equazione che esprime il bilancio termico, cioè l'uguaglianza tra la quantità di calore ceduta dall'ambiente al termometro nella transizione dalla temperatura  $T(t)$  alla temperatura di equilibrio  $\vartheta$  e la somma delle quantità di calore assorbite rispettivamente dall'involucro del termometro e dal liquido termometrico per portarsi a loro volta alla temperatura  $\vartheta$ .

Indicando con  $C_1$  la capacità termica dell'ambiente, con  $C'$  quella dell'involucro e con  $C_2 = C' + C$  quella complessiva del termometro ed introducendo la temperatura media all'istante  $t$ ,  $T_m(t)$ , dell'involucro, l'equazione di bilancio termico può scriversi

$$C_1 [T_1(t) - \vartheta] = C [\vartheta - T(t)] + C' [\vartheta - T_m(t)]$$

Assumendo per  $T_m(t)$  la media aritmetica delle temperature che hanno nello stesso istante le pareti dell'involucro in contatto rispettivamente con l'ambiente esterno e con il liquido termometrico, ponendo cioè

$$T_m(t) = \frac{T_1(t) + T(t)}{2},$$

dall'equazione di bilancio termico si ottiene

$$T_1(t) = \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \frac{C'}{2}} \vartheta - \frac{C + \frac{C'}{2}}{C_1 + \frac{C'}{2}} T(t)$$

da cui

$$T_1(t) - T(t) = \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \frac{C'}{2}} [\vartheta - T(t)] .$$

Si è così pervenuti ad un'espressione che sostituita nella (2) consente di scriverla nella forma

$$\frac{dT(t)}{\vartheta - T(t)} = \frac{\delta}{C} \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \frac{C'}{2}} dt$$

e quindi di integrare ottenendo

$$\vartheta - T(t) = [\vartheta - T(0)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

avendo posto

$$\tau' = \frac{C}{\delta} \cdot \frac{C_1 + \frac{C'}{2}}{C_1 + C_2} .$$

Il risultato ottenuto indica che, nelle ipotesi attuali, l'andamento nel tempo della temperatura  $T(t)$  del liquido termometrico è dello stesso tipo di quello ottenuto nel caso precedente ( $C_1 \gg C$ ), ma la temperatura cui asintoticamente tende la  $T(t)$  non è quella iniziale dell'ambiente in cui il termometro viene immerso bensì quella di equilibrio  $\vartheta$  verso la quale, con analogo andamento, tende anche la temperatura  $T(t)$  dell'ambiente (v.fig. 4)

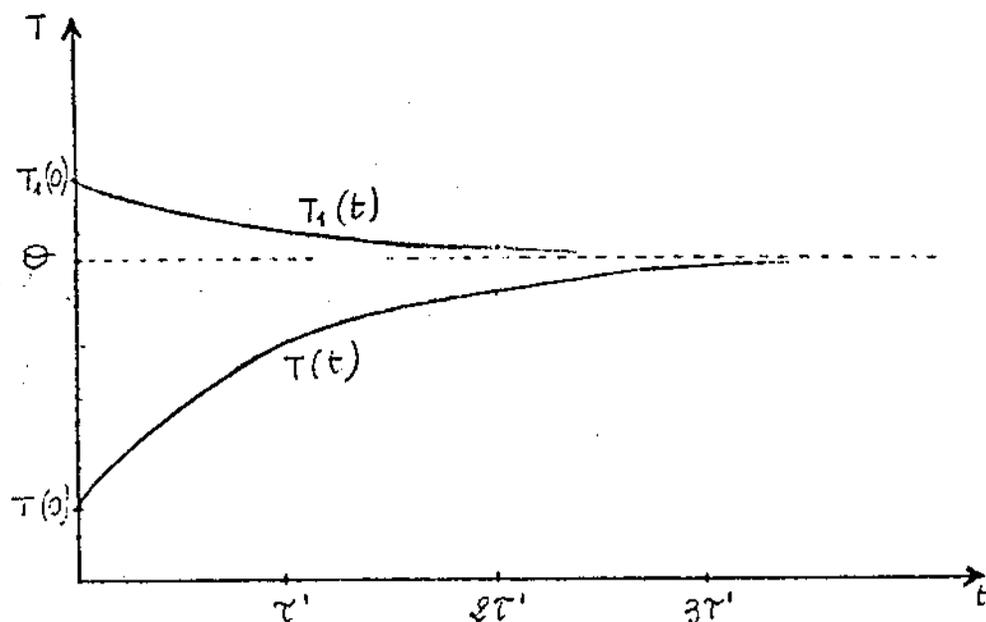


fig. 4

Si osservi che la costante di tempo  $\tau'$  con la quale si svolge il fenomeno attualmente studiato è minore di quella,  $\tau = \frac{C}{\delta}$ , relativa al caso in cui il termometro debba mettersi in equilibrio con un ambiente di capacità termica infinita; ciò è dovuto al fatto che nel caso attuale la presenza del termometro modifica la temperatura dell'ambiente in cui viene introdotto avvicinandola a quella del termometro stesso. Ovviamente

$$\begin{aligned} &\text{per } C_2 \ll C_1 \\ &\text{si ha } \tau' \simeq \tau. \end{aligned}$$

#### 4. 1) Misurazione della costante di tempo di un termometro.

Un esperimento per verificare il fenomeno descritto si può eseguire riempiendo due thermos (che per ora si suppongono perfettamente isolati dall'ambiente) con acqua a temperature diverse  $T_1$  e  $T_0$ . Si lascia immerso il termometro in quello a temperatura  $T_0$  per un tempo abbastanza lungo affinché si realizzi l'equilibrio termico, cosa di cui ci si può accertare notando quando la lunghezza della colonnina di mercurio non subisce più variazioni apprezzabili, e si immerge poi il termometro nel thermos a temperatura  $T_1$  nello stesso istante in cui si fa scattare un contasecondi. Si leggono quindi i valori della temperatura  $T$  segnata dal termometro in funzione degli intervalli di tempo segnati dal contasecondi.

Al fine di minimizzare possibili errori sistematici la cui valutazione risulterebbe peraltro estremamente incerta, è bene tenere presenti le seguenti osservazioni:

- a) se il termometro passa da un thermos "caldo" ad un thermos che si trova circa a temperatura ambiente, il liquido termometrico comincia a muoversi nel capillare, in modo non ben riproducibile, già durante il tragitto in aria: questo inconveniente non si presenta se si esegue la misura di  $\tau$  nel verso opposto. In tal caso, però, solo la parte immersa del termometro va in equilibrio con il thermos con una certa costante di tempo mentre la parte non immersa tende a scaldarsi in tempi molto più lunghi;
- b) il thermos ha una sua costante di tempo (cfr. § 6.1) per gli scambi di calore con l'esterno: se la sua temperatura è molto diversa da quella dell'ambiente, e la sua costante di tempo non molto maggiore di quella del termometro,

la misura di quest'ultime risulta alterata per difetto;

- c) specialmente per piccole costanti di tempo, i moti convettivi all'interno del liquido non sono sufficienti a garantire la uniformità della temperatura: il termometro tende così a "sentire" una temperatura per es. sistematicamente troppo bassa, e la costante di tempo risulta in questo caso sbagliata per eccesso. L'unico rimedio possibile a questa fonte di errore è una agitazione sufficiente del liquido nel thermos;
- d) possono essere ulteriori cause di errori fenomeni come insufficiente prontezza di riflessi, incertezza nella determinazione dell'istante iniziale, difficoltà di lettura contemporanea su scale diverse ecc.

A proposito di quest'ultimo punto può essere importante decidere se leggere i tempi corrispondenti a temperature prefissate o viceversa. E' necessario per questo eseguire misurazioni preliminari per stabilire qual'è il metodo migliore, cioè quello che dà luogo a minore dispersione delle misure. Se però i valori medi ottenuti con i due metodi sono significativamente diversi vuol dire che c'è un errore sistematico in almeno uno dei due.

Si osservi inoltre che se si vuole ricavare il valore di  $\tau$  graficamente conviene rilevare le misure della temperatura ad intervalli di tempo circa uguali tra loro; se si vuole inoltre controllare la effettiva validità della legge, cioè la disposizione dei punti su una retta in scala semi-logaritmica, tali intervalli devono essere molto più piccoli di  $\tau$

La costante di tempo può inoltre essere ricavata algebricamente, utilizzando le diverse coppie di valori  $t$ ,  $T(t)$ ,

mediante la relazione

$$\tau = \frac{t}{\ln \frac{T_1 - T(0)}{T_1 - T(t)}}$$

L'errore massimo su  $\tau$  è

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\ln \frac{T_1 - T(0)}{T_1 - T(t)}} + \frac{t}{\left[ \ln \frac{T_1 - T(0)}{T_1 - T(t)} \right]^2} \frac{|T(t) - T(0)| \left[ \Delta T_1 + \frac{|T_1 - T(t)|}{T_1 - T(0)} \Delta T(0) + \frac{|T_1 - T(0)|}{T_1 - T(t)} \Delta T \right]}{[T_1 - T(t)] \cdot [T_1 - T(0)]}$$

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{1}{\ln \frac{T_1 - T(0)}{T_1 - T(t)}} \left\{ \frac{\Delta t}{\tau} + \frac{\Delta T(t)}{T_1 - T(t)} + \frac{\Delta T(0)}{T_1 - T(0)} + \Delta T_1 \frac{T(t) - T(0)}{[T_1 - T(0)] [T_1 - T(t)]} \right\}$$

Esaminando la formula si vede che:

- Il peso dell'errore sulle letture di tempi è fissato dalla loro precisione e dalla costante di tempo da misurare;
- conviene, a parte i possibili effetti secondari di cui si è parlato, mettersi in condizioni di massimo  $T_1 - T(0)$ ; con ciò il contributo di  $\Delta T(0)$  all'errore totale è fissato;
- l'errore è fortemente influenzato dalla scelta di  $T(t)$ ; i contributi relativi di  $\Delta T(t)$  e  $\Delta T_1$  sono tanto più piccoli quanto più  $T(t)$  è vicino a  $T(0)$ ; però c'è un termine logaritmico, che moltiplica tutti gli errori, il quale ha la dipendenza opposta. Questo significa che esiste un valore

$T(t)$  "optimum" per cui l'errore è minimo, ed un intervallo di valori di  $T$  in cui è ragionevole fare la misura.

Si possono fare valutazioni numeriche per la stima dei vari effetti, una volta noti gli ordini di grandezza di  $[T_1 - T(0)]$  e  $\tau$ . Nel corso di tali valutazioni occorre tenere presente che  $T_1$  e  $T(0)$  sono lette in condizioni di equilibrio e quindi, purchè si adottino le dovute precauzioni,  $\Delta T_1$  e  $\Delta T(0)$  sono dell'ordine dell'intervallo di temperatura corrispondente ad una divisione della scala. Invece  $T(t)$  è letto in condizioni dinamiche; l'errore sarà dunque tanto più grande quanto maggiore è la velocità del mercurio all'istante della lettura, cioè quanto più  $T(t)$  è prossima a  $T'_0$ . Per tutte queste discussioni si deve tenere presente il grafico che dà, in scala lineare, l'andamento di  $T(t)$ .

##### 5) Sensibilità di un termometro a liquido.

Tornando alle caratteristiche del termometro, ed in particolare alla sensibilità, si vuole studiare come essa dipenda dalle modalità costruttive del termometro. Trascurando per semplicità la dilatazione del contenitore in vetro, ricordando la definizione di sensibilità e riflettendo che in un termometro a liquido la risposta dello strumento è costituita dalla variazione del livello del liquido nel capillare, si ha

$$\sigma = \frac{dl}{dT}$$

dove  $dl$  è la variazione elementare di livello provocata da una variazione di temperatura  $dT$ .

Detto  $V$  il volume del liquido termometrico alla temperatura  $T$  ed  $\alpha$  il coefficiente di dilatazione di esso si ha

$$dV = \alpha V dT.$$

Se si indica con  $S$  la sezione del capillare, supposta costante, si ottiene perciò

$$\sigma = \alpha \frac{V}{S} .$$

$V$  è praticamente coincidente con il volume del bulbo  $V_0$ ; ne differisce infatti per una frazione del volume dell'intero capillare che è trascurabile rispetto a  $V_0$ . Inoltre il coefficiente di dilatazione  $\alpha$  è funzione della temperatura, pur se debolmente variabile. Le variazioni del coefficiente di dilatazione  $\alpha(T)$  del mercurio tra  $-10^\circ\text{C}$  e  $300^\circ\text{C}$  risultano dal confronto tra i valori riportati nella tabella II, che sono ricavati dalla tabella I.

TABELLA I  
Densità del mercurio in  $\text{g cm}^{-3}$

temperatura ( $^\circ\text{C}$ )	Densità ( $\text{g cm}^{-3}$ )	temperatura ( $^\circ\text{C}$ )	Densità ( $\text{g cm}^{-3}$ )	temperatura ( $^\circ\text{C}$ )	Densità ( $\text{g cm}^{-3}$ )
- 10	13.6202	18	5512	100	3522
- 9	6177	19	5487	110	3283
- 8	6155	20	13.5462	120	3044
- 7	6128	21	5438	130	2805
- 6	6103	22	5413	140	13.2567
- 5	13.6078	23	5389	150	2330
- 4	6053	24	5364	160	2093
- 3	6029	25	13.5340	170	1856
- 2	6004	26	5315	180	1620
- 1	5979	27	5291	190	13.1384
0	13.5955	28	5266	200	13.1148
1	5930	29	5242	210	0913
2	5906	30	13.5217	220	0678
3	5881	31	5193	230	0443
4	5856	32	5168	240	13.0209
5	13.5832	33	5144	250	12.9975
6	5807	34	13.5119	260	9741
7	5782	35	13.5095	270	9507
8	5758	36	5070	280	9273
9	5733	37	5046	290	12.9039
10	13.5708	38	5021	300	8806
11	5684	39	4997	310	8572
12	13.5659	40	13.4973	320	12.8339
13	5634	50	4729	330	8105
14	5610	60	4486	340	12.7872
15	13.5585	70	4244	350	7638
16	5561	80	4003	360	7405
17	5536	90	13.3762		

TABELLA II

Coefficiente di dilatazione del mercurio

temperatura (°C)	$\alpha$ (°C <sup>-1</sup> )
-10	0,000184
0	0,000184
10	0,000177
20	0,000177
30	0,000178
100	0,000179
200	0,000180
300	0,000182

Indicando con  $\bar{\alpha}$  il valore medio di  $\alpha$  nell'intervallo di temperature misurabili con il termometro, si può scrivere

$$\sigma \approx \bar{\alpha} \frac{V_0}{S}$$

da cui risulta che un termometro è tanto più sensibile quanto maggiori sono  $\bar{\alpha}$  ed il volume del bulbo e quanto minore è il diametro del capillare.

Da queste considerazioni segue che un aumento di sensibilità ottenuto aumentando le dimensioni del bulbo produce un aumento della capacità termica del termometro aumentando l'entità della perturbazione da esso introdotta nella misurazione. Quindi bisogna scegliere caso per caso l'opportuno compromesso.

#### 6) Misurazione di quantità di calore. Calorimetro.

Un calorimetro è un sistema fisico, termicamente isolato dall'ambiente esterno, per mezzo del quale è possibile

misurare la quantità di calore con esso scambiata da qualunque altro sistema. Per effetto di tale scambio si può produrre nel calorimetro un cambiamento di stato (p.es. calorimetro di Bunsen) oppure può aver luogo una variazione di temperatura del sistema calorimetrico.

In quest'ultimo caso la quantità di calore scambiata è determinata dalla relazione

$$Q = C (T_f - T_i)$$

in cui  $T_f$  e  $T_i$  sono le temperature del sistema calorimetrico alla fine ed all'inizio del processo di scambio e  $C$  è la sua capacità termica.

Un particolare calorimetro, detto delle mescolanze, è costituito da un thermos all'interno del quale si pone una opportuna massa di un liquido (generalmente acqua) di calore specifico noto. Completano il sistema calorimetrico un termometro e un agitatore. Con un tale calorimetro è possibile misurare quantità di calore scambiate con esso da sistemi solidi e liquidi che non interagiscono chimicamente con il liquido calorimetrico.

#### 6.1) Costante di tempo del calorimetro.

Un calorimetro del tipo descritto non può considerarsi un sistema termicamente isolato dall'ambiente esterno.

La legge che regola gli scambi di calore con quest'ultimo può essere scritta, con buona approssimazione e per temperature del calorimetro non molto diverse da quelle dell'ambiente (dell'ordine delle decine di °C) nella forma seguente:

$$dQ = \delta [T(t) - T_A] dt$$

in cui la costante  $\delta$  può essere interpretata come "conducibilità" delle pareti del calorimetro per conduzione, convezione e irraggiamento e tiene conto inoltre della evaporazione del liquido. Ne segue che la temperatura del sistema calorimetrico, per effetto delle perdite di calore verso l'esterno, varia secondo la legge esponenziale

$$\frac{T_A - T(t)}{T_A - T_{0c}} = e^{-t/\tau_c}$$

con  $\tau_c$  costante di tempo del calorimetro,  $T_A$  temperatura ambiente e  $T_{0c}$  temperatura iniziale del calorimetro. Per intervalli di tempo piccoli rispetto a  $\tau_c$ , vale la formula approssimata

$$\frac{T_A - T(t)}{T_A - T_{0c}} \approx 1 - t/\tau_c$$

$$T(t) \approx T_A - (T_A - T_{0c}) (1 - t/\tau_c)$$

$$T(t) \approx T_{0c} + (T_A - T_{0c}) t/\tau_c$$

In prima approssimazione si ha quindi un andamento lineare di  $T$  in funzione di  $t$ . Mediante una serie di misurazioni è possibile pertanto valutare  $\tau_c$ , o un suo limite inferiore, e decidere di conseguenza se tenere conto o meno della perdita di calore verso l'esterno durante una misurazione, a seconda della durata di quest'ultima. Per il metodo di misura di  $\tau_c$  valgono considerazioni analoghe a quelle fatte a proposito del termometro.

## 6.2) Equivalente in acqua.

Si riprende in esame la relazione  $Q = C (T_f - T_i)$  del § 6.1 per una valutazione degli elementi che concorrono alla individuazione della capacità termica  $C$  del sistema calorimetrico.

Il sistema descritto è costituito da:

- una massa nota  $M_a$  di acqua, di calore specifico noto  $c_a$ , per cui la capacità termica è  $C_a = M_a c_a$ ;
- un insieme di altri corpi (parte immersa del termometro, parte immersa dell'agitatore, parete del thermos a contatto con l'acqua) di masse e calori specifici incogniti, che si suppongono tutti in equilibrio termico fra loro e con l'acqua all'atto di ogni lettura di temperatura.

Sia  $C_c$  la capacità termica di quest'insieme di corpi (somma delle singole), che chiameremo capacità termica del calorimetro. La sua conoscenza è necessaria per la misura di  $Q$  in quanto  $C = C_a + C_c$ .

Un modo per misurare  $C_c$  può essere il seguente. Si introduce nel calorimetro una quantità di acqua di massa  $M_1$  a temperatura  $T_1$  e successivamente si aggiunge una quantità di acqua di massa  $M_2$  a temperatura  $T_2 < T_1$ . Raggiunto l'equilibrio a temperatura  $\vartheta$  si avrà, trascurando le perdite di calore verso l'ambiente

$$(M_1 c_a + C_c) (T_1 - \vartheta) = M_2 c_a (\vartheta - T_2)$$

(naturalmente il discorso è analogo se  $T_2 > T_1$ ). Si può ora introdurre l'"equivalente in acqua del calorimetro" ponendo  $C_c = M^* c_a$ , per cui, non tenendo conto delle variazioni del

calore specifico con la temperatura, si ha:

$$(M_1 + M^x) (T_1 - \vartheta) = M_2 (\vartheta - T_2)$$

$$M^x = \frac{M_2 (\vartheta - T_2) - M_1 (T_1 - \vartheta)}{T_1 - \vartheta} .$$

Si noti che la grandezza  $M^x$  dipende dalla natura del liquido calorimetrico, mentre <sup>non</sup> dipende ovviamente la capacità termica ad essa associata.

Se  $\tau_c$  fosse infinito, se cioè l'isolamento del thermos fosse perfetto,  $T_1$  resterebbe costante e la sua misurazione sarebbe ovvia; nella stessa ipotesi per potere misurare  $\vartheta$  basterebbe che si fossero completati gli scambi di calore all'interno del calorimetro.

In realtà, poichè avvengono scambi di calore con l'esterno, un modo per tener conto delle loro influenze sulle temperature dei diversi sistemi interagenti è quello di determinare gli andamenti in funzione del tempo della temperatura all'interno del calorimetro prima e dopo il mescolamento ed estrapolarli all'istante  $t_0$  del mescolamento per ottenere i valori  $T_1$  e  $\vartheta$  sopra definiti.

In modo analogo è opportuno operare per trovare  $T_2$  (V. fig. 5).

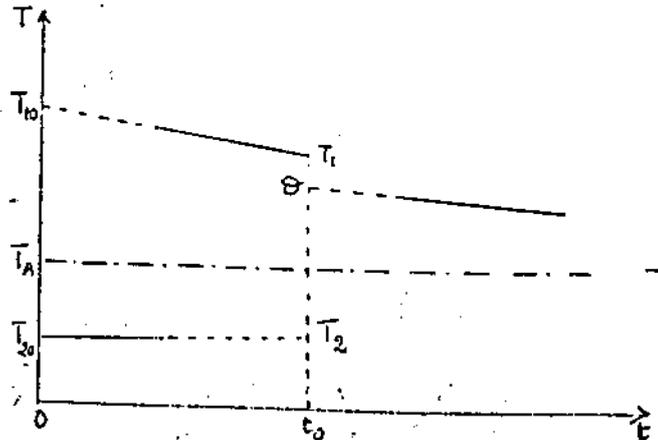


fig. 5

Poiché la misura di  $M^*$  è complementare a quella di una qualsiasi quantità di calore, le condizioni in cui essa viene effettuata devono essere il più possibile vicine a quelle della misurazione della quantità di calore.

### 6.3) Misurazione del calore specifico di una sostanza.

Si voglia misurare il calore specifico di una sostanza solida e non solubile in acqua, oppure liquida che sia miscibile con l'acqua e non reagisca chimicamente con essa. A questo scopo si può utilizzare il calorimetro già descritto il quale contenga inizialmente una quantità di acqua di massa  $M_1$  alla temperatura  $T_1$ . Si introduce nel calorimetro una certa quantità, di massa  $M_x$  e di temperatura  $T_2 \neq T_1$ , della sostanza il cui calore specifico  $c_x$  è da determinare. Indicando con  $\Theta$  la temperatura di equilibrio del sistema così ottenuto si ha

$$(M_1 + M^*) c_a (\Theta - T_1) = - M_x c_x (\Theta - T_2)$$

da cui

$$c_x = \frac{(M_1 + M^*) c_a (\Theta - T_1)}{M_x (T_2 - \Theta)}$$

Anche in questo caso, naturalmente, si applica il metodo illustrato in fig. 5.

### 7) Calore latente di fusione del ghiaccio.

Il calore latente di fusione di una sostanza è il rapporto tra la quantità di calore che è necessaria per provocare la fusione di una massa della sostanza, che si trovi

già alla temperatura di fusione, e tale massa.

Per misurare il calore latente di fusione del ghiaccio si può utilizzare un calorimetro contenente inizialmente una certa massa  $M_a$  di acqua ad una temperatura  $T_a > 0^\circ\text{C}$ ; nel calorimetro viene poi introdotto del ghiaccio fondente. Dopo la fusione completa la massa totale di acqua raggiunge una temperatura di equilibrio  $\vartheta$ .

A parte gli scambi di calore con l'esterno, la quantità di calore  $Q$  ceduta complessivamente dall'acqua inizialmente presente e dal calorimetro risulta uguale alla somma della quantità di calore  $Q_1$  necessaria per fondere il ghiaccio e della quantità di calore  $Q_2$  necessaria per portare la massa di acqua derivante dal ghiaccio dalla temperatura di fusione alla temperatura di equilibrio.

Se  $M^*$  è l'equivalente in acqua del calorimetro e  $c_a$  il calore specifico dell'acqua si ha:

$$Q = c_a (M_a + M^*) (T_a - \vartheta)$$

ed inoltre, se  $M_g$  è la massa del ghiaccio fondente e  $\lambda$  il calore latente di fusione del ghiaccio

$$Q_1 = M_g \cdot \lambda$$

e

$$Q_2 = c_a M_g (\vartheta - T_g)$$

ove  $T_g$  è la temperatura del ghiaccio fondente.

La determinazione di  $M_g$  può essere effettuata, a fusione completata, per differenza rispetto alla massa complessiva del calorimetro e dell'acqua inizialmente in esso contenuta, che dovrà essere stata preventivamente misurata. Per la determinazione di  $\vartheta$  è opportuno procedere per via grafica, analogamente a quanto consigliato nelle esperienze di

calorimetria precedentemente discusse. Nel caso attuale però il valore da assumere per la temperatura di equilibrio  $\vartheta$  è il minimo valore che avrebbe assunto la temperatura della miscela all'interno del calorimetro in assenza di scambi di calore con l'esterno.

Si tratta dunque di individuare tale minimo sulla base dell'andamento della temperatura in funzione del tempo, e di ricavare  $\vartheta$  in corrispondenza.

8) Misurazione del calore latente di ebollizione dell'acqua.

Il calore latente di evaporazione di un liquido, ad una fissata temperatura, è il rapporto tra la quantità di calore necessaria per fare evaporare, a quella temperatura, una certa quantità del liquido, e la massa del liquido evaporato.

In modo analogo si definisce il calore latente di ebollizione di un liquido: in questo caso la temperatura è quella di ebollizione la quale dipende dalle condizioni esterne, per esempio dalla pressione atmosferica quando il liquido sia in comunicazione con l'atmosfera.

Il calore latente di ebollizione  $\lambda_e$  di un liquido può dunque essere misurato mediante le misurazioni 1) della quantità di calore  $Q$  necessaria per far evaporare una certa quantità di liquido il quale si trovi alla temperatura di ebollizione e 2) della massa  $m$  della quantità di liquido evaporata:

$$\lambda_e = \frac{Q}{m} . \quad (1)$$

Nel caso dell'esperimento che è argomento del presente paragrafo il liquido in questione è acqua alla quale viene fornito calore da una sorgente di energia elettrica di potenza costante.

L'apparato sperimentale è costituito (v.fig.1) da un circuito elettrico comprendente un generatore  $G$ , una spirulina di rame, ricoperta di materiale isolante, di resistenza complessiva  $R$ , un voltmetro ed un amperometro, e da una provetta, isolata termicamente dall'ambiente circostante, contenente acqua distillata. La spirulina è immersa nell'acqua della provetta e, una volta chiuso il circuito, la riscalda portandola, se l'isolamento termico

verso l'ambiente esterno è sufficiente, all'ebollizione.

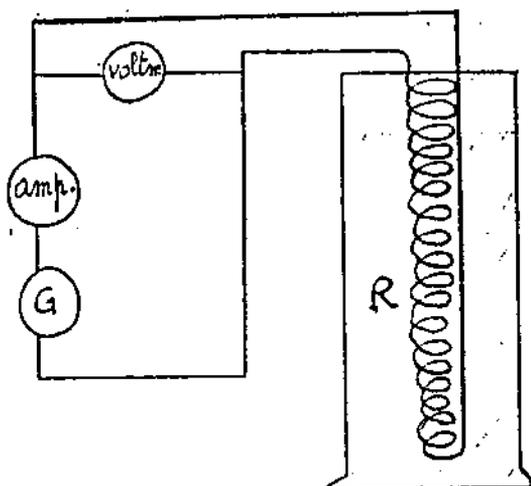


Fig. 1

Se l'isolamento termico della provetta dall'ambiente esterno fosse perfetto, durante la fase di riscaldamento dell'acqua dalla temperatura ambiente a quella di ebollizione l'andamento della temperatura  $T(t)$  dell'acqua in funzione del tempo sarebbe lineare.

Detta infatti  $C$  la capacità termica del sistema acqua + provetta e  $W$  la potenza dissipata dalla spirulina, la quantità di calore  $dQ$  ceduta al sistema durante il tempo  $dt$  è espressa dalla relazione

$$dQ = W \cdot dt = CdT(t)$$

cioè

$$dT(t) = \frac{W}{C} dt,$$

equazione che, integrata tra gli istanti 0 e  $t$ , fornisce

$$T(t) = \frac{W}{C} t + T_A \quad (2)$$

in cui  $T_A$  è la temperatura dell'ambiente.

Raggiunta la temperatura di ebollizione  $T_e$ , il calore ulteriormente ceduto dalla spirulina al sistema produce esclusivamente evaporazione secondo la (1) (V.fig. 2)

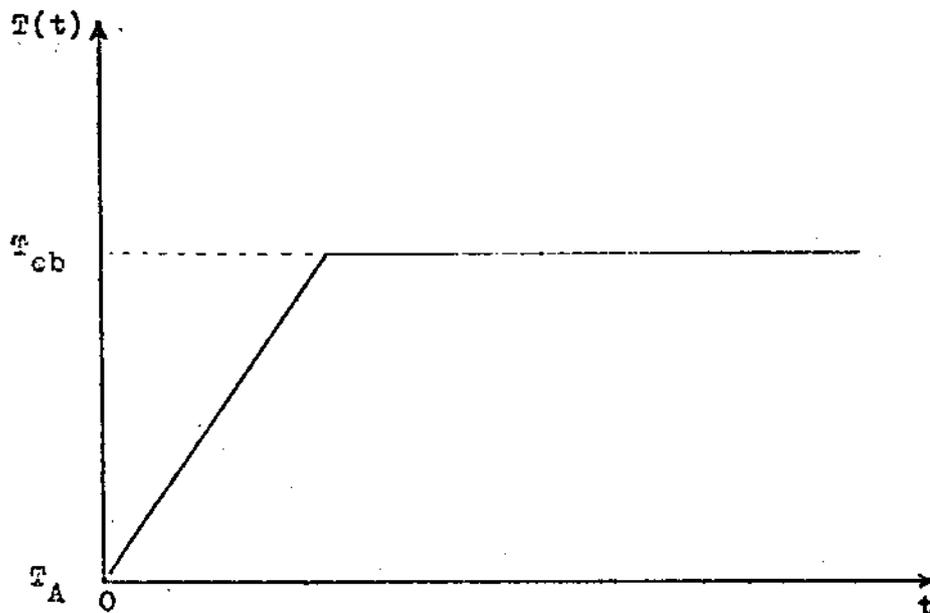


Fig. 2

Misurati dunque, all'inizio ed alla fine di un intervallo di tempo  $(t_1, t_2)$  durante l'ebollizione, i livelli  $h_1$  ed  $h_2$  dell'acqua nella provetta, il calore latente di ebollizione dell'acqua  $\lambda_e$  si otterrebbe dalla relazione

$$\lambda_e = \frac{Q}{m} = \frac{W (t_2 - t_1)}{(h_1 - h_2) \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \rho} \quad (3)$$

ove  $d$  è il diametro interno della provetta,  $\rho$  è la densità dell'acqua alla temperatura di ebollizione (v.tabella) e  $W$  è il prodotto dell'intensità  $I$  della corrente

che percorre la spirulina per la differenza di potenziale V ai suoi estremi.

TABELLA

Densità dell'acqua in  $g\ cm^{-3}$

temperatura (°C)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,999841	847	854	860	866	872	878	884	889	895
1	900	905	909	914	918	923	927	930	934	938
2	941	944	947	950	953	955	958	960	962	964
3	965	967	968	969	970	971	972	972	973	973
4	973	973	973	972	972	972	970	969	968	966
5	965	963	961	959	957	955	952	950	947	944
6	941	938	935	931	927	924	920	916	911	907
7	0,99902	898	893	888	883	877	872	866	861	855
8	849	843	837	830	824	817	810	803	796	789
9	781	774	766	758	751	742	734	726	717	709
10	700	691	682	673	664	654	645	635	625	615
11	605	595	585	574	564	553	542	531	520	509
12	498	486	475	463	451	439	427	415	402	390
13	377	364	352	339	326	312	299	285	272	258
14	244	230	216	202	188	173	159	144	129	114
15	099	084	069	054	038	023	007	*991	*975	*959
16	0,998945	926	910	893	877	860	843	826	809	792
17	774	757	739	722	704	686	668	650	632	613
18	595	576	558	539	520	501	482	463	444	424
19	405	385	365	345	325	305	285	265	244	224
20	203	183	162	141	120	099	078	056	035	013
21	0,997992	970	948	926	904	882	860	837	815	792
22	770	747	724	701	678	655	632	608	585	561
23	538	514	490	466	442	418	394	369	345	320
24	296	271	246	221	196	171	146	129	095	069
25	044	018	*992	*967	*941	*914	*888	*862	*836	*809
26	0,996783	750	729	707	676	649	621	594	557	540
27	512	485	457	429	401	373	345	317	289	261
28	232	205	175	147	119	089	060	031	002	*973
29	0,995944	914	885	855	826	796	766	735	706	676
30	646	616	586	556	525	494	464	433	402	371

Ancora nell'ipotesi del perfetto isolamento, l'apertura del circuito elettrico durante l'ebollizione produrrebbe la cessazione dell'evaporazione violenta da tutto il corpo del liquido, ma la temperatura  $T_e$  resterebbe ancora costante, avendo luogo soltanto lo scambio statistico di molecole tra l'acqua ed il vapore saturo sovrastante.

In realtà il sistema non è completamente isolato per cui nell'equazione di bilancio termico si deve tener conto anche delle perdite verso l'esterno.

Durante il processo di riscaldamento la quantità di calore ceduta dalla spirulina in un intervallo di tempo  $dt$  può scriversi nel modo seguente

$$dQ = CdT(t) + dQ' + \lambda(T) dm \quad (4)$$

in cui i tre termini esprimono rispettivamente:

$CdT(t)$  la quantità di calore assorbita dal sistema;

$dQ'$  la quantità di calore ceduta all'ambiente la quale, poiché il calore si propaga all'ambiente soprattutto per conduzione può essere scritta come

$$dQ' = \delta [T(t) - T_A] \cdot dt; \quad (5)$$

$\lambda(T)dm$  la quantità di calore necessaria per far evaporare la massa d'acqua  $dm$ .

Durante l'ebollizione, la (4) diventa

$$dQ = \lambda_e dm + \delta (T_{eb} - T_A) dt. \quad (6)$$

Da questa equazione, integrata tra due istanti  $t_1$  e  $t_2$ , potrebbe determinarsi  $\lambda_e$  a condizione che fosse nota  $\delta$ .

Si deve tenere presente che la grandezza  $\delta$ , la quale rappresenta la "conducibilità equivalente" del sistema, è determinante perché possa essere realmente raggiunta la temperatura di ebollizione.

Dalla (6) si ha infatti che deve essere

$$\delta (T_{eb} - T_A) < W$$

e quindi

$$\delta < \frac{W}{T_{eb} - T_A} \quad (7)$$

cioè esiste un limite superiore di  $\delta$  al di sopra del quale le dispersioni di calore verso l'ambiente non consentono il raggiungimento dell'ebollizione.

La determinazione di  $\delta$  può eseguirsi mediante lo studio dell'andamento temporale della temperatura del sistema.

Riprendendo l'equazione (4) e assumendo che, come nel caso dell'esercitazione proposta, il termine  $\lambda(T)dm$  sia trascurabile rispetto alla somma degli altri due, si ottiene

$$\frac{dT}{W - \delta [T(t) - T_A]} = \frac{1}{C} dt.$$

Integrando con la condizione iniziale  $T(t=0) = T_A$  e ponendo  $\tau = \frac{C}{\delta}$ , si ha:

$$T(t) = T_A + \frac{W}{\delta} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (8)$$

La curva rappresentativa è riportata in fig. 3 insieme con l'andamento aspettato nel caso di  $\delta = 0$ .

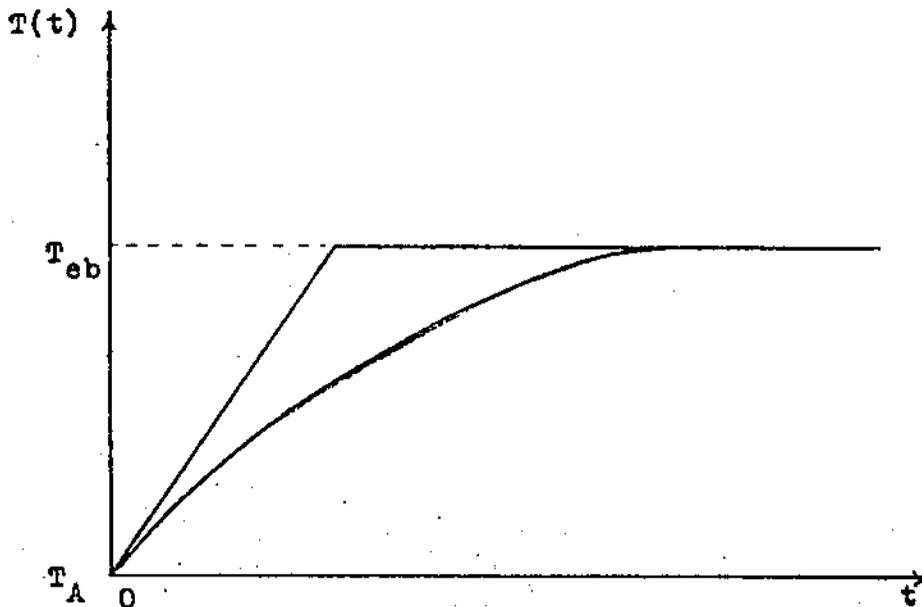


Fig. 3

La grandezza  $\tau$ , "costante di tempo" del fenomeno, non dipende dalla potenza dissipata  $W$  mentre ne dipende il valore limite della temperatura del sistema. Infatti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_A + \frac{W}{\delta} \quad (\text{v.fig. 4})$$

La grandezza  $\delta$  può essere ricavata tramite la costante di tempo  $\tau$  e la capacità termica  $C$  del sistema ( $\delta = \frac{C}{\tau}$ ), entrambe determinabili mediante l'andamento sperimentale della  $T(t)$  descritto dall'equazione (8).

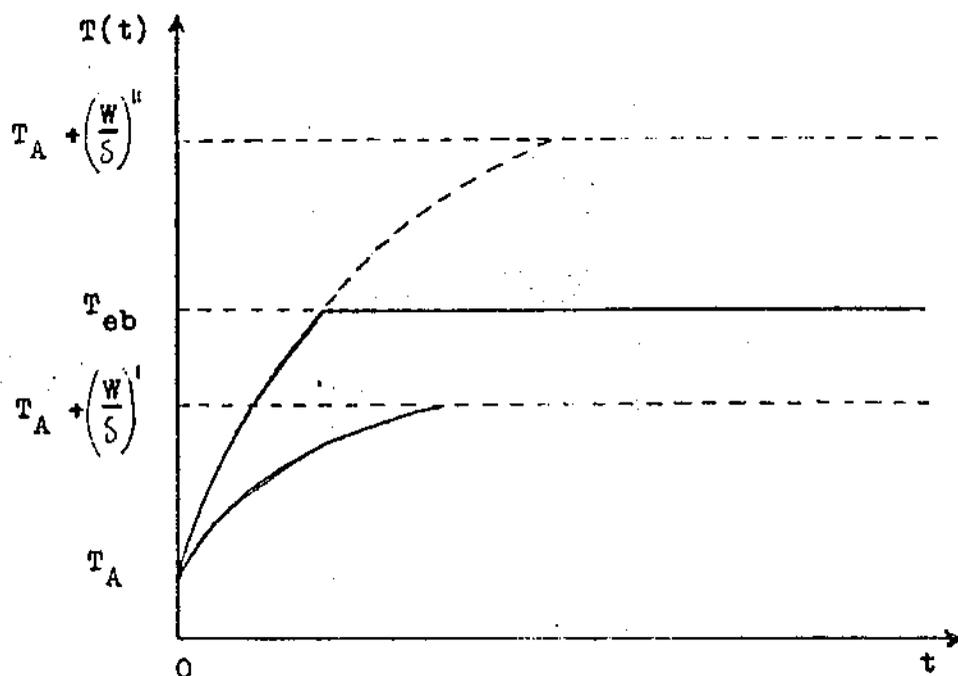


Fig. 4

La capacità termica  $C$ , in particolare, si può determinare mediante il coefficiente angolare  $\alpha(t)$  della tangente alla curva in qualsiasi punto; si ha infatti

$$\alpha(t) = \frac{W}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9)$$

Si deve però osservare che per le temperature prossime a quella di ebollizione l'andamento della  $T(t)$  rilevato sperimentalmente si discosta da quello descritto dall'equazione (8) in conseguenza del fatto che, essendo l'acqua un cattivo conduttore del calore, il fenomeno dell'ebollizione ha inizio in prossimità della spirulina prima che tutta l'acqua nella provetta abbia raggiunto la temperatura corrispondente.

Per questi motivi la curva in questione può essere sfruttata, in pratica, soltanto nel tratto iniziale allo scopo di determinarne la pendenza per  $t = 0$ . Tale grandezza

consente di pervenire alla misura della capacità termica del sistema, essendo, dalla (9)

$$\alpha(0) = \frac{W}{C} \quad (10)$$

Per una migliore determinazione della costante di tempo  $\tau$  può essere seguito il procedimento qui appresso indicato.

Aperto il circuito ad un qualsiasi istante  $t^*$  durante l'ebollizione, quest'ultima viene a cessare e la temperatura del sistema, per effetto della dispersione, tende a portarsi verso la temperatura ambiente  $T_A$ .

Si ha infatti in tal caso

$$0 = CdT(t) + \int [T(t) - T_A] dt$$

da cui, separando le variabili ed integrando con la condizione  $T(t^*) = T_{eb}$ , si ottiene

$$T(t) = (T_{eb} - T_A) e^{-\frac{t - t^*}{\tau}} + T_A \quad (\text{per } t \geq t^*) \quad (11)$$

in cui  $\tau$  è lo stesso dell'equazione (8).

Lo studio dell'andamento descritto dalla (11) consente una più accurata determinazione della costante di tempo essendo stati eliminati gli inconvenienti precedentemente descritti alla fase di riscaldamento.

Si ha infine:

$$\lambda_e = \frac{W}{m} \left[ 1 - \frac{T_{eb} - T_A}{\alpha(0) \cdot \tau} \right] (t_2 - t_1) \quad (12)$$

essendo  $m$  la massa di liquido evaporata, durante l'ebollizione, nell'intervallo di tempo  $(t_1, t_2)$ .

Nell'equazione scritta il fattore  $\left[ 1 - \frac{T_{eb} - T_A}{\alpha(0) \cdot \tau} \right]$  tiene conto, globalmente, dell'errore sistematico che si avrebbe nella determinazione di  $\lambda_e$  trascurando gli scambi di calore con l'esterno.

Un altro metodo, del tutto equivalente, per la valutazione di tale fattore è il seguente.

Utilizzando le curve sperimentali descritte dalle equazioni (8) e (11) si determinino i coefficienti angolari delle rette tangenti alle due curve per  $t=0$  e  $t=t^*$ .

Se si indicano rispettivamente con  $\vartheta$  e  $\psi$  gli angoli formati da tali rette con l'asse dei tempi si ha dalla (8)

$$\eta \operatorname{tg} \vartheta = \frac{W}{C}$$

e dalla (12)

$$|\eta' \operatorname{tg} \psi| = \frac{T_{eb} - T_A}{\tau}$$

in cui  $\eta$  ed  $\eta'$  sono fattori metrici eventualmente uguali tra loro.

Il fattore  $\left[ 1 - \frac{T_{eb} - T_A}{\alpha(0) \cdot \tau} \right]$  può pertanto essere espresso in funzione di  $\operatorname{tg} \vartheta$  e  $\operatorname{tg} \psi$ .  
La (12) diventa perciò

$$\lambda_e = \frac{W}{m} (t_2 - t_1) \left[ 1 - \frac{\eta'}{\eta} \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right].$$

PARTE TERZA

INDICE

1) Misurazioni di temperatura. Generalità .....	pag.	1
2) Termometri a liquido .....	"	1
3) Perturbazione di un termometro .....	"	5
4) Prontezza di un termometro a liquido .....	"	6
4.1) Misurazione della costante di tempo di un termometro .....	"	15
5) Sensibilità di un termometro a liquido .....	"	18
6) Misurazione di quantità di calore. Calorimetro ....	"	20
6.1) Costante di tempo del calorimetro .....	"	21
6.2) Equivalente in acqua .....	"	23
6.3) Misurazione del calore specifico di una sostanza		25
7) Calore latente di fusione del ghiaccio .....	"	25
8) Calore latente di ebollizione dell'acqua .....	"	28

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA  
"LA SAPIENZA"  
DIPARTIMENTO DI FISICA

Oscilloscopio a raggi catodici

M. Alessio e S. Improta

con la collaborazione di:

G. Cesareni  
G. Grossi  
C. De Angelis  
L. De Dominicis  
D. Guerrucci  
M. Pedace  
M.L. Ronzoni

A.A. 1992-93

## OSCILLOGRAFO A RAGGI CATODICI

### 1.1 Descrizione dello strumento

L'oscillografo a raggi catodici è il più utile strumento per studiare grandezze elettriche variabili nel tempo.

La parte principale di un oscillografo è costituita da un tubo a raggi catodici (TRC), sul cui schermo viene visualizzata la grandezza elettrica in esame.

Un TRC è costituito da una ampolla di vetro (fig. 1), nella quale è stato praticato il vuoto, fornita di un dispositivo, detto cannone elettronico, che produce un fascio di elettroni di velocità circa uguale tra loro e collimato sul punto centrale  $O$  dello schermo.

Il cannone è a sua volta costituito da un catodo  $C$ , che riscaldato per effetto Joule da un filamento  $F$ , emette elettroni per effetto termoelettrico, e da alcuni altri elettrodi  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  di forma, dimensioni, e posizioni diverse, che servono ad accelerare gli elettroni (l'elettrodo acceleratore è posto ad una tensione maggiore di 1000 V), a regolarne il flusso ed a collimarli sullo schermo.

Subito dopo il cannone gli elettroni passano tra le due coppie ortogonali di placchette  $P_x$ ,  $P_y$ .

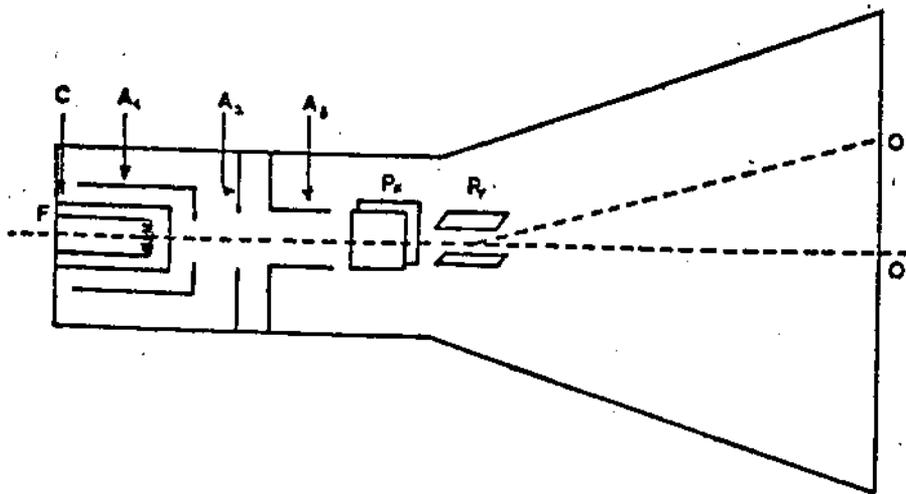


fig. 1

## 1.2 Traiettoria del fascio di elettroni nel campo elettrico deflettore

Consideriamo ora il moto di un elettrone quando passa tra due placchette alle quali sia applicata una differenza di potenziale  $V_x$ .

Ammettendo che l'elettrone esca dal catodo C con velocità trascurabile (\*), se la differenza di potenziale tra il catodo C e l'ultimo anodo  $A_3$  è  $V_0$ , l'energia fornita dal campo acceleratore sarà

$$\mathcal{E} = e V_0 \quad (1)$$

e l'elettrone procederà con velocità costante

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} \quad (2)$$

finché non entrerà nel campo elettrico

$$E_x = \frac{V_x}{d} \quad (3)$$

A questo punto la traiettoria prima rettilinea viene deflessa (fig. 2).

Le equazioni del moto sono

$$z = v_0 t \quad (4)$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \quad (5)$$

con

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eV_x}{m d} \quad (6)$$

(\*) Anche non tenendo conto dell'energia di legame, la massima energia con cui un elettrone potrà uscire dal catodo sarà:

$$\mathcal{E}_T = \frac{3}{2} K T \approx 1.6 \times 10^{-20} \text{ Joule}$$

con  $T=800^\circ\text{K}$ ,  $K=1.38 \times 10^{-23} \text{ Joule}^\circ\text{K}^{-1}$ .

Questa energia va confrontata con l'energia ceduta all'elettrone dal campo elettrico acceleratore

$$\mathcal{E}_x = e V_0 \approx 1.6 \times 10^{-16} \text{ Joule}$$

con  $V=1.000 \text{ Volts}$ ,  $e=1.6 \times 10^{-19} \text{ coulomb}$ .

Il rapporto  $\mathcal{E}_T / \mathcal{E}_x \approx 10^{-14}$  rende plausibile l'ipotesi fatta.

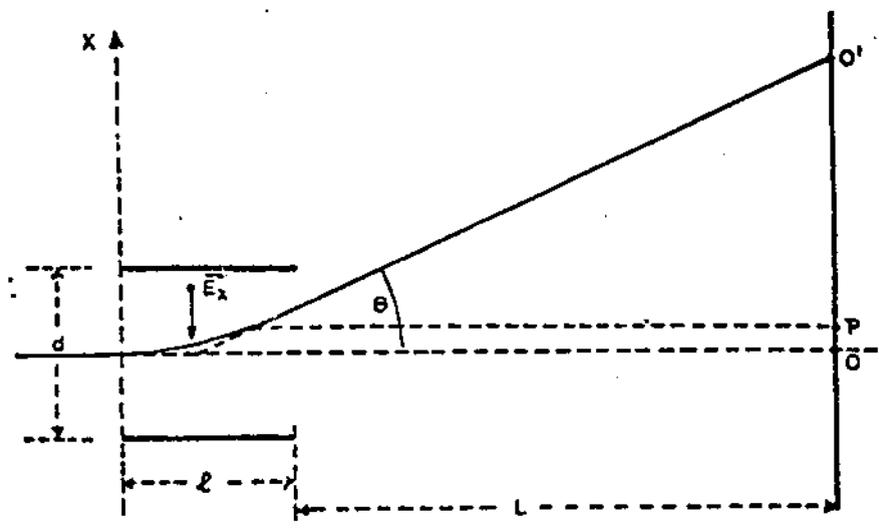


fig. 2

L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando t tra la (4) e la (5):

$$x = \frac{1}{2} a \frac{z^2}{v_0^2} \tag{7}$$

Tenendo conto della (2) e della (6) si ha anche

$$x = \frac{1}{4d} \frac{V_x}{V_0} z^2 \tag{8}$$

Una volta uscito dal campo elettrico l'elettrome procederà di moto rettilineo uniforme con una deflessione \$\theta\$ dalla traiettoria originaria tale che

$$\text{tg} \theta = \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_{z=l} = \frac{l}{2d} \frac{V_x}{V_0} \tag{9}$$

Dalla figura 2 si ricava che la deflessione X letta sullo schermo è proporzionale a \$V\_x\$, e la sua espressione è

$$X = \overline{OO'} = \overline{OP} + \overline{PO'} = \frac{1}{4d} \frac{V_x}{V_0} l^2 + L \text{tg} \theta = \frac{1}{2d} \frac{l}{V_0} \left( \frac{l}{2} + L \right) \cdot V_x \tag{10}$$

La costante che moltiplica \$V\_x\$ nella (10) è chiamata "fattore di deflessione". La deflessione può anche essere ottenuta facendo passare una corrente in avvolgimenti aventi l'asse ortogonale all'asse del TRC. I campi magnetici così generati deviano, secondo la legge di Lorentz, gli elettroni dalla loro traiettoria rettilinea. Si noti che mentre nel primo caso la deflessione sullo schermo del TRC è proporzionale a differenze di potenziale, in questo secondo caso la deflessione è proporzionale a correnti.

### 1.3 Studio di forme d'onda

Esaminiamo ora cosa succede qualora si applichi sulle placchette verticali il segnale da esaminare e su quelle orizzontali un potenziale a dente di sega. Il risultato è chiaramente mostrato in fig. 3

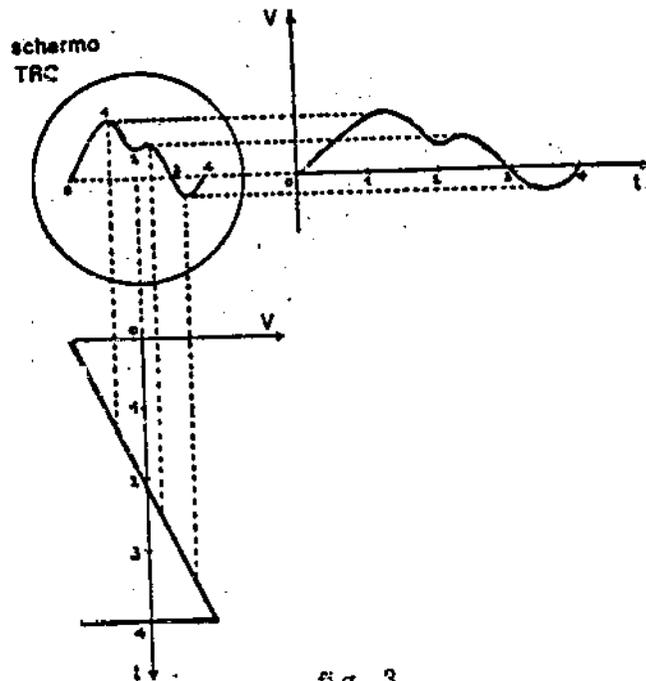


fig. 3

Il potenziale a dente di sega causa uno spostamento orizzontale con  $v_x = \text{cost.}$  della traccia del punto luminoso, mentre il segnale in esame determina una deflessione verticale.

Poiché per ogni ciclo di dente di sega si ha:

$$V_x = \alpha t \quad (11)$$

dalla (10) risulta

$$X = \varphi V_x = \varphi \alpha t = \beta t \quad (12)$$

dove  $\varphi$  è il fattore di deflessione orizzontale. Il risultato è che la coordinata spaziale  $X$  è proporzionale alla coordinata temporale  $t$ .

La trasformazione di coordinate (12) insieme alla relazione (10) permette quindi di passare dal grafico  $Y(X)$  disegnato sullo schermo alla funzione temporale  $V(t)$ .

Quando il potenziale a dente di sega torna dal valore massimo al valore minimo, il punto luminoso ritorna immediatamente nella posizione di partenza, mentre viene spento (blank) il fascetto di elettroni per eliminare la traccia di ritorno.

Un successivo ciclo del dente di sega e del segnale permetteranno di tracciare il medesimo disegno, se il segnale ha un periodo che è sottomultiplo del periodo del dente di sega. Altrimenti, perché questo avvenga ugualmente, occorre che il segnale ed il dente di sega siano sincronizzati in modo tale che il dente di sega parta sempre esattamente allo stesso punto della forma d'onda del segnale. Per assicurare questa condizione si usano dei circuiti elettronici (trigger) associati al TRC.

Alla maggior parte delle frequenze di interesse il punto luminoso si muove troppo velocemente per essere visto come un punto, ed il disegno sullo schermo appare come un'onda stazionaria. Ciò è dovuto alla persistenza della luce di fluorescenza. Un elemento distintivo tra i vari oscillografi è proprio il diverso valore di tale tempo dipendente dal diverso impiego che se ne vuol fare.

#### 1.4 Diagramma a blocchi

Il diagramma a blocchi di un oscilloscopio è il seguente:

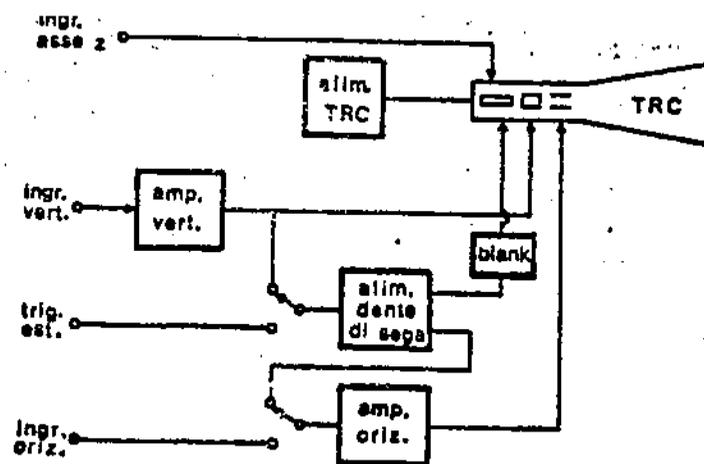


fig. 4

Il segnale da studiare viene applicato ai terminali d'ingresso dell'amplificatore verticale. Il segnale amplificato, in modo da ottenere una deviazione apprezzabile sullo schermo, viene inviato alla placchetta di deviazione verticale. Una porzione dello stesso è usato per permettere una sincronizzazione dei due segnali, (orizzontale e verticale).

Il generatore del dente di sega fornisce anche un impulso che spegne il fascetto di elettroni quando il dente di sega stesso lo riporta nella posizione iniziale.

6

Qualche volta è utile sincronizzare il dente di sega con un segnale esterno; l'oscilloscopio è quindi fornito di un ingresso per il trigger esterno che può essere connesso mediante un deviatore al generatore del dente di sega.

Un altro deviatore permette, disinserendo il generatore del dente di sega, di applicare all'amplificatore ed alle placchette orizzontali un segnale esterno.

E' anche possibile modulare l'intensità del fascetto di elettroni e quindi la luminosità della traccia sullo schermo variando il potenziale di griglia del cannone elettronico.

### 1.5 La frequenza limite

Prima di passare ad esaminare in dettaglio le caratteristiche di un particolare oscillografo, può essere utile fare qualche considerazione sulla frequenza massima del segnale che deve essere analizzato dallo strumento.

Questa frequenza massima è fissata dal tempo di transito di un elettrone nel campo elettrico delle placchette deviatrici.

Perché siano valide le considerazioni fatte nelle precedenti pagine bisogna che, durante il transito dell'elettrone, il potenziale ai capi delle placchette deviatrici possa essere considerato costante. Questa approssimazione è valida se

$$T \gg T_{tr} \quad (13)$$

dove  $T$  è il periodo del segnale e  $T_{tr}$  è il tempo di transito, per il quale vale l'espressione

$$T_{tr} = \frac{l}{v_e} = l \sqrt{\frac{m}{2eV_e}} \approx 1.7 \times 10^{-6} \frac{l}{\sqrt{V_e}} \quad (\text{unità. S. I.}) \quad (14)$$

Considerando un caso realistico  $l = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $V_e = 1000 \text{ V}$  si ha:

$$T_{tr} \approx 10^{-8} \text{ s.}$$

La condizione (13) è quindi già soddisfatta abbastanza bene per un periodo

$$T = 10^{-6} \text{ s}$$

corrispondente ad una frequenza di 100 MHz.

## 1.6 Altri usi dell'oscillografo

Un oscillografo a raggi catodici può essere utilizzato per misure di tipo diverso da quelle già menzionate nelle precedenti pagine. Ne accenniamo qui a tre delle più importanti.

### a) Misure di differenza di potenziale

Se  $V_x = 0$  e  $V_y = d.d.p.$  da misurare, la deflessione verticale del punto luminoso ci permette di risalire conoscendo il fattore di deflessione (10), alla differenza di potenziale applicata alla coppia di placchette verticali.

### b) Misure di fase

Se applichiamo alle due coppie di placchette di deflessione due segnali sinusoidali di ugual frequenza, otterremo le seguenti deflessioni X e Y in funzione del tempo.

$$X(t) = \alpha v_x(t) = \alpha a \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (15)$$

$$Y(t) = \beta v_y(t) = \beta b \cos(\omega t + \varphi_y)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono i due fattori di deflessione.

Eliminando il parametro tempo si ottiene

$$\frac{X^2}{\alpha^2 a^2} + \frac{Y^2}{\beta^2 b^2} - \frac{2XY}{\alpha\beta ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (16)$$

dove

$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

La (16) è l'equazione di un'ellisse centrata nell'origine (mancano i termini del primo ordine) del diagramma X, Y. (fig. 5)

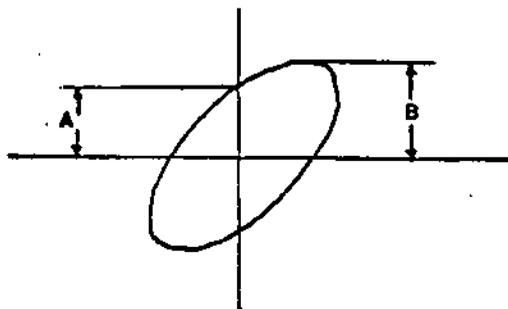


fig. 5

Quando  $X = 0$  dalla (16) si ha:

$$\sin \varphi = \frac{Y}{\beta b} = \frac{A}{B} \quad (17)$$

essendo  $\Delta b$  il valore massimo della deflessione verticale. Casi particolari:

$$\varphi = 0 \rightarrow A = 0 \quad (18)$$

l'ellisse degenera in una retta.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow A = B \quad (19)$$

Il massimo della deflessione verticale coincide con il minimo della deflessione orizzontale.

In questo caso gli assi principali dell'ellisse coincidono con gli assi cartesiani.

c) Misure del rapporto tra le frequenze di due onde sinusoidali

Se il rapporto tra le frequenze di due onde sinusoidali è un numero reale, applicando i due segnali alle placchette di deflessione, si ottengono sullo schermo del TRC delle figure note come figure di Lissajous. Questi disegni permettono di ricavare il rapporto tra le due frequenze facendo il rapporto tra il numero dei massimi della deflessione orizzontale e il numero dei massimi della deflessione verticale

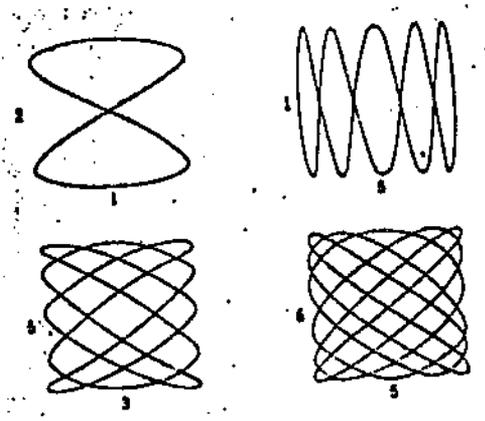


fig. 6

## DESCRIZIONE DEI COMANDI E DEI CONNETTORI DELL'OSCILLOSCOPIO "NATIONAL" mod. VP-5220A

### 1- COMANDI DEL TUBO A RAGGI CATODICI (TRC).

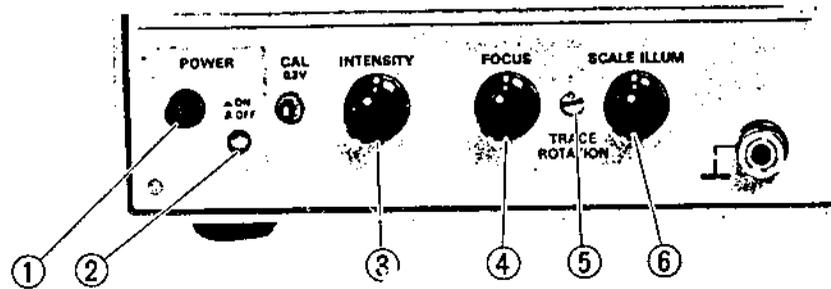


Fig. 1

- 1 - POWER ON/OFF (interruttore) : premere per accendere, premere nuovamente per spegnere.
- 2 - POWER ON (indicatore ) si illumina quando l'apparecchio è acceso.
- 3 - INTENSITY : regola la luminosità del segnale rappresentato sul TRC. La luminosità aumenta girando la manopola in senso orario.
4. - FOCUS : corregge un segnale sfocato.
- 5 - TRACE ROTATION :compensa la deflessione causata dal magnetismo terrestre correggendo la pendenza del segnale.
- 6 - SCALE ILLUM : regola l'illuminazione della scala .

## 2 - COMANDI PER L'ASSE VERTICALE (ASSE Y)

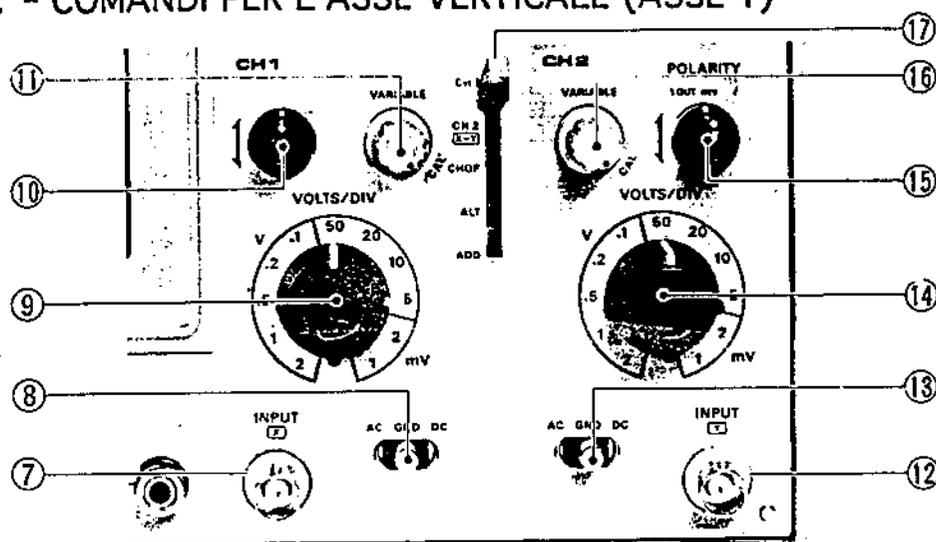


Fig. 2

7- CH1/X INPUT : ingresso di un segnale nel canale 1 mediante un cavo BNC o una sonda . Si utilizza per l'ingresso del segnale sull'asse X quando si opera nel modo X-Y.

8 e 13 - AC-GND-DC : a seconda della conformazione del segnale in ingresso, ed allo scopo di facilitarne l'osservazione, è possibile selezionare un accoppiamento in regime alternato (AC) o continuo (DC).

AC: un condensatore viene inserito in serie tra l'origine del segnale e l'amplificatore per bloccare la componente continua. Ciò è utile per l'osservazione di segnali costituiti da piccole componenti alternate sovrapposte a grandi componenti continue. Il limite inferiore di frequenza è di ~5 Hz.

GND : l'ingresso dell'amplificatore è collegato a terra per fornire una posizione di riferimento sul TRC. (Il terminale d'ingresso non viene collegato a terra per evitare danni al circuito in osservazione).

DC: tutte le componenti del segnale sono inviate all'amplificatore.

9 e 14 - VOLTS/DIV : riduce il segnale d'ingresso ad un'ampiezza adatta all'osservazione sul TRC. Se si compiono osservazioni

con una sonda di attenuazione 10:1 l'ampiezza misurata deve essere moltiplicata per un fattore 10.  
 Accertarsi che "VARIABLE" (v.11 e 16) si trovi nella posizione CAL se si vuole usufruire della calibrazione.

- 10 e 15 - regolatore della posizione verticale. Modifica verticalmente la posizione della traccia sul TRC. Il regolatore di posizione del Canale 2 consente, se tirato verso l'operatore, di invertire la polarità del segnale.
- 11 e 16 - VARIABLE: varia la sensibilità entro le possibilità offerte dal regolatore a scatti VOLTS/DIV.  
 Completamente ruotato in senso orario, posizione CAL, indica che la sensibilità è quella selezionata mediante il regolatore VOLTS/DIV; ruotato in senso antiorario riduce la sensibilità selezionata mediante VOLTS/DIV di un fattore pari a circa 2,5.
- 17 - Selettore delle modalità di rappresentazione verticale.
- CH1 : è rappresentato solo il segnale del CANALE 1
- CH2 : è rappresentato solo il segnale del CANALE 2 (usato anche per il modo x-y).
- CHOP : i segnali del CANALE 1 e 2 vengono rappresentati alternativamente alla frequenza di un oscillatore interno allo strumento. E' utile per l'osservazione di due segnali che si ripetono con bassa frequenza.
- ALT: i segnali del CANALE 1 e del CANALE 2 vengono rappresentati alternativamente, in corrispondenza di successive corse orizzontali della traccia. E' utile per l'osservazione di due segnali che si ripetono con frequenza elevata.
- ADD : viene rappresentata la somma algebrica dei segnali del CANALE 1 e del CANALE 2. Se il comando POLARITY del CANALE 2 è regolato nel modo INVERT, viene rappresentata la differenza.

### 3 COMANDI PER L'ASSE ORIZZONTALE (ASSE X)

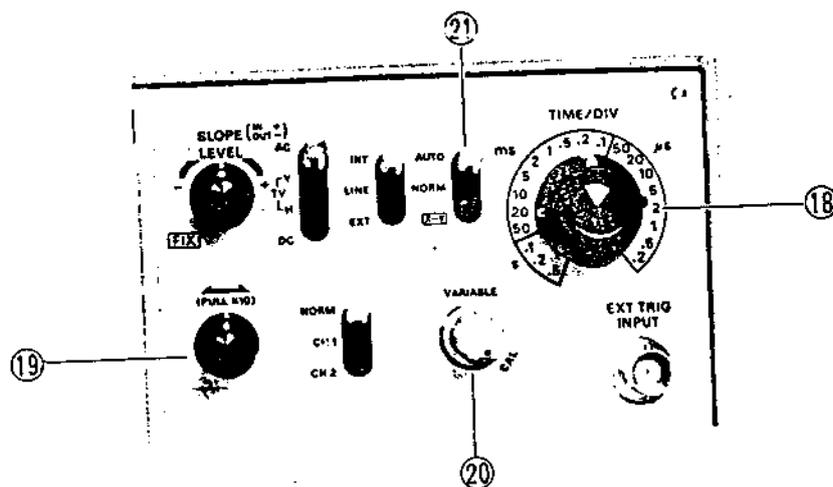


Fig. 3

- 18 - TIME/DIV: selettore del periodo del segnale a dente di sega e quindi della velocità di spostamento della traccia lungo l'asse x, da 0.5 s/div a un massimo di 20 ns/div (con amplificazione x10, v. paragrafo 19) in venti passi calibrati.
- 19 - Regolatore della posizione orizzontale. Modifica orizzontalmente la posizione della traccia sul TRC. Inoltre, se il regolatore viene tirato verso l'operatore, la velocità orizzontale della traccia viene amplificata 10 volte.
- 20 - VARIABLE: quando è ruotato completamente in senso orario la velocità orizzontale della traccia è quella selezionata mediante il comando TIME/DIV; ruotandolo in senso antiorario, la velocità orizzontale della traccia varia con continuità tra quelle corrispondenti alle divisioni del comando TIME/DIV.
- 21 AUTO-NORM-X-Y : selettore della modalità di "triggerazione" (=avvio dello spostamento orizzontale della traccia).
- AUTO : corse libere della traccia lungo l'asse orizzontale in assenza di un opportuno segnale di "trigger". La "triggerazione" avviene per segnali di trigger con frequenza maggiore di 100Hz.

**NORM :** il segnale a dente di sega viene applicato alle placchette di deviazione orizzontale quando l'apposito circuito riceve un adeguato segnale di "trigger" (=avvio). In assenza del segnale di trigger non viene visualizzata alcuna traccia.

**X-Y :** sull'asse x viene rappresentato il segnale d'ingresso del canale 1; sull'asse y viene rappresentato il segnale d'ingresso del canale 2.  
N.B. Quando si usa questo modo, il selettore della modalità di rappresentazione verticale (17) deve essere posizionato nel modo CH2.

#### 4 - COMANDI DEL "TRIGGER".

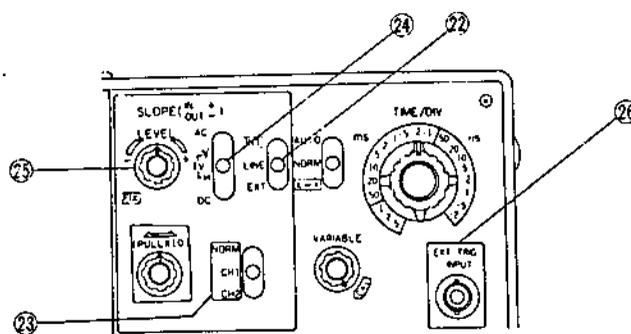


FIG. 4

**22 - INT-LINE-EXT:** Selettore della sorgente di trigger.

**INT:** viene utilizzato come sorgente di trigger il segnale d'ingresso del Canale 1 o del Canale 2 .

**LINE:** la triggerazione viene effettuata alla frequenza di rete

**EXT:** il segnale di trigger è quello in ingresso al connettore EXT TRIGGER SIGNAL INPUT (26).

**23- NORM-CH1-CH2 :** selettore della sorgente interna di trigger. La sorgente di trigger viene selezionata come segue dai segnali applicati a CH1 o CH2 INPUT quando il selettore della sorgente di trigger (22) è su INT.

**CH1 :** La sorgente trigger è il segnale APPLICATO al CH1.

- NORM : La sorgente di trigger è il segnale rappresentato sul TRC.
- CH2 : La sorgente di trigger è il segnale applicato al CH2.

24-AC-TV(V)-TV(H)-DC: Selettore di accoppiamento del segnale di trigger.  
 Il segnale di trigger viene filtrato mediante un circuito apposito prima di entrare in funzione come avvio dell'asse dei tempi.

AC : il filtro è costituito da un condensatore per bloccare ogni componente continua, in modo che la triggerazione venga effettuata indipendentemente dal livello di tale componente continua.

DC: il segnale di trigger viene utilizzato per la triggerazione con tutte le sue componenti.

25- LEVEL, FIX, SLOPE : questo comando fornisce il controllo fine del valore di tensione al quale il segnale di trigger avvia l'asse dei tempi. Quando è completamente ruotato in senso antiorario, su FIX, il livello di trigger è fissato nel modo ottimale. Questo comando inoltre, consente di stabilire in corrispondenza di quale valore del segnale di ingresso parte il segnale a dente di sega: quando la manopola viene tirata verso l'osservatore e ruotata in corrispondenza del segno -, è possibile scegliere tale valore in corrispondenza della "pendenza" negativa del segnale in studio; quando è spinta verso l'interno e ruotata in corrispondenza del segno +, si può sceglierlo in corrispondenza della "pendenza" positiva del segnale in studio.

26 - EXT TRIGGER INPUT : connettore d'ingresso per un segnale di trigger esterno.

## 5 - ALTRI COMANDI E CONNETTORI

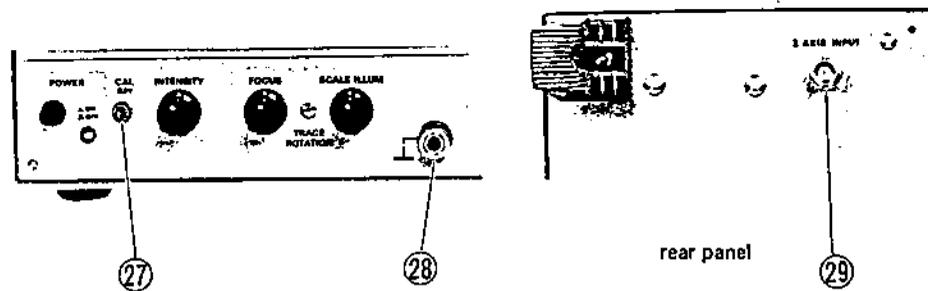
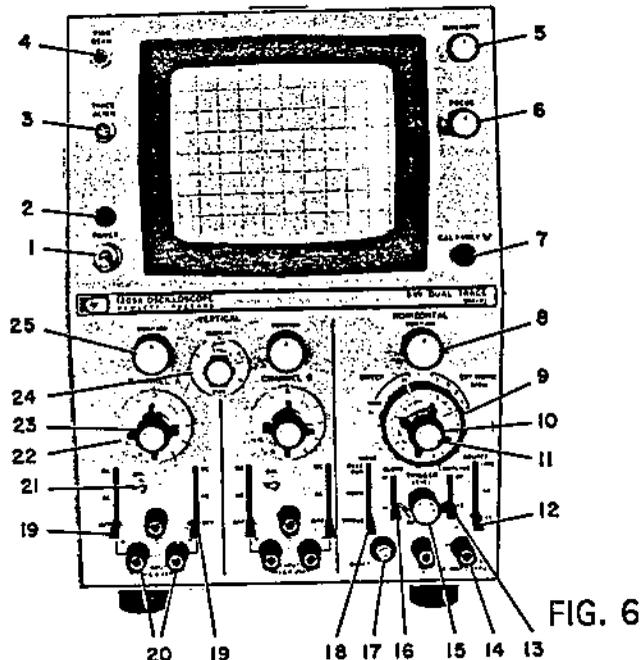


FIG. 5

- 27 - CAL : fornisce un segnale di calibrazione a onda quadra della frequenza di  $\sim 1\text{KHz}$  e di ampiezza 0.3 v.
- 28 - : collegamento di massa della carcassa : permette una facile connessione alla carcassa .
- 29 - Z AXIS INPUT (pannello posteriore): applicando a questo ingresso un segnale positivo (+5V o più) viene ridotta l'intensità della traccia.

## DESCRIZIONE DEI COMANDI E DEI CONNETTORI DELL'OSCILLOSCOPIO HEWLETT PACKARD MOD. 1205 A/B.



- 1 - POWER :** fornisce tensione al circuito primario dello strumento .
- 2 - Indicatore:** si illumina quando viene acceso lo strumento.
- 3 - TRACE ALIGN:** allinea la traccia con le rette orizzontali del reticolo sullo schermo.
- 4 - FIND BEAM :** quando viene premuto la traccia ritorna sullo schermo.
- 5 - INTENSITY :** regola la luminosità della traccia.
- 6 - FOCUS :** regola la nitidezza della traccia.
- 7 - CAL 1 VOLT:** fornisce un'onda quadra di ampiezza 1V picco-picco e di frequenza di rete (50 Hz).
- 8 - POSITION :** regola la posizione orizzontale della traccia.
- 9 - SWEEP/EXT HORIZ:** posizionato su SWEEP applica un segnale a dente di sega tra le placchette di deviazione orizzontale. In particolare, su "x1", gli inversi della velocità orizzontale della traccia sono quelli indicati dal comando n.10; su "MAG", la velocità orizzontale della traccia aumenta di un fattore 10.

Posizionato su EXT HORIZ consente di selezionare il fattore di deflessione essendo il segnale esterno applicato al connettore TRIG & HORIZ INPUT.

**10-Time/Division:** seleziona la velocità orizzontale della traccia.

**11-Horizontal CAL:** fornisce una regolazione continua del fattore di deflessione orizzontale fra i valori consentiti dal selettore n. 9 quando è posizionato su "EXT HORIZ".

**12 SOURCE:** seleziona la sorgente del segnale di "TRIGGER" che dà l'avvio allo spostamento della traccia.  
In posizione LINE viene usato come trigger un segnale con frequenza di rete.  
In posizione INT, viene usato come trigger il segnale del canale A se il comando "DISPLAY" (n. 24) è regolato su A, ALT, o CHOP; il segnale del canale B se il comando "DISPLAY" è regolato su B.  
In posizione EXT, viene usato come trigger il segnale applicato al connettore TRIG & HORIZ INPUT.

**13 - Horizontal COUPLING :** in posizione AC il segnale in ingresso viene filtrato mediante un circuito capacitivo allo scopo di eliminare l'eventuale componente continua; in posizione DC il segnale in ingresso conserva tutte le proprie componenti.

**14 - TRIG & HORIZ INPUT :** consente l'applicazione di un segnale esterno di trigger o l'applicazione di un segnale esterno alle placchette di deviazione orizzontale.

**15 - TRIGGER:** seleziona, nella forma d'onda del segnale di trigger, il valore del potenziale che dà l'avvio allo spostamento orizzontale della traccia.  
In posizione AUTO vengono generati trigger automatici con una frequenza di 40Hz.

**16 - SLOPE:** consente di scegliere se dare inizio allo spostamento orizzontale della traccia in corrispondenza a pendenza positiva o negativa del segnale di trigger.

**17 - RESET :** premendolo, se la levetta "MODE" (n. 18) è posizionata su "SINGLE", si ottiene per una sola volta la corsa orizzontale della traccia. Rilasciandolo, l'apposito circuito viene nuovamente predisposto; l'indicatore si illumina quando questa operazione è completata.

- 18 - MODE :** nella posizione NORM, il moto orizzontale della traccia ha inizio all'arrivo di ciascun segnale di trigger. Nella posizione SINGLE la traccia viene fatta partire una sola volta in corrispondenza dell'arrivo del segnale di trigger, dopodichè l'apposito circuito deve essere nuovamente predisposto con operazione manuale (v. n. 17). Nella posizione FREE RUN la traccia viene fatta partire continuamente e la velocità orizzontale del suo moto è selezionabile mediante la manopola n. 10 (Time/Division).
- 19 -Vertical COUPLING:** analogo del n. 13 per quanto riguarda i segnali avviati alle placchette di deviazione verticale.
- 20-INPUT:** ingresso di segnali agli amplificatori verticali. Applicando un segnale tra il connettore "+" e quello collegato a terra, il segnale viene rappresentato sullo schermo col suo segno; applicandolo tra il connettore "-" e quello a terra il segnale appare invertito. E' possibile anche appicare il segnale tra i connettori + e -. In tal caso non c'è collegamento a terra.
- 21- BAL :** minimizza lo spostamento della traccia quando si cambia la posizione della manopola n. 22 (Volt/Division).
- 22-Volt/Division:**permette di selezionare il fattore di deflessione dell'amplificatore verticale fra 17 valori.
- 23- Vertical CAL :** fornisce una regolazione continua del fattore di deflessione fra i valori selezionabili mediante la manopola n. 22 (Volt/Division). Nella posizione CAL, il valore della deflessione verticale è quella indicata dalla manopola n. 22 (Volt/Division).
- 24 - DISPLAY :** seleziona l'immagine visibile sullo schermo.
- Posizione A: è visibile l'immagine del segnale in ingresso al canale A.
  - Posizione B: è visibile l'immagine del segnale in ingresso al canale B.
  - Posizione ALT: `e visibile separatamente l'immagine del segnale in ingresso a ciascun canale, in

corrispondenza di corse orizzontali alternate della traccia.

- Posizione CHOP: per ciascuna corsa orizzontale della traccia vengono presentati alternativamente, con una frequenza di circa 100 KHz, i segnali in ingresso ai due canali. Quando la levetta n. 12, "SOURCE", si trova nella posizione INT, come segnale di trigger viene usato quello del canale A.
- Posizione A vs B; è visibile un diagramma X-Y dei segnali in ingresso ai due canali: il segnale del canale A viene inviato alle placchette di deviazione verticale, quello del canale B alle placchette di deviazione orizzontale.

25 - POSITION : regola la posizione verticale della traccia.

OSC. "NATIONAL"

# Specifications

Characteristic	Performance	Operational information						
<b>Vertical Deflection (Both channels)</b>								
Deflection factor	1 mV/DIV to 2V/DIV, 1-2-5 sequence	11 steps						
Accuracy (+20°C)	1 mV/DIV to 2mV/DIV ±5% 5 mV/DIV to 2V/DIV ±3%							
Variable sensitivity	Reduces the selected VOLTS/DIV sensitivity by a factor of approximately 2.5.							
Frequency response	<table border="1"> <tr> <td>VP-5220A</td> <td>VP-5231A</td> </tr> <tr> <td>DC to 5MHz, -3dB</td> <td>DC to 5MHz, -3dB</td> </tr> <tr> <td>5 mV/DIV</td> <td>DC to 30MHz, -3dB</td> </tr> </table>	VP-5220A	VP-5231A	DC to 5MHz, -3dB	DC to 5MHz, -3dB	5 mV/DIV	DC to 30MHz, -3dB	The standard signal frequency is 50 kHz and amplitude is 6 DIV
VP-5220A	VP-5231A							
DC to 5MHz, -3dB	DC to 5MHz, -3dB							
5 mV/DIV	DC to 30MHz, -3dB							
1 mV/DIV, 2mV/DIV	DC to 5MHz, -3dB							
5 mV/DIV	DC to 30MHz, -3dB							
Input impedance	<table border="1"> <tr> <td>Direct with Probe</td> <td>1MΩ paralleled by approx. 30pF 10MΩ paralleled by approx. 19pF</td> </tr> </table>	Direct with Probe	1MΩ paralleled by approx. 30pF 10MΩ paralleled by approx. 19pF	Signal frequency is less than 1 kHz.				
Direct with Probe	1MΩ paralleled by approx. 30pF 10MΩ paralleled by approx. 19pF							
Maximum input voltage	300V (DC + AC peak), 600V peak-peak for 10 minutes.							
Vertical display mode	CH1, CH2, CHOP, ALT, ADD							
Signal delay	Available (VP-5231A only)							
<b>Horizontal Deflection System</b>								
Horizontal Display mode	0.5s/DIV to 0.2μs/DIV in 20 calibrated steps in 1-2-5 sequence.							
Sweep mode	AUTO, NORM, X-Y							
Sweep rate accuracy	±5%							
Sweep variable	Reduces the selected sweep rate by a factor of approximately 2.5.							
Sweep magnification	The waveform at the center of CRT is magnified 10 times.							
Magnification Accuracy	0.5s/DIV to 0.5μs/DIV ±7% 0.2μs/DIV ±10%							
Maximum sweep rate	20ns/DIV							
Sweep length	11.5 DIV ± 1.5 DIV							

Characteristic		Performance		Operational information
Triggering				
Trigger mode		NORM, AUTO FIX		
Trigger source		INT (NORM, CH1, CH2) LINE EXT		
Trigger coupling		DC, AC, TV(V), TV(H)		
Trigger slope		 (+) or  (-)		
Maximum input voltage		DC, AC ..... 300V(DC + AC peak) at 10 sec TV(V), TV(H) ... 50V(DC + AC peak) at 10 sec		Frequency is less than 1 kHz.
External input impedance		DC, AC ..... 1MΩ ± 20% TV(V), TV(H) .. Approx 100 kΩ		
Trigger sensitivity		VP-5220A	VP-5231A	
INT	NORM	AC	30Hz to 5MHz 0.5DIV ~ 20MHz 2.0DIV	30Hz to 5MHz 0.5DIV ~ 30MHz 2.0DIV
		DC	DC to 5MHz 0.5DIV ~ 20MHz 2.0DIV	DC to 5MHz 0.5DIV ~ 30MHz 2.0DIV
		TV	V (FIELD) 1DIV H (LINE) 1DIV	V (FIELD) 1DIV H (LINE) 1DIV
	FIX	AC/DC	400Hz to 5MHz 0.8DIV ~ 15MHz 2.0DIV	400Hz to 5MHz 0.8DIV ~ 15MHz 2.0DIV
		TV	H(LINE) 1 DIV	H(LINE) 1DIV
	EXT	NORM	AC	30Hz to 5MHz 0.1Vp-p ~ 20MHz 0.5Vp-p
DC			DC to 5MHz 0.1Vp-p ~ 20MHz 0.5Vp-p	DC to 5MHz 0.1Vp-p ~ 30MHz 0.5Vp-p
TV			V(FIELD) 0.1V H(LINE) 0.1V	V(FIELD) 0.1V H(LINE) 0.1V
FIX		AC/DC	400Hz to 5MHz 0.2Vp-p ~ 15MHz 0.5Vp-p	400Hz to 5MHz 0.2Vp-p ~ 15MHz 0.5Vp-p
		TV	H(LINE) 0.1V	H(LINE) 0.1V

Characteristic	Performance		Operational information
<b>X-Y Operation</b>			
Deflection factor	1 mV/DIV to 2V/DIV Channel 1 as X-axis Channel 2 as Y-axis		
Deflection accuracy	1 mV/DIV, 2mV/DIV $\pm$ 7% 5mV/DIV to 2V/DIV $\pm$ 5%		
Frequency bandwidth	VP-5220A	VP-5231A	
Y-axis	1mV/DIV	DC to 5MHz -3dB	DC to 5MHz -3dB
	2mV/DIV		
	5mV/DIV	DC to 20MHz -3dB	DC to 30MHz -3dB
X-axis	DC to 500kHz, -3dB		
Phase difference	<3° at 50kHz	<3° at 200kHz	
<b>Z axis</b>			
Polarity and sensitivity	A positive going input voltage (from +5V) will decrease intensity.		
Bandwidth	DC to 5MHz		
Input resistance	50k $\Omega$ $\pm$ 20%		
Input coupling	DC		
Maximum input voltage	50V (DC + AC peak)		
<b>Calibrator</b>			
Output voltage	0.3V, $\pm$ 3%		
Waveform	Positive square wave		
Frequency	1kHz $\pm$ 20%		
<b>Cathode-ray Tube</b>			
Tube type	VP-5220A	VP-5231A	
	8 x 10DIV Internal graticule	8 x 10DIV Internal graticule	
Accelerating potential Graticule area	2kV $\pm$ 10%	6kV $\pm$ 10%	
	8 DIV vertical by 10 DIV horizontal 1 DIV $\approx$ 10mm	8 DIV vertical by 10 DIV horizontal 1 DIV $\approx$ 9.5mm	
Scale illumination	Yes	Yes	

Characteristic	Performance			Operational information
<b>Power Supply</b>				
Line voltage	VP-5220A	VP-5231A		
Rating	100V. 115V. 215V. 230V	90 to 110V 104 to 126V 194 to 236V 207 to 250V	90 to 110V 104 to 126V 194 to 236V 207 to 250V	
Line frequency		50Hz to 60Hz	50Hz to 60Hz	
Power Consumption		55W	45W	at 50Hz, 100V
<b>Environmental Conditions</b>				
Assured performance temperature or humidity	15°C to 35°C			
	20% to 80%			
Operating temperature	0°C to 45°C			
Operating relative humidity	20% to 80%			
Storage temperature	-20°C to 70°C			
<b>Mechanical Characteristics</b>				
Dimensions	Height (mm)	Width (mm)	Depth (mm)	
Main body only	177 ± 3	264 ± 3	400 ± 3	
Measured at Maximum point	188 or less	312 or less	530 or less	
Weight (without accessories)	Approx. 8 kg.			
<b>Accessories</b>				
Instruction Manual	x 1			— note — 500mA (TSC500MA) is added for 215V/230V model.
Probes	x 2 — VQ-054N3015 —			
Fuse	x 1 — 1A (TSC1A) — see note.			
Lamp	x 1			
<b>Optional Accessories</b>				
Hood	VQ-035C10			
Stand	VQ-037F			
Front Cover	VQ-039E20			
Rack Mount	VQ-039R10			
1/10 Attenuator for 10MΩ Probe	VQ-031S			

OSC. H.P.

Table 1-1. Specifications

<b>VERTICAL AMPLIFIERS</b>	<b>PHASE SHIFT:</b> (For Channel A vs. B) Less than 1° to 100 kHz (Verniers in calibrated position).
<b>DEFLECTION FACTOR:</b>	<b>TIME BASE</b>
Ranges: From 5 mV/div to 20 V/div (12 positions) in 1, 2, 5 sequence. ±3% accuracy with Vernier in calibrated position.	<b>SWEEP:</b>
Vernier: Continuously variable between all ranges; extends maximum deflection factor to at least 50 V/div.	Ranges: From 1 usec/div to 5 sec/div (21 positions) in 1, 2, 5 sequence. ±3% accuracy with Vernier in calibrated position.
<b>BANDWIDTH:</b> Dc to 500 kHz with a maximum risetime of 0.7 usec. 2 Hz to 500 kHz when ac coupled.	Vernier: Continuously variable between ranges; extends slowest sweep to at least 12.5 sec/div.
<b>INPUT:</b> Differential or single-ended on all ranges, selectable by front-panel control.	<b>X10 MAGNIFIER:</b> indicates magnified sweep time/division directly with ±5% accuracy.
<b>COMMON MODE:</b>	<b>AUTOMATIC TRIGGERING:</b> Baseline is displayed in absence of an input signal.
Frequency: Dc to 10 kHz on all ranges. Rejection Ratio: At least 50 dB with dc input coupling on 5 mV/div to 0.2 V/div ranges. CMRR is at least 30 dB on the 0.5 V/div to 20 V/div ranges. Signal maximum: ±3V (dc + pk ac) on 5 mV/div to 0.2 V/div ranges; ±300V (dc + pk ac) on all other ranges.	Internal: 50 Hz to above 500 kHz on most signals causing 0.5 division or more vertical deflection. Triggering on line frequency also selectable. External: 50 Hz to above 1 MHz on most signals at least 0.2V p-p. Trigger Slope: Positive or negative slope on internal, external or line trigger signals.
<b>INPUT COUPLING:</b> Front-panel selection of DC, AC, or OFF for both + and - inputs.	<b>AMPLITUDE SELECTION TRIGGERING:</b>
<b>INPUT RC:</b> 1 megohm shunted by 45 pF; constant on all ranges.	Internal: Dc to above 500 kHz on signals causing 0.5 division or more vertical deflection.
<b>MAXIMUM INPUT:</b> ±400V (dc + pk ac).	External: Dc to 1 MHz on signals at least 0.2V p-p. Input impedance is 1 megohm shunted by approximately 20 pF.
<b>DISPLAY:</b> Channel A. Channel B. Channels A and B (either Chop or Alternate). Channels A and B vs. horizontal input (Chop only). Channel A vs. B (A-vertical, B-horizontal). Chop frequency is approximately 100 kHz.	Trigger Level and Slope: Internal, any point on vertical waveform displayed; or continuously variable from +100V to -100V on either slope of the external trigger signal.
<b>INTERNAL TRIGGER:</b> By channel A signal for A, Chop, and Alternate displays. Channel B signal for B display.	Trigger Coupling: Dc or ac for external, line, or internal triggering. Lower ac cutoff is 1.6 Hz for external; 5 Hz for internal.
<b>ISOLATION:</b> Greater than 80 dB between channels at 500 kHz with input connectors shielded.	<b>SINGLE SWEEP:</b> Selectable by front-panel switch, reset pushbutton with armed indicator light.
	<b>FREE RUN:</b> Selectable by front-panel switch.
	<b>MAXIMUM INPUT:</b> ±350V (dc + pk ac).

osc. H.P.

Model 1205 A/

Section I

Table 1-1. Specifications (Cont'd)

### HORIZONTAL AMPLIFIER

**BANDWIDTH:** Dc to 300 kHz. With input ac coupled, low frequency cutoff is 1.6 Hz.

#### DEFLECTION FACTOR:

Ranges: 0.1 V/div, 0.2 V/div 0.5 V/div, and 1 V/div.

Vernier: Continuously variable between ranges; extends maximum deflection factor to at least 2.5 V/div.

**INPUT:** Single-ended.

**INPUT RC:** 1 megohm shunted by approximately 20 pF.

**MAXIMUM INPUT:**  $\pm 350V$  (dc + pk ac).

### GENERAL

#### CATHODE-RAY TUBE.

Type: Mono-accelerator, 3000V accelerating potential; P31 phosphor standard (see Modifications for other phosphors); etched safety glass faceplate reduces glare.

Graticule: 8 x 10 divisions; parallax-free internal graticule; 0.2 subdivision markings on horizontal and vertical major axes, 1 div = 1 cm.

Intensity Modulation: +2V signal blanks trace of normal intensity; +8V signal blanks any intensity. Dc coupled input on rear panel; amplifier risetime approximately 200 ns; Input resistance is 5 kilohms.

#### CALIBRATOR:

Type: Line frequency square wave.

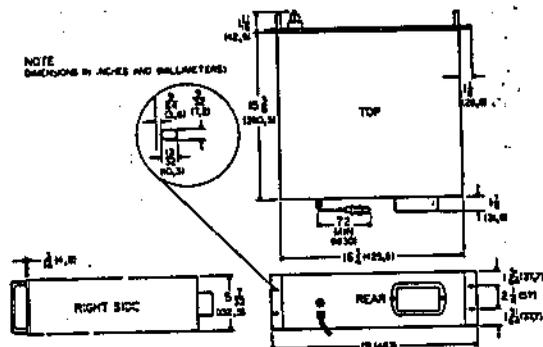
Output:  $1V \pm 1.5\%$ , front-panel connector.

**BEAM FINDER:** Pushbutton to locate beam on CRT screen regardless of setting of vertical, horizontal, and intensity controls.

#### DIMENSIONS:

Cabinet: 8-5/16 in. wide x 11-3/4 in. high x 18-11/16 in. deep (211,1 x 298,5 x 374,4 mm).

Rack: Refer to outline drawing.



#### WEIGHT:

Cabinet: Net, 25 lb (11,3 kg); shipping, 34-1/2 lb (15,6 kg).

Rack: Net, 22-1/2 lb (10,2 kg); shipping, 35 lb (15,8 kg).

**POWER:** 115 or 230V  $\pm 10\%$ ; 47 to 440 Hz; approximately 45W.

#### MODIFICATIONS

**CRT PHOSPHORS:** (specify by phosphor number): P31 standard. P2, P7 (with amber filter), and P11 available at no extra cost.

**OPTIONS AND SPECIALS:** Refer to Section VII for further information.

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA**

**"La Sapienza"  
Dipartimento di Fisica**

**Appunti delle lezioni di  
ESPERIMENTAZIONE FISICA**

**M. Alessio - S. Improta**

**LO SPETTROSCOPIO - DESCRIZIONE ED IMPIEGO**

**A.A. 1992 -93**

## INDICE

	<b>pag.</b>
<b>Lo spettroscopio.....</b>	<b>1</b>
<b>1. Descrizione dello strumento.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Misurazioni con lo spettroscopio.....</b>	<b>6</b>
2.1 Operazioni preliminari - Aggiustamento all'infinito.....	6
2.2 Spettroscopio a prisma. - Misurazioni di indici di rifrazione.....	6
2.3 Misurazioni di lunghezze d'onda con lo spettroscopio a prisma.....	8
2.4 Misurazioni di lunghezze d'onda mediante uno spettroscopio a reticolo di diffrazione.....	10
<b>Appendice 1.....</b>	<b>12</b>
<b>Appendice 2.....</b>	<b>14</b>

## LO SPETTROSCOPIO

## 1. Descrizione dello strumento

Uno spettroscopio è uno strumento capace di rendere osservabile lo spettro di emissione di una sorgente e di consentire la misurazione delle lunghezze d'onda delle radiazioni emesse.

Lo strumento è costituito essenzialmente da quattro parti (v. fig. 1): un collimatore C, un cannocchiale C', un goniometro e un sistema disperdente (prisma ottico o reticolo di diffrazione), il quale può essere posto su una opportuna piattaforma P. Il collimatore ed il cannocchiale hanno entrambi forma cilindrica; il primo è fisso, mentre il secondo può ruotare intorno ad un asse verticale passante per il centro della piattaforma. Il sistema è costruito in modo che l'insieme delle possibili posizioni dell'asse del cannocchiale definisca un piano, al quale appartiene anche l'asse del collimatore.

In tal modo, mediante la lettura delle posizioni di opportuni indici che solidalmente al cannocchiale ruotano su una scala graduata circolare S fissata sullo strumento, è possibile misurare gli angoli tra diverse direzioni dell'asse del cannocchiale.

Il collimatore, che è, come si è detto, solidale con la base dello strumento, è costituito da un tubo (annerito all'interno allo scopo di minimizzare eventuali riflessioni disturbatrici) ad una estremità del quale si trova una fenditura verticale, F (v. ancora la fig. 1) di larghezza regolabile mediante la vite  $V_1$ ; tale fenditura, illuminata dalla radiazione da esaminare, è la "sorgente luminosa", ovvero "l'oggetto" del quale il sistema ottico dello spettroscopio forma l'immagine, o le immagini.

Presso l'altra estremità del collimatore, quella rivolta verso la piattaforma, si trova una lente L, la cui distanza da F è regolabile mediante la vite  $V_2$ .

La funzione del collimatore è quella di produrre un fascio di raggi paralleli (ovvero un'onda piana), in modo che sia univocamente definibile la direzione di propagazione delle onde da esso emergenti, e quindi l'angolo di incidenza rispetto al sistema disperdente eventualmente presente sulla piattaforma. Ciò si realizza quando la fenditura F si trova nel piano focale della lente L.

Il cannocchiale C' è di tipo astronomico; i suoi elementi essenziali sono (v. fig. 2) due lenti convergenti,  $L_1$  ed  $L_2$ .

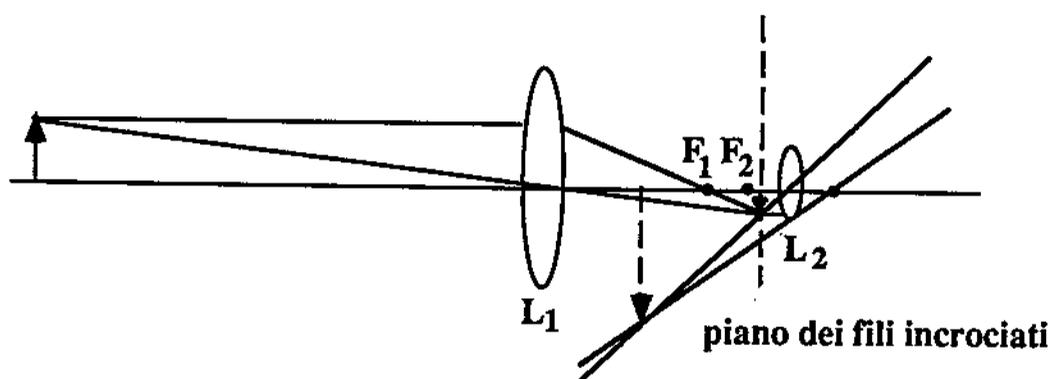


Fig. 2

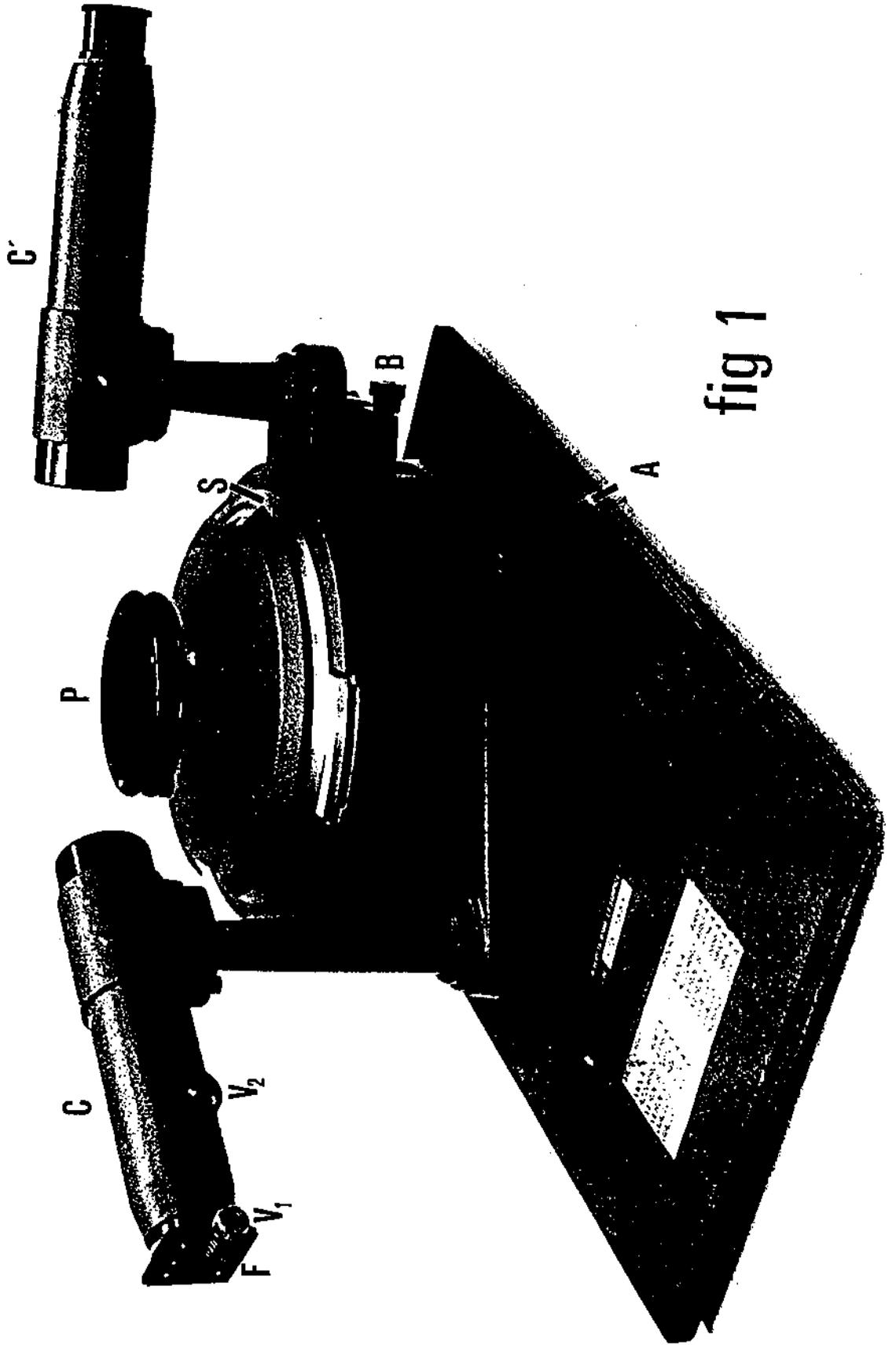


fig 1

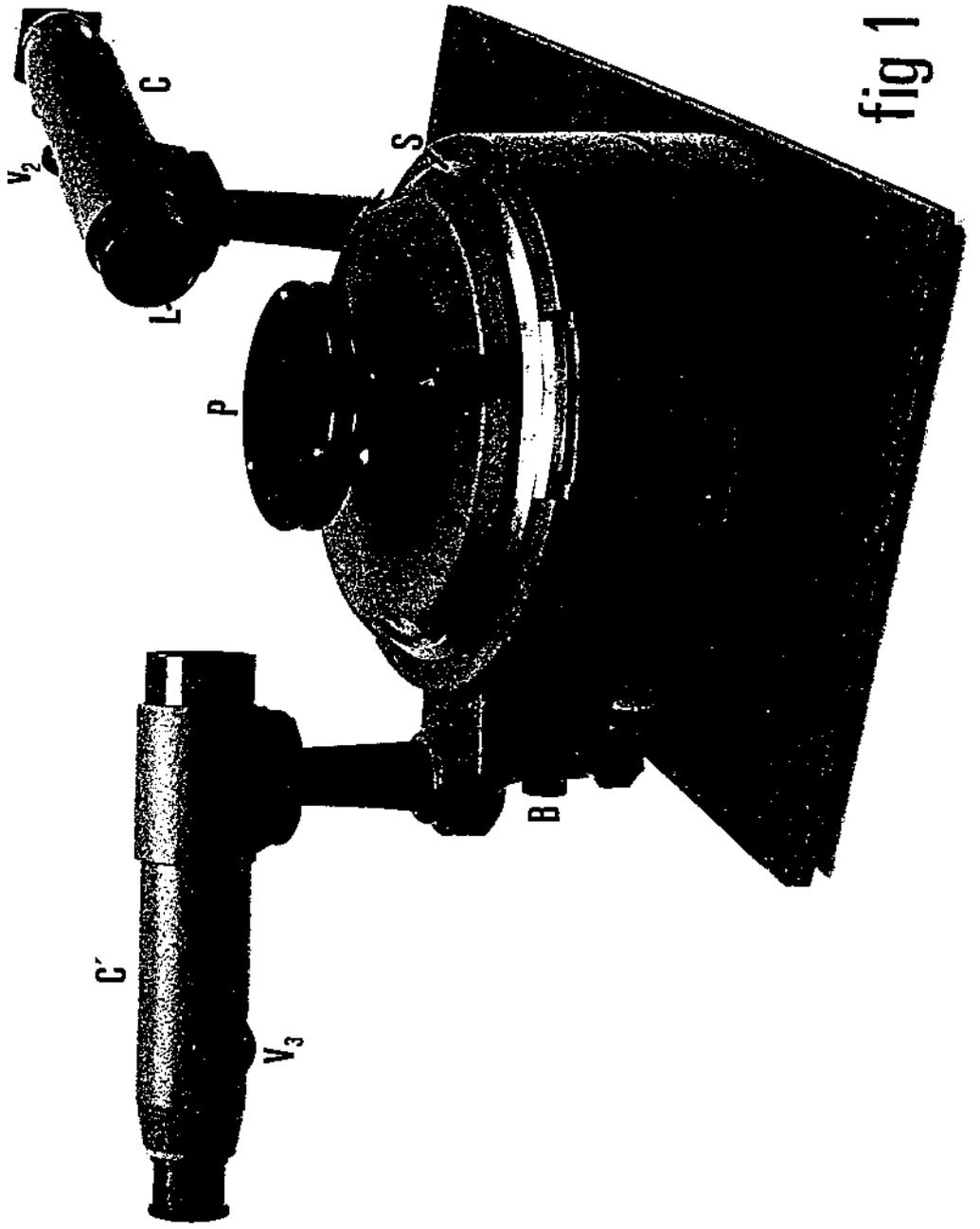


fig 1<sup>BIS</sup>

La lente  $L_1$ , detta "obbiettivo", di distanza focale maggiore rispetto a  $L_2$ , raccoglie le onde luminose provenienti dall'oggetto da osservare e la lente  $L_2$ , detta "oculare", provvede a formare l'immagine che l'occhio dell'osservatore, posto al di là di essa, riceve.

L'obbiettivo forma, di un oggetto osservato, posto a distanza infinita, (il che è nelle ipotesi d'uso di un cannocchiale astronomico) un'immagine reale capovolta, impiccolita rispetto all'oggetto, situata nel proprio piano focale. Lo strumento è costruito in modo che il piano in cui questa immagine si forma sia compreso tra l'oculare e il primo fuoco di esso, cosicchè dell'immagine formata dall'obbiettivo l'oculare formi a sua volta un'immagine virtuale, diritta, ingrandita, che è quella che viene percepita dal sistema visivo dell'osservatore. Normalmente, tuttavia, si fa in modo che i piani focali delle due lenti coincidano, sicchè i raggi rifratti dall'oculare sono paralleli tra loro e l'immagine virtuale è all'infinito.

L'"oggetto" osservato, nel comune uso dello spettroscopio, è la fenditura del collimatore, la cui immagine formata dal cannocchiale si presenta come una "riga" luminosa, che altro non è se non il massimo centrale della figura di diffrazione alla quale dà luogo, complessivamente, il sistema ottico usato.

La direzione nella quale si forma la "riga" sotto osservazione è individuabile con elevata precisione perché all'interno del cannocchiale, solidalmente all'oculare, sono fissati due sottili fili incrociati a  $\sim 90^\circ$ . Mediante la vite  $V_3$  (v. fig. 1), la quale regola la distanza tra l'obbiettivo e l'oculare, è possibile fare in modo che il piano in cui si trovano i fili incrociati coincida con quello nel quale si forma l'immagine dell'obbiettivo, cosicchè l'occhio dell'osservatore veda nitidamente, sovrapposti, immagine della fenditura e fili incrociati.<sup>(1)</sup> Mediante piccole rotazioni del cannocchiale è possibile allora "puntare" o "centrare" la riga, cioè far coincidere il punto di incrocio dei fili con la zona centrale più brillante della riga. L'asse del cannocchiale, cioè l'asse del sistema ottico costituente il cannocchiale, ha allora la stessa direzione nella quale si propaga l'onda luminosa che forma la riga osservata.

L'ampiezza dell'angolo individuato da due diverse posizioni del cannocchiale viene misurata dalla differenza tra le letture eseguite in corrispondenza di ciascuna posizione su una scala graduata circolare, solidale con la base dello strumento. Lungo tale scala ruotano, solidalmente al cannocchiale, due noni diametralmente opposti, con entrambi i quali devono essere eseguite le letture allo scopo di correggere un errore sistematico che potrebbe presentarsi nella misura degli angoli. Il possibile manifestarsi di tale errore è dovuto alla cosiddetta "eccentricità", rispetto all'asse di rotazione del cannocchiale, della corona circolare sulla quale è incisa la scala graduata. Infatti, se il centro  $O'$  della graduazione della scala (v. fig. 3) non coincide con l'intersezione  $O$  dell'asse con il piano della scala graduata stessa, l'ampiezza vera dell'angolo  $\widehat{AOB} = \widehat{C\hat{O}D}$  viene letta sulla scala come ampiezza di  $\widehat{A\hat{O}'B}$  oppure di  $\widehat{C\hat{O}'D}$ , diverse tra loro e diverse dalla prima.

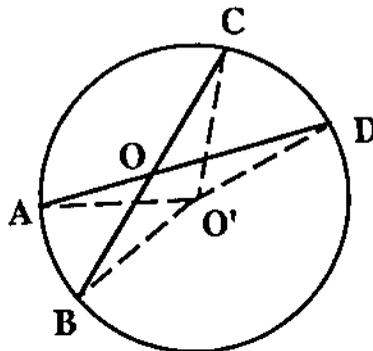


Fig. 3

(1) Per rendere possibile l'adattamento del cannocchiale alle diverse caratteristiche visive dei singoli osservatori, lo strumento è solitamente dotato di un sistema ottico aggiuntivo, coassiale col cannocchiale, e chiamato "adattatore", interposto tra oculare e occhio dell'osservatore. Regolando la posizione dell'adattatore nella direzione dell'asse del cannocchiale, ciascun osservatore può fare in modo di vedere nitidamente i fili incrociati di riferimento, e quindi qualsiasi immagine venga a formarsi nel piano di essi.

Se però due noni diametralmente opposti, e solidali al cannocchiale che ruota intorno a O, consentono di misurare l'ampiezza sia di  $\widehat{A\hat{O}B}$  che di  $\widehat{C\hat{O}D}$ , l'ampiezza vera è ricavabile come media aritmetica delle due ampiezze misurate.

Si osservi preliminarmente che l'ampiezza  $\alpha$  di un qualsiasi angolo di cui ruota il cannocchiale è uguale a quella dell'angolo di cui contemporaneamente ruota, intorno a O, una qualunque retta solidale col cannocchiale, in particolare la retta individuata dai punti O e O'. Il triangolo O'NP (fig. 4) è isoscele, per cui gli angoli alla base hanno la stessa ampiezza  $\beta$ . Essendo l'angolo  $\widehat{P\hat{O}'Q}$  esterno al triangolo OO'P, per l'ampiezza  $\alpha''$  di esso vale la relazione

$$\alpha'' = \alpha + \beta$$

Analogamente, rispetto al triangolo NOO'

$$\alpha = \alpha' + \beta.$$

Sottraendo membro a membro le due relazioni ottenute si ha

$$\alpha'' - \alpha = \alpha - \alpha',$$

da cui

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}$$

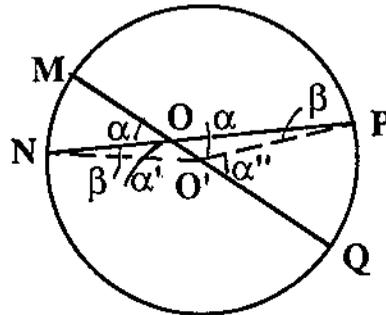


Fig. 4

La piattaforma può ruotare anch'essa intorno allo stesso asse verticale intorno al quale ruota il cannocchiale ed è dotata, per gli stessi motivi detti sopra, di due noni circolari ad essa solidali, i quali consentono di eseguire letture su un'opportuna scala.

Sia la piattaforma che il cannocchiale possono essere fatti ruotare a mano ("movimenti grandi") quando siano allentate, rispettivamente, le viti A e B (fig. 1). Per centrature più precise è opportuno ricorrere ai "movimenti fini", ottenibili mediante le viti A<sub>1</sub> e B<sub>1</sub> quando, rispettivamente, le viti A e B siano bloccate.

Si tenga presente che il tentativo di operare movimenti grandi con le viti A o B bloccate danneggia i delicati meccanismi dello strumento.

## 2. Misurazioni con lo spettroscopio.

### 2.1 Operazioni preliminari- Aggiustamento "all'infinito".

Per usare correttamente lo spettroscopio è necessario prepararlo in modo che esso fornisca l'immagine nitida ("a fuoco", come impropriamente si suol dire) di un oggetto a distanza infinita, quale risulta essere in pratica la fenditura del collimatore quando le onde luminose da esso uscenti in tutte le direzioni vengono trasformate dal collimatore in onde piane aventi tutte la stessa direzione di propagazione (quella dell'asse del collimatore stesso).

La prima operazione da fare è quella di posizionare l'adattatore in modo da vedere nitidamente i fili incrociati di riferimento. Questo primo aggiustamento viene facilitato se il campo visivo del cannocchiale è bene illuminato, il che può ottenersi per esempio puntando il cannocchiale su un foglio di carta bianca su cui è diretta la luce di una lampada. La seconda operazione è il "regolaggio all'infinito" del cannocchiale, che si esegue puntando il cannocchiale su un oggetto il più lontano possibile nell'ambiente in cui ci si trova e regolando, mediante la vite  $V_3$  (fig. 1<sub>bis</sub>), la distanza obbiettivo-oculare in modo che l'immagine dell'oggetto si veda nitidamente, sovrapposta ai fili incrociati.

Fatto ciò, il cannocchiale è regolato e la vite  $V_3$  non deve più essere mossa. Solo l'adattatore dovrà essere eventualmente regolato per consentire una buona visione ad un diverso osservatore.

L'ultima operazione riguarda il regolaggio del collimatore, e viene effettuata disponendo il cannocchiale in asse con il collimatore e regolando mediante la vite  $V_2$  la distanza tra il piano della fenditura e la lente in modo che guardando il cannocchiale si veda nitidamente l'immagine della fenditura. Poichè il cannocchiale era stato in precedenza regolato "all'infinito", l'effetto di quest'ultima operazione è la collocazione della fenditura nel piano focale della lente del collimatore.

La descritta sequenza di operazioni predispone lo spettroscopio per eseguire misurazioni utilizzando come elemento disperdente il prisma ottico ed il reticolo di diffrazione.

### 2.2 Spettroscopio a prisma - Misurazioni di indici di rifrazione.

Mediante lo spettroscopio a prisma è possibile misurare indici di rifrazione di materiali trasparenti ed eseguire analisi spettrale, cioè misurare lunghezze d'onda di radiazioni luminose.

Per misurare l'indice di rifrazione di una sostanza relativamente ad una determinata lunghezza d'onda, si realizza con tale sostanza, se solida, un prisma ottico, cioè un prisma con almeno due facce lavorate "otticamente", ossia tali che le "scabrosità" della loro superficie abbiano dimensioni lineari molto minori della lunghezza d'onda della radiazione incidente<sup>(\*)</sup>.

Si illumina la fenditura mediante una sorgente del cui spettro discreto di emissione facciano parte radiazioni della lunghezza d'onda desiderata e si procede alla determinazione della direzione di incidenza centrando col cannocchiale (fig. 5, cannocchiale nella pos. (1)) l'immagine della fenditura, in assenza del prisma.

Appoggiato poi il prisma sulla piattaforma, si tratta di individuarne la posizione per cui al variare dell'angolo di incidenza  $\varphi_1$  l'angolo di deviazione  $\delta$  assume il suo valore minimo (posizione di "deviazione minima"). A tale scopo si ruota la piattaforma facendo crescere  $\varphi_1$  e si osserva, prima a occhio nudo e poi mediante il cannocchiale, il movimento corrispondente del fascio di raggi rifratti della lunghezza d'onda che interessa. La posizione del prisma in corrispondenza della quale il fascio di raggi rifratti

---

(\*) Se la sostanza è liquida la si può introdurre in una vaschetta di forma prismatica, le cui facce siano costituite da lastre con le superfici piane e parallele; quest'ultimo accorgimento ha lo scopo di non modificare la direzione di propagazione delle onde luminose.

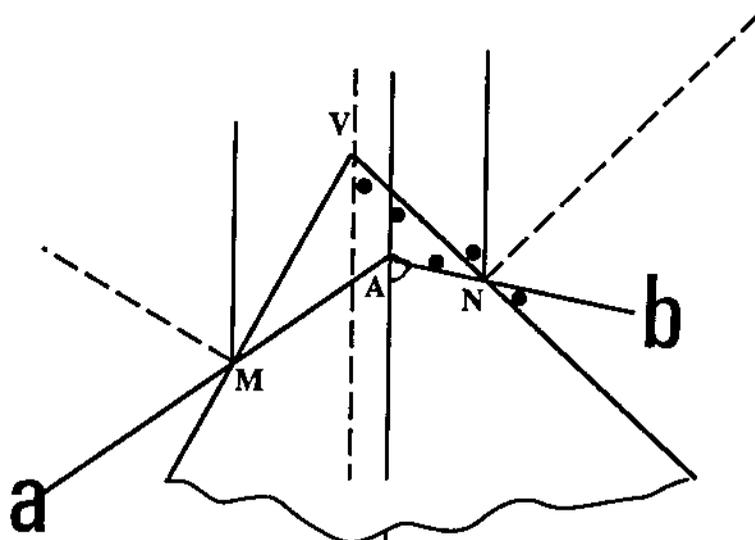


Fig. 6

### 2.3 Misurazione di lunghezza d'onda con lo spettroscopio a prisma.

Lo spettroscopio a prisma consente di misurare la lunghezza d'onda solo per confronto con altre note, ovvero in modo relativo. E' infatti necessario procedere preliminarmente ad una operazione di taratura da effettuarsi utilizzando lo spettro discreto, noto, emesso da una sorgente. Come curva di taratura potrebbe ad esempio essere utilizzata la  $n=n(\lambda)$  alla quale è fatto cenno alla fine del paragrafo precedente: misurando l'indice di rifrazione  $n_1$  della sostanza di cui è costituito il prisma per una radiazione di lunghezza d'onda incognita si può risalire al valore  $\lambda_1$  della lunghezza d'onda stessa (v. fig. 7)

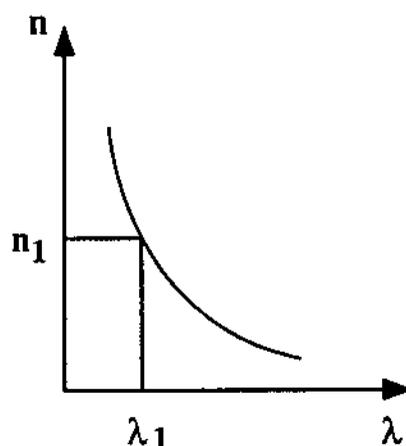


Fig. 7

Tale procedimento richiede però la misura degli angoli di deviazione minima relativi a tutte le lunghezze d'onda in esame, e risulta quindi piuttosto laborioso.

Più semplicemente si può costruire una curva di taratura riportando in grafico anziché l'indice di rifrazione, l'ampiezza  $\delta$  dell'angolo di deviazione in funzione delle lunghezze d'onda  $\lambda$ .

L'andamento è analogo a quello precedente, e la determinazione della lunghezza d'onda incognita avviene (v. fig. 8) in base alla misura dell'ampiezza  $\delta_1$  dell'angolo di deviazione corrispondente.

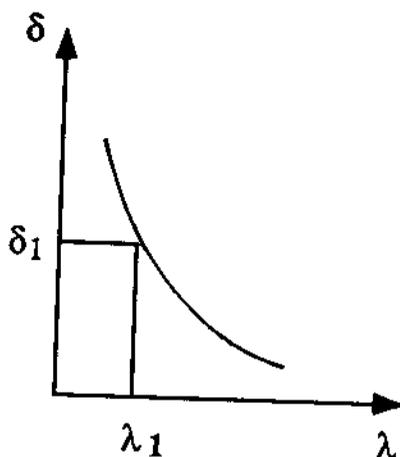


Fig. 8

E' opportuno tuttavia mettere il prisma in posizione di deviazione minima per una radiazione dello spettro usato per la taratura scegliendone una centrale in modo che le posizioni di deviazione minima relative a tutte le altre radiazioni non siano troppo diverse da essa.

La principale giustificazione di questo procedimento è offerta dalla considerazione che, se l'angolo di incidenza  $\phi_1$  è prossimo a quello  $\phi'_1$  per il quale  $\delta$  è minimo (v. fig. 9), eventuali piccole variazioni nel valore di  $\phi_1$  dovute al fatto che i raggi luminosi uscenti dal collimatore possono non essere rigorosamente tutti paralleli tra loro influiscono poco sulle corrispondenti variazioni di  $\delta$ , a differenza di quello che accadrebbe, a parità dell'entità della variazione di  $\phi_1$ , in corrispondenza di una zona in cui la curva  $d(\phi_1)$  ha pendenza maggiore.

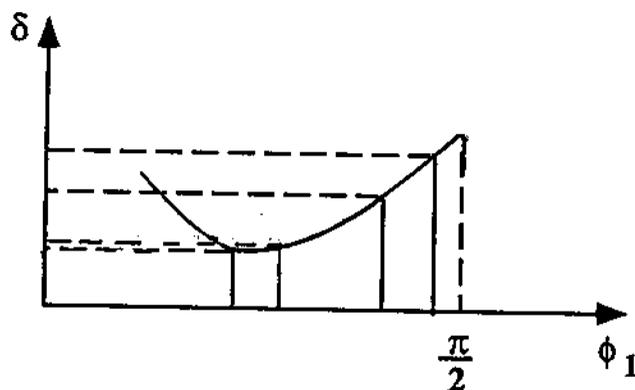


Fig. 9

Inoltre, la conoscenza di una posizione di deviazione minima rende possibile il riposizionamento del prisma, e quindi l'utilizzazione delle misure già ottenute, nell'eventualità in cui esso venga mosso rispetto alla situazione iniziale.

#### 2.4. Misurazioni di lunghezze d'onda mediante uno spettroscopio a reticolo di diffrazione.

L'equazione dei massimi principali  $d \sin \vartheta = m \lambda$ , con il noto significato dei simboli, consente di misurare lunghezze d'onda mediante un reticolo di diffrazione del quale sia noto il passo. Il passo può essere misurato mediante un microscopio; in tal caso la misurazione di lunghezza d'onda è una misurazione assoluta, diversamente da quella che si esegue mediante uno spettroscopio a prisma, il quale, come si è visto, abbisogna di una taratura.

Il passo di un reticolo può anche essere misurato mediante lo spettroscopio, disponendo di una sorgente luminosa che emette un spettro noto, ed il valore trovato può essere utilizzato per misurare altre lunghezze d'onda.

In questa seconda ipotesi si tratta dunque di misurare gli angoli  $\vartheta$  in corrispondenza di  $\lambda$  note, per valori di  $m$  fissati, e di determinare  $d$  ad esempio come coefficiente angolare della retta che si ottiene in un grafico in cui si riportino in ordinate  $m \lambda$  ed in ascisse  $\sin \vartheta$ .

Preliminarmente è però necessario disporre il reticolo nella posizione alla quale si riferisce l'usuale formulazione dell'equazione dei massimi principali, e cioè in condizione di incidenza normale. Ciò significa che il piano del reticolo deve essere normale alla direzione in cui si propagano le onde luminose uscenti dal collimatore.

La disposizione voluta si può ottenere con quattro passi successivi, schematizzati in fig. 10

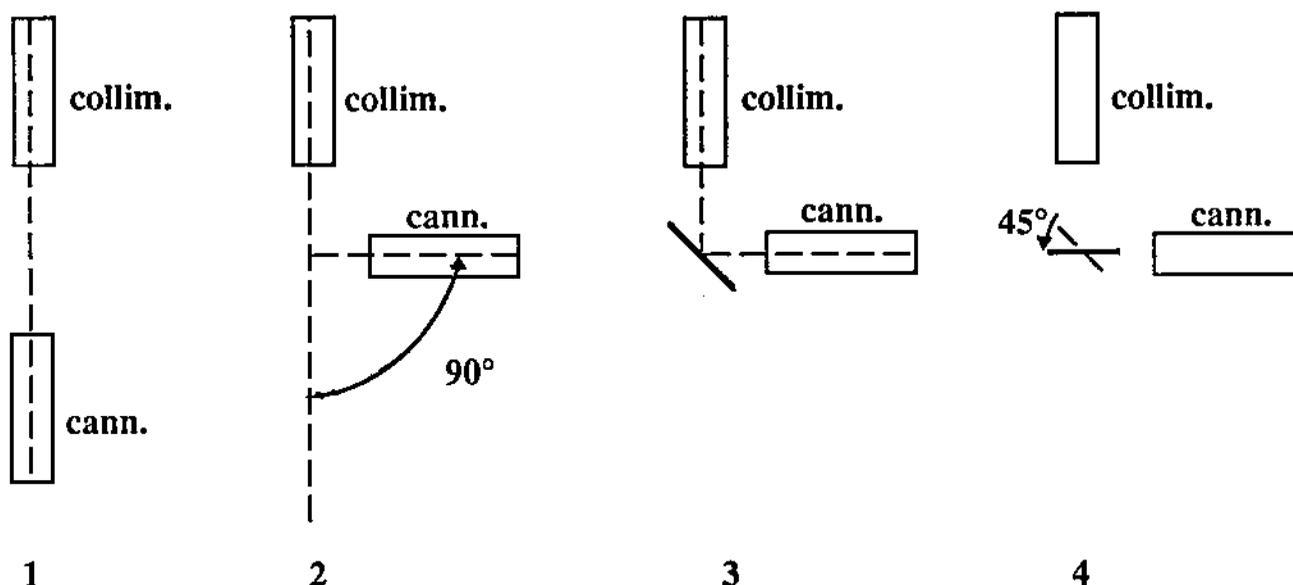


Fig. 10

1- Senza reticolo sulla piattaforma, si dispone il cannocchiale coassialmente col collimatore, in modo cioè da centrare l'immagine della fenditura.

2. Si ruota il cannocchiale di  $90^{\circ}00'00''$  rispetto alla posizione precedente.

3. Si dispone il reticolo sulla piattaforma e ruotando la medesima si fa in modo che l'immagine della fenditura, per riflessione sul piano del reticolo, risulti centrata dal

cannocchiale, fermo nella posizione precedente. In tal modo, il piano del reticolo forma angoli di  $45^\circ$  sia con l'asse del collimatore che con quello del cannocchiale.

4. Si ruota la piattaforma di  $45^\circ 00' 00''$  rispetto alla posizione precedente, in modo da portare il reticolo in condizioni di incidenza normale.

## APPENDICE 1

### Condizione affinché il raggio rifratto emerga dal prisma

Con riferimento alla fig. 10 si ha, come si è visto,

$$\alpha = \varphi_1' + \varphi_2' \quad \text{e} \quad \delta = \varphi_1 + \varphi_2 - \alpha$$

La condizione affinché esista un raggio emergente è espressa dalla disuguaglianza

$$\varphi_2' < \varphi_l$$

essendo  $\varphi_l$  l'angolo limite relativo al passaggio del raggio luminoso considerato dalla sostanza di cui è costituito il prisma alla sostanza che circonda quest'ultimo (aria). La precedente disuguaglianza equivale alla

$$\alpha - \varphi_1' < \varphi_l \quad , \quad \text{da cui}$$

$$\varphi_1' > \alpha - \varphi_l \quad \text{e quindi,}$$

poichè il seno è funzione crescente dell'angolo tra 0 e  $\pi/2$

$$\text{sen } \varphi_1' > \text{sen}(\alpha - \varphi_l)$$

Essendo inoltre, per la legge della rifrazione,

$$n \text{sen } \varphi_l = n' \text{sen } \varphi_1' ,$$

l'ultima disuguaglianza diviene

$$\text{sen } \varphi_1' > \frac{n'}{n} \text{sen}(\alpha - \varphi_l)$$

la quale, poichè  $\text{sen } \varphi_l = \frac{n}{n'}$ ,

può anche essere scritta

$$\text{sen } \varphi_1' > \frac{\text{sen}(\alpha - \varphi_l)}{\text{sen } \varphi_l} \quad (*)$$

Si ha infine

$$\varphi_1 > \arcsen\left[\frac{n'}{n}\text{sen}(\alpha - \varphi_1)\right]$$

Supponendo che il prisma, di vetro, sia circondato dall'aria, si può assumere

$$\frac{n'}{n} \cong 1,5 \quad \text{e} \quad \varphi_1 \cong 42^\circ \quad \text{Se } \alpha = 60^\circ, \text{ si ottiene}$$

$$\varphi_1 > 27^\circ$$

Inoltre, poichè dalla (\*) segue  $\frac{\text{sen}(\alpha - \varphi_1)}{\text{sen}\varphi_1} < 1$ , si ottiene la condizione

$$\alpha < 2\varphi_1$$

per l'ampiezza dell'angolo di apertura del prisma.

## APPENDICE 2

### Potere dispersivo del prisma

Il potere dispersivo  $D$  del prisma è definito dalla relazione

$$D = \left| \frac{d\delta}{d\lambda} \right|$$

in cui  $d\lambda$  è la differenza di lunghezza d'onda di due radiazioni monocromatiche le quali incidono sul prisma con lo stesso angolo, e  $d\delta$  è la differenza tra gli angoli di deviazione corrispondenti.

Ne segue, essendo  $\varphi_1 = \text{cost}$  e  $\delta = \varphi_1 + \varphi_2 - \alpha$ ,

$$d\delta = d\varphi_2.$$

Applicando la legge di Snell e indicando con  $n_1 \left( = \frac{n'}{n} \right)$  l'indice di rifrazione relativo della sostanza di cui è fatto il prisma rispetto a quella in cui il prisma è immerso, si ha

$$\text{sen } \varphi_1 = n_1 \text{ sen } \varphi_1' \quad \text{e} \quad n_1 \text{ sen } \varphi_2' = \text{sen } \varphi_2$$

differenziando le quali si ha, rispettivamente,

$$0 = dn_1 \text{ sen } \varphi_1' + n_1 \cos \varphi_1' d\varphi_1' \quad (\text{A})$$

$$\text{e} \quad dn_1 \cdot \text{sen } \varphi_2' + n_1 \cos \varphi_2' d\varphi_2' = \cos \varphi_2 d\varphi_2. \quad (\text{B})$$

Dalla relazione (A) si ricava

$$n_1 \cos \varphi_1' d\varphi_1' = -dn_1 \text{ sen } \varphi_1' \quad (\text{C})$$

essendo inoltre  $\alpha = \varphi_1' + \varphi_2'$  per cui  $d\varphi_1' = -d\varphi_2'$  e, in prossimità della condizione di deviazione minima,

$$\varphi_1' \cong \varphi_2' \cong \frac{\alpha}{2} \quad (\text{D})$$

sostituendo nella (C) si ottiene

$$-n_1 \cos \varphi_2' d\varphi_2' \cong -dn_1 \text{ sen } \varphi_1'.$$

Sostituendo ora nella (B) il termine  $n_1 \cos \varphi_2' d\varphi_2'$  si ottiene

$$dn_1 \text{ sen } \varphi_2' + dn_1 \text{ sen } \varphi_1' \cong \cos \varphi_2 d\varphi_2$$

ossia, reintroducendo l'approssimazione (D),

$$2dn_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \cos \varphi_2 d\varphi_2,$$

da cui

$$d\varphi_2 = d\delta = \frac{2\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \varphi_2} dn_1.$$

Per il potere dispersivo del prisma si ottiene dunque l'espressione

$$D = \left| \frac{d\delta}{d\lambda} \right| \cong \frac{2\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \varphi_2} \left| \frac{dn_1}{d\lambda} \right|$$

che, esprimendo opportunamente  $\cos \varphi_2$ , cioè

$$\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi_2} = \sqrt{1 - n_1^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \sim \sqrt{1 - n_1^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

assume la forma

$$D = \left| \frac{d\delta}{d\lambda} \right| \cong \frac{2\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - n_1^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}} \left| \frac{dn_1}{d\lambda} \right|$$

la quale ne mette in evidenza la dipendenza dall'angolo di apertura e dalla pendenza della curva di dispersione del mezzo di cui il prisma è costituito.

Tale pendenza, come è noto, decresce dal violetto verso il rosso.

Universita' ■ La Sapienza ■  
Dipartimento di Fisica

Appunti delle lezioni  
di  
Esperimentazione di Fisica

Misure in Corrente alternata

Proff/ri Alessio / Improta

## 1. Reti elettriche in regime sinusoidale

In questo capitolo sono studiate le proprietà delle reti elettriche in regime sinusoidale, che si realizza quando gli elementi attivi (generatori di tensione o di corrente) forniscono segnali che sono funzioni sinusoidali del tempo durante un intervallo di durata molto maggiore del periodo dei segnali medesimi.

Lo studio che di tali reti verrà svolto riguarda esclusivamente il "regime stazionario", vale a dire la situazione che si viene a creare quando sono esauriti tutti i fenomeni transitori, come quelli che si verificano in corrispondenza di apertura e chiusura di un circuito.

A tale scopo saranno impiegati metodi formali di calcolo che consentono di ridurre la trattazione all'applicazione di leggi lineari formalmente analoghe a quelle già impiegate nello studio delle reti lineari in regime di correnti continue e stazionarie.

### 1.1 Generalità sulle grandezze periodiche

Si definisce grandezza periodica una grandezza  $a(t)$ , funzione di una variabile  $t$ , per la quale si ha, per ogni  $t$ ,

$$a(t) = a(t+nT)$$

in cui la costante  $T$  prende il nome di periodo e  $n$  è un numero intero (v. fig. 1).

Nella relazione precedente la variabile  $t$ , continua, può essere una qualunque grandezza; nello studio delle grandezze elettriche essa è la variabile tempo.

Come è noto, si chiama frequenza la grandezza

$$\nu = \frac{1}{T}$$

e pulsazione la grandezza

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

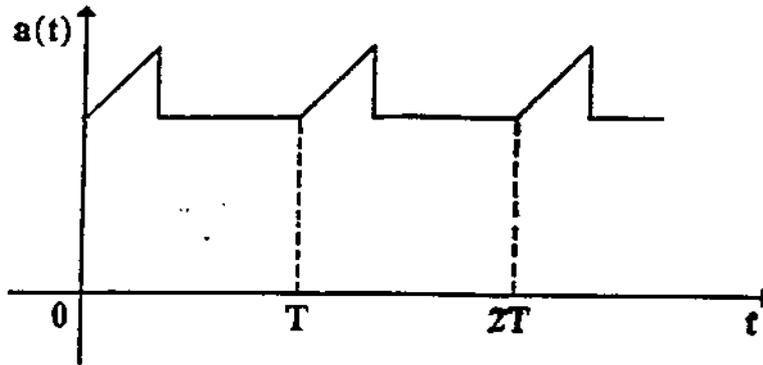


fig. 1

Si definisce valore medio di una grandezza periodica

$$A_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a(t') dt'$$

e valore quadratico medio

$$A_{qm} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} a^2(t') dt'}$$

Si definisce grandezza alternata una grandezza periodica il cui valor medio è nullo (v. fig. 2)

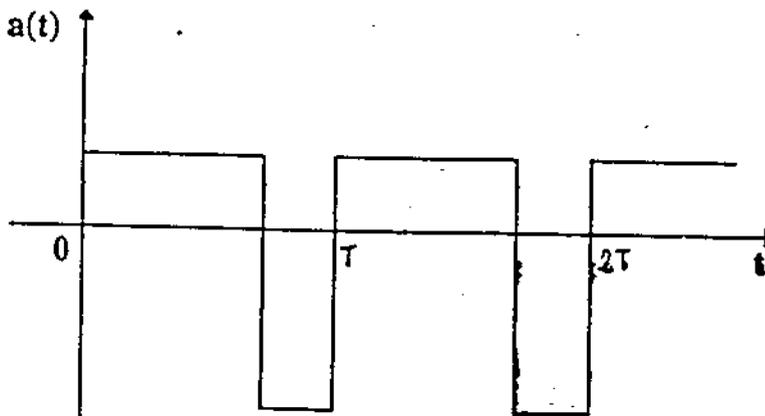


fig. 2

Dalla definizione segue che, fissato un intervallo di tempo uguale ad un periodo, l'integrale della grandezza relativo all'insieme dei punti in cui essa assume valori positivi è

opposto a quello relativo all'insieme dei punti in cui essa assume valori negativi.

Una grandezza sinusoidale è una grandezza alternata del tipo

$$a(t) = A \sin(\omega t + \psi) \quad (\text{v. fig.3})$$

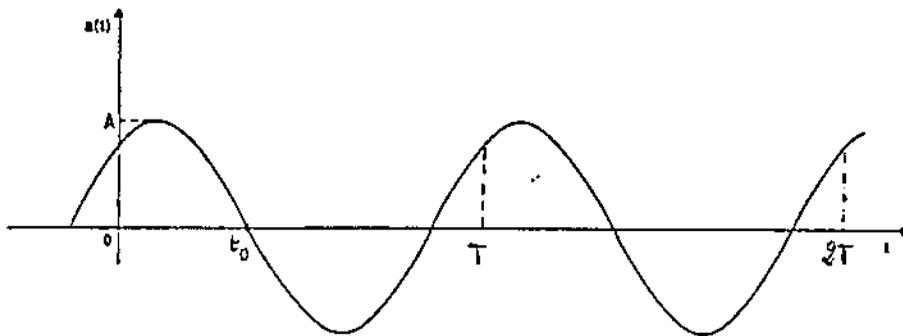


fig. 3

in cui il valore massimo  $A$  prende il nome di ampiezza e  $\psi$  quello di fase iniziale ( $-\pi < \psi \leq \pi$ ).

Essendo  $t_0$  l'intervallo di tempo trascorso da  $t=0$  quando la grandezza  $a(t)$  si annulla per la prima volta, si ha

$$\psi = \omega t_0 \quad \text{oppure} \quad \psi = -\omega t_0$$

a seconda che, rispettivamente, sia

$$\left[ \frac{da(t)}{dt} \right]_{t=t_0} < 0 \quad \text{oppure} \quad \left[ \frac{da(t)}{dt} \right]_{t=t_0} > 0.$$

Se  $a(0)=0$ , si ha

$$\psi = 0 \quad \text{oppure} \quad \psi = \pi$$

a seconda che, rispettivamente, sia

$$\left[ \frac{da(t)}{dt} \right]_{t=0} > 0 \quad \text{oppure} \quad \left[ \frac{da(t)}{dt} \right]_{t=0} < 0.$$

In fig.4 sono riportati i casi particolari:

$$a(0)=0, \quad \psi = 0 \quad (\text{curva 1})$$

$$t_0 = \frac{T}{4}, \quad \psi = \frac{\pi}{2} \quad (\text{curva 2})$$

$$t_0 = -\frac{T}{4}, \quad \psi = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{curva 3})$$

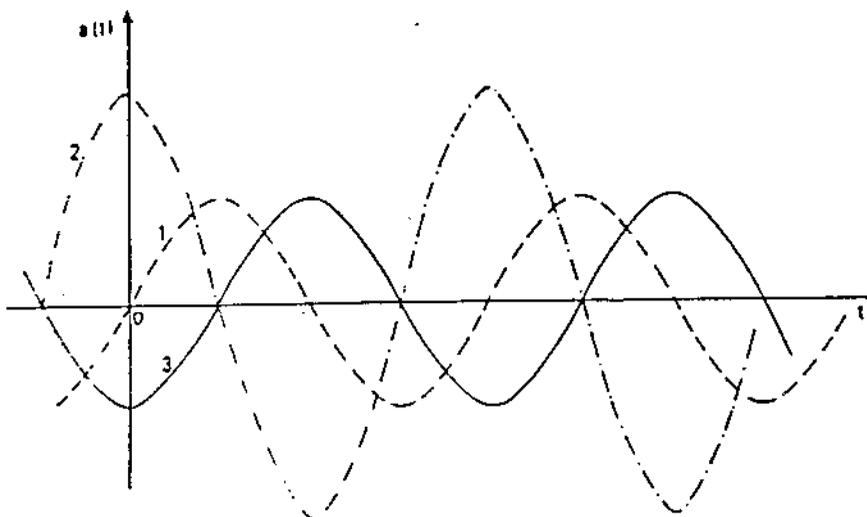


fig. 4

Si suole dire che rispetto alla grandezza rappresentata dalla curva 1, quella rappresentata dalla curva 2 è in anticipo di fase di  $\frac{\pi}{2}$  e quella rappresentata dalla curva 3 è in ritardo di  $\frac{\pi}{2}$ ; la 2 e la 3 si dicono in "opposizione di fase".

Nel caso di una grandezza sinusoidale il valore quadratico medio

ha il valore:

$$A_{qm} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} A^2 \sin^2(\omega t' + \psi) dt'} = \frac{1}{\sqrt{2}} A$$

mentre il valore medio della sola semionda positiva è

$$A'_m = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} A \sin(\omega t' - \psi) dt' = \frac{2}{\pi} A$$

(v. fig. 5)

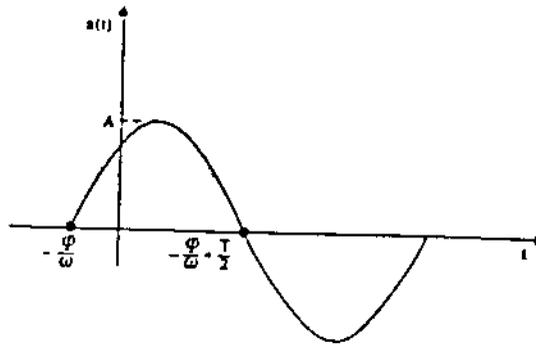


fig. 5

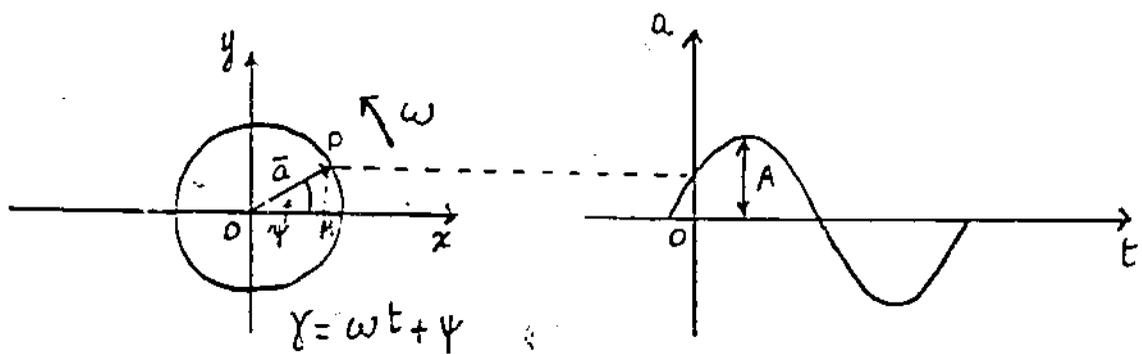


fig. 6

Se la grandezza sinusoidale rappresenta una intensità di corrente o una differenza di potenziale il valore quadratico medio prende il nome di "valore efficace" ( $A_{eff}$ ).

## 1.2 Rappresentazione simbolica di una grandezza sinusoidale

Ad ogni grandezza sinusoidale  $a(t) = A \sin(\omega t + \psi)$ , caratterizzata dalle costanti  $A, \omega, \psi$ , può essere associato un vettore applicato  $\vec{a}(t)$  di modulo  $A$ , rotante in senso antiorario in un piano  $xy$  intorno al proprio punto di applicazione (che per comodità può essere scelto nell'origine  $O$  degli assi) con velocità angolare  $\omega$  e tale da formare con l'asse  $x$  l'angolo  $\psi$  nell'istante  $t = 0$ .

La corrispondenza tra grandezza sinusoidale e vettore rotante (rappresentazione vettoriale) è biunivoca e tale che la componente del vettore secondo l'asse  $y$  ad un certo istante coincide con il valore della grandezza sinusoidale nello stesso istante (vedi fig. 6 pag. 4 b'5)

Nel caso in cui si abbiano  $n$  grandezze sinusoidali della stessa frequenza vale la seguente proprietà:

la combinazione lineare di  $n$  grandezze sinusoidali mediante  $n$  costanti reali è una grandezza sinusoidale della stessa frequenza che ha come corrispondente il vettore ottenuto dalla combinazione lineare degli  $n$  vettori corrispondenti con le medesime costanti;

$$\sum_{k=1}^n c_k a_k(t) \iff \sum_{k=1}^n c_k \vec{a}_k(t)$$

Nel caso di più grandezze isofrequenziali delle quali interessino le relazioni reciproche di ampiezza e di fase, la loro rappresentazione vettoriale è costituita da un insieme di vettori rotanti la cui posizione reciproca non varia nel tempo; ciascuna grandezza sinusoidale potrà allora essere associata ad un vettore statico applicato in  $O$ , con la direzione che ad esso compete in un qualsiasi fissato istante identico per tutti. Scegliendo in particolare come istante di riferimento  $t = 0$ , l'angolo formato

da ciascun vettore con l'asse x è proprio la fase della corrispondente grandezza sinusoidale. (vedi fig. 7)

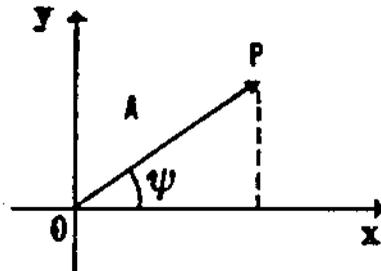


fig. 7

In questa rappresentazione l'ampiezza e la fase della somma di più grandezze sinusoidali sono ordinatamente rappresentate dal modulo del vettore risultante dei vettori statici corrispondenti e dall'angolo che esso forma con l'asse x.

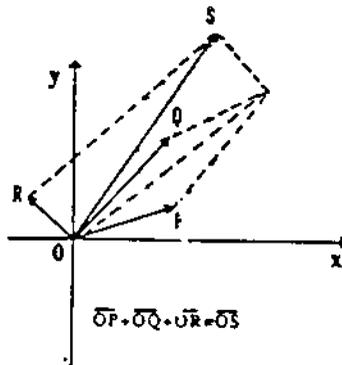


fig. 8

Ad ogni vettore del piano reale applicato nell'origine si può associare, come è noto, un numero complesso avente come parte reale  $a_x$  e coefficiente dell'immaginario  $a_y$  rispettivamente le componenti del vettore secondo l'asse x e l'asse y. Tale numero complesso, che si suole per semplicità indicare con lo stesso simbolo del vettore rotante, si scrive in forma trigonometrica

$$\vec{a} = a_x + j a_y \quad \text{essendo} \quad j = \sqrt{-1}$$

Pertanto ad ogni grandezza sinusoidale si può far corrispondere

(rappresentazione simbolica) un numero complesso il cui coefficiente dell'immaginario fornisce il valore istantaneo della grandezza.

Ne seguono le relazioni

$$|\bar{a}| = A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan \gamma = \frac{a_y}{a_x}$$

Essendo

$$a_x = A \cos \gamma = A \cos(\omega t + \psi)$$

$$a_y = A \sin \gamma = A \sin(\omega t + \psi)$$

si ha:

$$\bar{a} = A [\cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)]$$

Utilizzando le formule di Eulero si può scrivere:

$$\bar{a} = A e^{j(\omega t + \psi)} = A e^{j\omega t} e^{j\psi} = \bar{A} e^{j\omega t}$$

avendo posto

$$Ae^{j\psi} = \bar{A} \text{ (ampiezza complessa).}$$

Ad una grandezza sinusoidale di fissata frequenza si associa pertanto la sua ampiezza complessa, cioè un numero complesso il cui modulo e il cui argomento sono rispettivamente l'ampiezza e la fase della grandezza.

### 1.3 Derivata di una grandezza sinusoidale

La rappresentazione simbolica di una grandezza sinusoidale semplifica notevolmente le operazioni elementari su grandezze sinusoidali. Essa consente inoltre, nella sua forma esponenziale, di conseguire il seguente risultato, particolarmente utile ai fini del presente corso: la derivazione temporale conserva la corrispondenza.

Sia  $a(t) = A \sin(\omega t + \psi)$  una grandezza sinusoidale e

$$\bar{a}(t) = A e^{j\psi} e^{j\omega t}$$

la grandezza simbolica corrispondente. Si ha

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = j\omega A e^{j\psi} e^{j\omega t} = \omega A e^{j(\psi + \frac{\pi}{2})} e^{j\omega t}$$

La grandezza simbolica così ottenuta è corrispondente ad una grandezza sinusoidale della stessa frequenza, di ampiezza  $\omega A$  e di fase  $\psi + \frac{\pi}{2}$ . Tale grandezza è proprio quella che si ottiene come derivata temporale di  $a(t)$ .

Si ha infatti

$$\frac{da(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \psi) = A\omega \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

In forma sintetica si può scrivere la relazione

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = j\omega \bar{a}(t) \quad (1)$$

La  $d\bar{a}(t)/dt$  rappresenta pertanto una grandezza sinusoidale di ampiezza  $\omega A$  e in anticipo di fase di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto ad  $\bar{a}(t)$ .

#### 1.4 Integrale di una grandezza sinusoidale

La (1) stabilisce una relazione tra grandezze sinusoidali di uguale frequenza una delle quali è la derivata temporale dell'altra. Inversamente ricavando dalla (1)

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{j\omega} \frac{d\bar{a}(t)}{dt}$$

risulta che  $\bar{a}(t)$  è la primitiva di  $d\bar{a}(t)/dt$  che rappresenta una grandezza sinusoidale di uguale frequenza ed è pertanto assunta come

$$\bar{a}(t) = \int \frac{d\bar{a}(t)}{dt} dt$$

Si noti che l'operazione formale di integrazione equivale a dividere la  $d\bar{a}(t)/dt$  per l'operatore immaginario  $j\omega$ . Si può pertanto concludere che, data una grandezza sinusoidale  $a(t)$  di fissata frequenza, si ha:

$$\int \bar{a}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \bar{a}(t)$$

$\int \bar{a}(t) dt$  rappresenta quindi una grandezza sinusoidale di ampiezza

$\frac{A}{\omega}$ , in ritardo di fase di  $\pi/2$  rispetto ad  $\bar{a}(t)$ .

#### 1.5 Relazioni tra tensione e corrente nei circuiti in regime sinusoidale.

Le precedenti considerazioni, relative alla rappresentazione simbolica di una grandezza sinusoidale, consentono di estendere ai circuiti in regime sinusoidale le leggi generali (ed i teoremi da essi derivati) nella stessa forma nella quale sono espresse nel caso in cui i circuiti siano percorsi da correnti continue e stazionarie. Come già detto, si ricorda che con tale formalismo è possibile descrivere la situazione delle reti soltanto in regime stazionario, cioè quando siano esauriti i fenomeni transitori che

si verificano nelle condizioni di apertura e chiusura dei circuiti. Inoltre saranno considerati soltanto i casi in cui tutti i generatori presenti forniscano segnali sinusoidali di uguale frequenza. In tali condizioni in ogni ramo di una rete circola una corrente sinusoidale di ampiezza, frequenza e fase determinate.

### 1.5.1 Principi di Kirchhoff

#### 1° Principio

Come nel caso della corrente continua, il principio di continuità della corrente può essere enunciato nel modo seguente:

in un nodo in cui confluiscono  $n$  correnti sinusoidali tutte di pulsazione  $\omega$  e di valore istantaneo  $i_k(t) = I_k \text{sen}(\omega t + \beta_k)$ , si ha per ogni istante  $t$

$$\sum_k i_k(t) = 0.$$

Nella rappresentazione simbolica la precedente equazione si scrive:

$$\sum_k I_k e^{j\omega t + j\beta_k} = e^{j\omega t} \sum_k I_k e^{j\beta_k} = 0$$

Essendo  $e^{j\omega t} \neq 0$ , ne segue:

$$\sum_k I_k e^{j\beta_k} = \sum_k \bar{I}_k = 0 \quad (2)$$

L'equazione (2) va così intesa:

fissato in modo arbitrario un verso di percorrenza cui associare convenzionalmente un segno (p.es. positivo per le correnti entranti nel nodo) e fissate inoltre arbitrariamente le origini dei tempi, la fase  $\beta_k$  di ogni singola corrente è tale da fornire ad ogni istante il segno della  $i_k(t)$  che, in base alla convenzione fatta, indica l'effettivo verso di percorrenza della corrente.

## 2° Principio

In un qualsiasi percorso chiuso costituito da  $n$  elementi, attivi o passivi, ove  $v_k(t) = V_k \text{sen}(\omega t + \alpha_k)$ , stabilito un certo verso di percorrenza, è la tensione istantanea ai capi del generico elemento (supposto che i generatori abbiano tutti la stessa pulsazione  $\omega$ ), si ha:

$$\sum_{k=1}^n v_k(t) = 0$$

Nella rappresentazione simbolica si può scrivere:

$$\sum_{k=1}^n V_k e^{j\omega t} e^{j\alpha_k} = e^{j\omega t} \sum_{k=1}^n V_k e^{j\alpha_k} = 0$$

da cui

$$\sum_{k=1}^n V_k e^{j\alpha_k} = \sum_{k=1}^n \bar{V}_k = 0$$

### 1.5.2 Relazioni tra tensione e corrente per elementi passivi ideali

Gli elementi passivi di circuito che si considerano sono resistori, induttori e condensatori; essi si possono ritenere ideali se valgono per essi rispettivamente, qualunque sia l'andamento temporale della tensione ai loro capi, le relazioni

$$v(t) = R i(t), \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v(t_0) \quad (3)$$

dove le grandezze  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , sono costanti indipendenti dalle ampiezze e dalle caratteristiche della  $v(t)$ .

Nel caso in cui  $v(t)$  sia un segnale sinusoidale di tensione di ampiezza  $V$ , pulsazione  $\omega$  e fase  $\alpha$ , cioè

$$v(t) = V \sin(\omega t + \alpha)$$

applicato ai capi dei singoli elementi, in condizioni stazionarie essi sono percorsi dalla corrente

$$i(t) = I \sin(\omega t + \beta)$$

In forma simbolica si ha:

$$\bar{v}(t) = V e^{j(\omega t + \alpha)} = V e^{j\alpha} e^{j\omega t} = \bar{V} e^{j\omega t}$$

$$\bar{i}(t) = I e^{j(\omega t + \beta)} = I e^{j\beta} e^{j\omega t} = \bar{I} e^{j\omega t}$$

e, per le relazioni (3)

$$\bar{V}_R = R\bar{I}, \quad \bar{V}_L = j\omega L\bar{I}, \quad \bar{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}$$

Per un resistore ideale si ha quindi  $\bar{V}_R e^{j\alpha} = R\bar{I} e^{j\beta}$ , da cui

$$\begin{cases} V_R = RI \\ \alpha = \beta \end{cases}$$

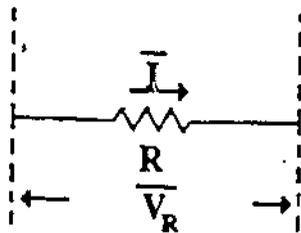


fig. 9a

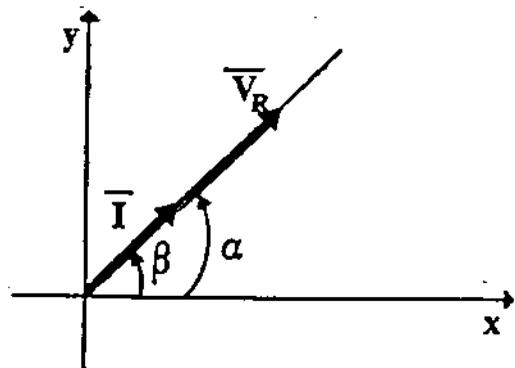


fig. 9b

di conseguenza è nullo lo sfasamento

$\varphi = \alpha - \beta$  tra tensione e corrente.

Ricordando che

$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} \pm j\sin\frac{\pi}{2} = \pm j$$

si ha inoltre per un induttore ideale

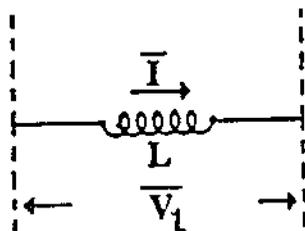


fig. 9c

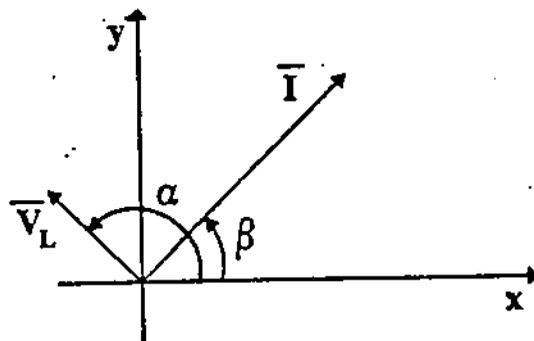


fig. 9d

$$V_L e^{j\alpha} = j\omega LI e^{j\beta}$$

ossia

$$V_L e^{j\alpha} = \omega LI e^{j(\beta + \frac{\pi}{2})}$$

, da cui

$$\begin{cases} V_L = \omega LI \\ \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\varphi = \frac{\pi}{2}) ;$$

per un condensatore ideale:

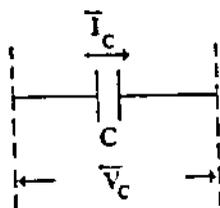


fig. 9e

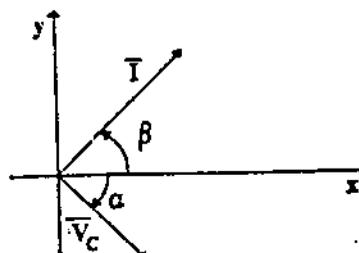


fig. 9f

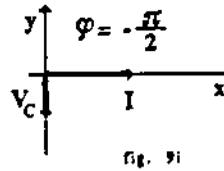
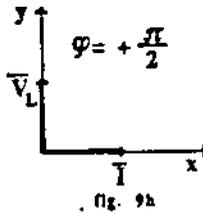
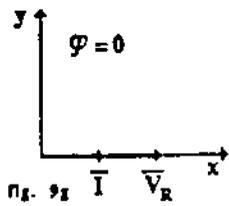
$$V_C e^{j\alpha} = -j \frac{1}{\omega C} I e^{j\beta}$$

ossia

$$V_C e^{j\alpha} = \frac{1}{\omega C} I e^{j(\beta - \frac{\pi}{2})} \quad , \quad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} V_C = \frac{1}{\omega C} I \\ \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\varphi = -\frac{\pi}{2})$$

Se la fase della corrente è nulla si ha:



### 1.5.3 Impedenza

Si consideri un generico elemento passivo ideale percorso dalla corrente  $i(t)$  quando ai suoi capi sia applicata la ddp sinusoidale  $v(t)$ .

Sia  $\bar{v}(t) = V e^{j\alpha} e^{j\omega t}$ , e  $\bar{i}(t) = I e^{j\beta} e^{j\omega t}$ ;

si consideri il rapporto

$$\frac{\bar{v}(t)}{\bar{i}(t)} = \frac{V e^{j\omega t}}{I e^{j\omega t}} = \frac{V}{I} = \frac{V e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \frac{V}{I} e^{j\varphi}$$

Tale rapporto, come si vede, è un numero complesso, indipendente dal tempo, il cui modulo è il rapporto delle ampiezze  $V$  e  $I$  della tensione e della corrente e la cui anomalia è la differenza delle rispettive fasi.

Posto  $Z = \frac{V}{I}$  si definisce quindi impedenza complessa di un elemento ideale la grandezza

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi} = \frac{V}{I}$$

Per quanto visto nel par. 1.5.2 si hanno le seguenti

espressioni di  $\bar{Z}$  per i tre elementi passivi ideali:

$$\bar{Z}_R = R, \quad \bar{Z}_L = j\omega L, \quad \bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

e quindi, rispettivamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_R = R \\ \varphi = 0 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_L = \omega L \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_C = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Si noti che  $Z_L$  e  $Z_C$  dipendono dalla frequenza della tensione applicata. Si osservi inoltre che la definizione di impedenza complessa consente di scrivere la relazione tra le ampiezze complesse della tensione ai capi di un elemento ideale in regime sinusoidale e della corrente che lo percorre come

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I} \quad (4)$$

relazione formalmente analoga all'espressione della legge di Ohm per tensioni e correnti continue e stazionarie.

La (4) esprime la "legge di Ohm in regime sinusoidale".

#### 1.5.4 Impedenza equivalente di una rete passiva.

Si consideri una rete passiva costituita da elementi ideali comunque connessi; scelti due qualsiasi punti A e B della rete si definisce impedenza complessa equivalente della rete vista da A e B il rapporto

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$$

in cui  $\bar{V}$  è l'ampiezza complessa della tensione sinusoidale applicata tra A e B mediante un generatore ideale di tensione e  $\bar{I}$  l'ampiezza complessa della intensità della corrente da esso erogata.

L'impedenza equivalente di una rete in regime sinusoidale è dunque un numero complesso che si suole scrivere nella forma trigonometrica

$$\bar{Z}_{eq} = R + jX$$

in cui  $R$  è la componente reale e  $X$ , coefficiente dell'immaginario, viene usualmente chiamato reattanza. Si ha quindi

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ e } \tan \varphi = \frac{X}{R}$$

essendo  $\varphi$  l'anomalia di  $\bar{Z}_{eq}$ .

Si suole chiamare ammettenza  $\bar{Y}$  il reciproco  $1/\bar{Z}$  dell'impedenza; nel caso di una rete passiva l'ammettenza è un numero complesso e si può scrivere

$$\bar{Y} = G + jS$$

ove  $G$  si chiama conduttanza e  $S$  suscettanza.

Si ha quindi:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \text{ , } S = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

Si ha ovviamente

$$\arctan \frac{S}{G} = -\varphi.$$

La precedente definizione operativa di impedenza equivalente consente di determinare tale grandezza anche se sono incogniti gli elementi che costituiscono la rete e se di essa non è nota la configurazione.

Qualora invece siano noti i singoli elementi e si conosca la configurazione della rete, è possibile esprimere l'impedenza equivalente in funzione delle impedenze degli elementi

costituenti.

Si deducono ora le espressioni della impedenza equivalente nei due fondamentali casi particolari in cui gli elementi passivi siano in serie o in parallelo.

a) Serie

siano  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_n$  le impedenze complesse di n elementi passivi connessi in serie (v. fig. 10)

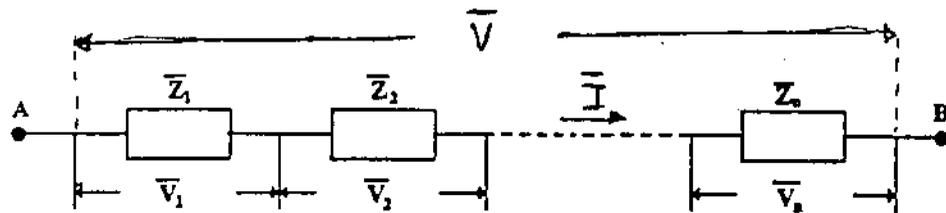


fig. 10

Si ha:

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n}{\bar{I}} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_n$$

b) Parallelo

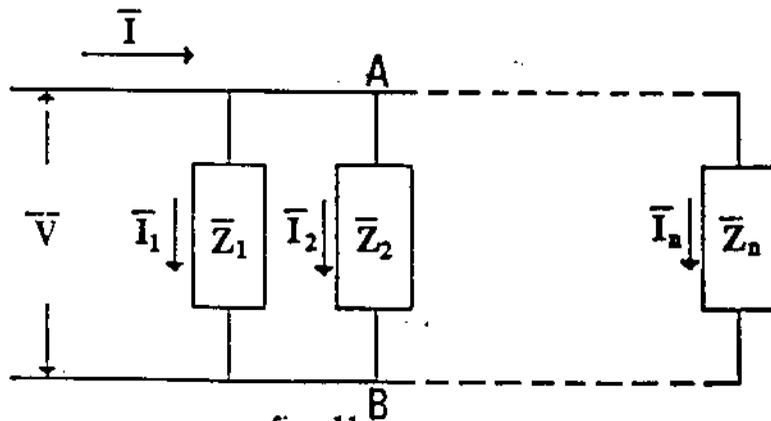


fig. 11

Si ha per definizione  $\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$

da cui

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{I}{V} = \frac{I_1 + I_2 + \dots + I_n}{V} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

che si può scrivere

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

essendo  $\bar{Y}_k$  l'ammettenza del ramo k-mo.

Si precisa che la relazione  $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n$  non è in contraddizione con il 1° principio di Kirchhoff in quanto il verso delle correnti è relativo a quello della differenza di potenziale, assunto p. es. positivo in A e negativo in B.

In questo caso, pertanto, i segni positivi delle  $\bar{I}_k$  indicano correnti uscenti dal nodo mentre per la corrente  $\bar{I}$  il segno positivo indica che entra nel nodo.

### 1.5.5 Esempi di risoluzione di circuiti

Si propone a titolo di esempio lo studio di alcuni semplici circuiti nei quali mediante l'applicazione del metodo simbolico si determinano le relazioni tra le tensioni ai capi dei vari elementi e le correnti che li percorrono; è inoltre eseguita la corrispondente rappresentazione vettoriale.

Es. 1

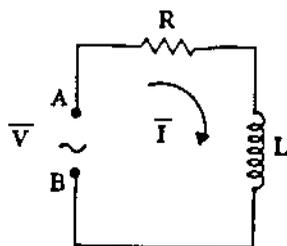


fig. 12a

$$\bar{Z}_{AB} = R + j\omega L$$

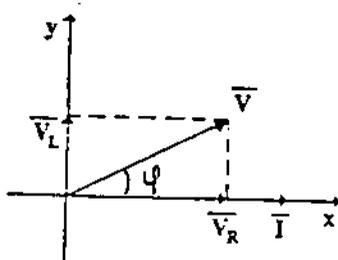


fig. 12b

$$I = \frac{V}{R + j\omega L}$$

$$V_R = \bar{I}R = V \frac{R}{R + j\omega L}$$

$$V_L = I j\omega L = V \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

Es. 2

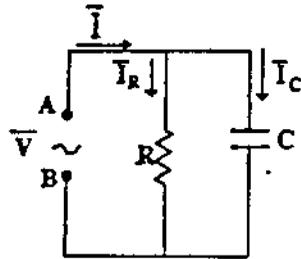


fig. 13a

$$Y_{AB} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

$$I = V \left( \frac{1}{R} + j\omega C \right)$$

$$I_R = V \frac{1}{R}$$

$$I_C = V j\omega C$$

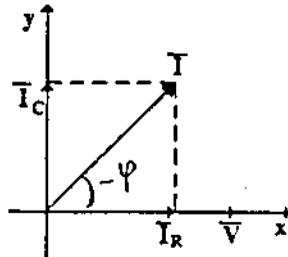


fig. 13b

$$\varphi = -\arctan \omega RC$$

Es. 3

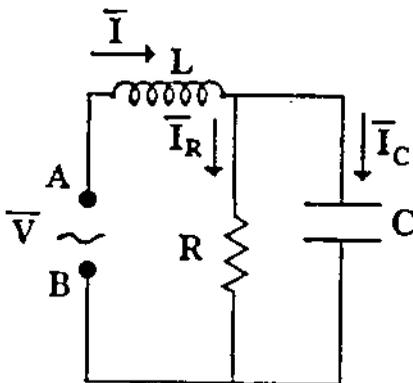


fig. 14a

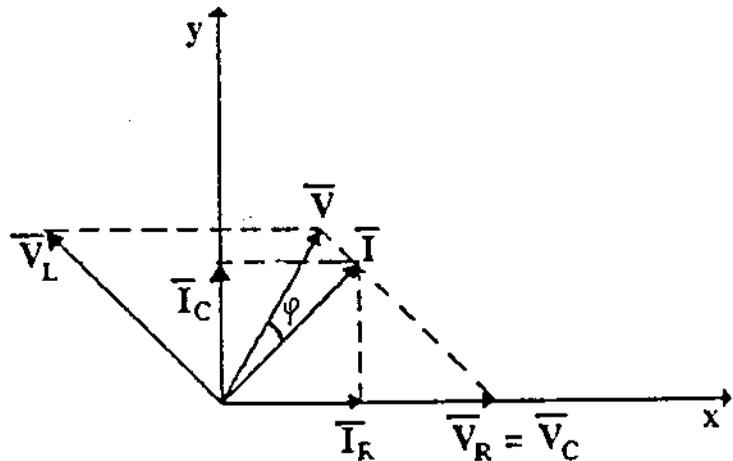


fig. 14b

$$\bar{Z}_{AB} = j\omega L + \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j[\omega L + \omega L(\omega RC)^2 - \omega R^2 C]}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$I = V \frac{1 + (\omega RC)^2}{R + j[\omega L + \omega L(\omega RC)^2 - \omega R^2 C]}$$

$$\bar{V}_L = j\omega L \bar{I} \quad \bar{I}_R = \bar{I} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} ; \bar{I}_C = \bar{I} \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\bar{V}_R = \bar{V}_C = \frac{\bar{I} R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L + \omega L(\omega RC)^2 - \omega R^2 C}{R}$$

### 1.5.6 Teoremi di Thevenin e di Norton

Si è già visto nel caso della corrente continua che i teoremi di Thevenin e di Norton sono conseguenza della linearità delle relazioni tra cadute di potenziale e intensità di corrente (legge di Ohm e principi di Kirchhoff).

Tale linearità, come si è visto, è valida anche nel caso dei circuiti in regime sinusoidale stazionario purché ci si riferisca all'ampiezza complessa di tensioni e correnti. Pertanto, con procedimento formalmente analogo a quello seguito nel caso della corrente continua, si ricavano i seguenti risultati:

#### a- Teorema di Thevenin:

data una rete costituita da elementi attivi e passivi, ove per elementi attivi si intendono generatori isofrequenziali, e fissati due punti A e B di essa, la rete stessa, vista da tali punti, è equivalente a un generatore ideale di tensione  $\bar{V}_0$  della stessa frequenza avente in serie un elemento passivo di impedenza  $\bar{Z}_0$  (vedi fig. 15).

$\bar{V}_0$  è la tensione esistente a vuoto tra i due punti considerati;  $\bar{Z}_0$  è l'impedenza equivalente della rete passiva vista dagli stessi punti a condizione che ciascun generatore sia sostituito con la propria impedenza interna.

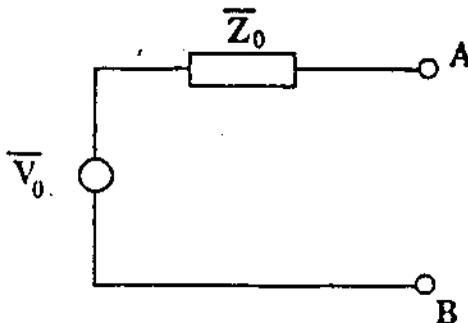
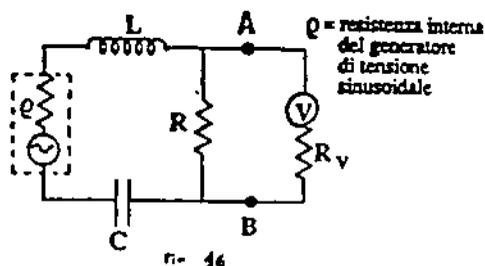


fig. 15

Come esempio si consideri il caso in cui si voglia misurare la differenza di potenziale tra i punti A e B del circuito riportato in fig. 16 utilizzando un voltmetro la cui impedenza interna possa, con buona approssimazione, ritenersi puramente ohmica.



Supposto che sia  $\bar{V}_0$  la ddp esistente tra i punti A e B e  $\bar{V}_V$  quella misurata dallo strumento, sussiste la relazione

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_V \left( 1 + \frac{\bar{Z}_0}{R_V} \right)$$

Essendo

$$\bar{Z}_0 = \frac{R \left[ \rho + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{R + \rho + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

risulta

$$\begin{aligned} \bar{V}_0 &= \bar{V}_V \left( 1 + \frac{R \left[ \rho + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{\left[ R + \rho + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] R_V} \right) = \\ &= \bar{V}_V \frac{R R_V + \rho R_V + j R_V \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + R \rho + j R \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{\left[ R + \rho + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] R_V} = \end{aligned}$$

$$= V_V \frac{RR_V + \rho R_V + R\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})(R + R_V)}{[R + \rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]R_V}$$

da cui

$$V_o = V_V \frac{\sqrt{(RR_V + \rho R_V + R\rho)^2 + (R + R_V)^2(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}{R_V \sqrt{(R + \rho)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Calcoli come quello precedente, che danno luogo a risultati esatti, sono spesso laboriosi e comportano in ogni caso la conoscenza di tutti gli elementi del circuito. Qualora si voglia valutare preliminarmente la significatività della correzione, si può calcolare

$$\left| \frac{\bar{Z}_o}{R_V} \right| = \frac{|\bar{Z}_o|}{R_V} = \frac{|R_o + jX_o|}{R_V} = \frac{\sqrt{R_o^2 + X_o^2}}{R_V}$$

poiché

$$V_o = V_V \left| 1 + \frac{\bar{Z}_o}{R_V} \right|$$

essendo, come è noto,

$$1 + \left| \frac{\bar{Z}_o}{R_V} \right| \geq \left| 1 + \frac{\bar{Z}_o}{R_V} \right|$$

si ha

$$V_o \leq V_V \left( 1 + \frac{|\bar{Z}_o|}{R_V} \right)$$

da cui

$$\frac{V_o - V_V}{V_V} \leq \frac{|\bar{Z}_o|}{R_V}$$

Poiché  $\frac{V_o - V_V}{V_V}$  è l'errore sistematico relativo dovuto alla perturbazione introdotta dallo strumento, se

$$\frac{|\bar{Z}_o|}{R_V} \ll \frac{\Delta V_V}{V_V}$$

la correzione è trascurabile.

Come è evidente, la condizione espressa dalla disuguaglianza precedente è sufficiente ma non necessaria.

b) Teorema di Norton:

data una rete costituita da elementi attivi e passivi, e fissati due punti A e B di essa, la rete stessa, vista da tali punti, è equivalente ad un generatore ideale di corrente erogante una corrente  $\bar{I}_0$  il quale ha in parallelo un elemento passivo di impedenza  $\bar{Z}_0$ .

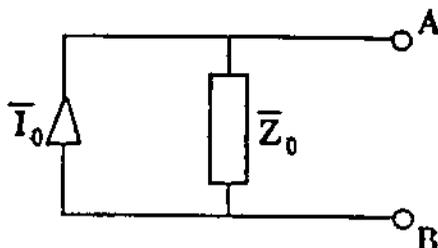


fig. 17

$\bar{I}_0$  è la corrente di corto circuito tra i punti A e B della rete e  $\bar{Z}_0$  ha lo stesso significato enunciato nel Teorema di Thevenin.

1.6 Circuiti attenuatori o sfasatori

1.6.1 Quadrupoli passivi

Vengono ora studiate le risposte di alcuni particolari circuiti passivi sollecitati da segnali sinusoidali di tensione aventi frequenza variabile.

Tali circuiti possono essere riguardati come quadrupoli (vedi fig. 51)

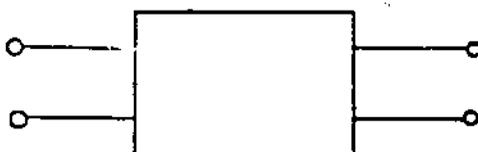


fig. 51

nel senso che presentano due terminali di ingresso tra i quali viene applicata la sollecitazione, e due terminali di uscita tra i quali viene prelevata la risposta.

Ogni quadrupolo è caratterizzato dalla attenuazione  $\bar{A}$

$$\bar{A} = \frac{V_u}{V_i}$$

che è una grandezza complessa dipendente dalle caratteristiche degli elementi passivi e dalla frequenza;  $\bar{A}$  definisce completamente le relazioni di ampiezza e fase tra i segnali di ingresso e di uscita pur essendo da essi indipendente: è infatti

$$A = \frac{V_u}{V_i}, \quad \arg \bar{A} = \alpha_u - \alpha_i$$

ove  $\alpha_u$  e  $\alpha_i$  sono rispettivamente le fasi del segnale di uscita e di quello di ingresso.

### 1.6.2 Alcuni particolari circuiti attenuatori e sfasatori

Si chiamano attenuatori alcuni particolari quadrupoli l'attenuazione dei quali è funzione monotona della frequenza; è quindi possibile selezionare intervalli di frequenza in corrispondenza dei quali il modulo di  $\bar{A}$  ed il suo argomento hanno valori sensibilmente diversi (da  $\approx 1$  a  $\ll 1$  e da  $\approx 0$  a  $\approx \pm \pi/2$  rispettivamente).

-Circuito CP

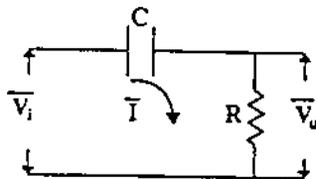


Fig. 13

Si ha:

$$\bar{A} = \frac{V_u}{V_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

e, posto  $RC = \tau$ , "costante di tempo" del circuito,

$$\bar{A} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega\tau}}$$

E' quindi

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}}, \quad \arg \bar{A} = \gamma = \arctan \frac{1}{\omega\tau} \quad (5)$$

Gli andamenti di  $A$  e  $\gamma$  in funzione di  $\nu$  sono riportati in fig. 19a e 19b.

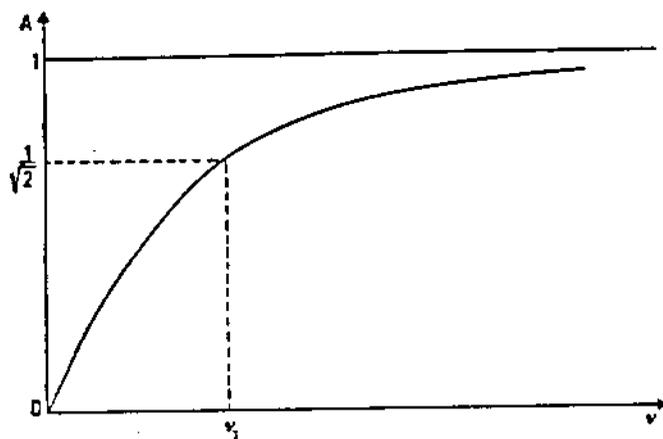


fig. 19a

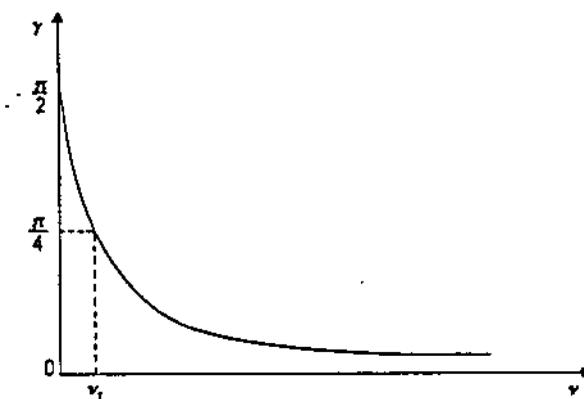


fig. 19b

Si suole definire frequenza "di taglio" la frequenza  $\nu_T$  tale che  $A(\nu_T) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  per cui si ha  $\omega_T r = 1$  da cui  $\nu_T = \frac{\omega_T}{2\pi} = \frac{1}{2\pi r}$

(Si noti che  $\nu_T$  è il valore della frequenza per cui la componente reattiva dell'impedenza del circuito è uguale a quella resistiva.)

La frequenza di taglio è un parametro caratteristico del circuito che fornisce una indicazione della zona di transizione dei valori dell'attenuazione nel senso precedentemente detto. Si ha infatti per  $\nu \ll \nu_T$   $A \ll 1$ , per  $\nu \gg \nu_T$   $A = 1$ .

Questo comportamento consente di denominare il circuito descritto come filtro "passa-alto", nel senso che segnali sinusoidali di frequenza  $\nu \gg \nu_T$  vengono trasmessi con ampiezza praticamente invariata, mentre segnali sinusoidali con frequenza  $\nu \ll \nu_T$  vengono fortemente attenuati. Di conseguenza, nel caso in cui il segnale in ingresso sia periodico non sinusoidale, il circuito fornisce in uscita un segnale periodico di forma diversa rispetto

a quello in ingresso.

Infatti un segnale periodico può essere riguardato, secondo Fourier, come risultante dalla sovrapposizione di infiniti segnali sinusoidali di frequenza multipla della propria. Il circuito, pertanto, fornisce una risposta diversa per ciascun segnale componente in funzione della frequenza di esso.

Circuito RL

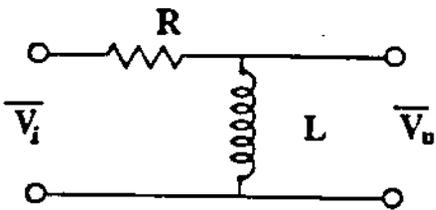


fig. 20

si ha  $\bar{A} = \frac{V_u}{V_i} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$

ed essendo  $\frac{L}{R} = r$

$$\bar{A} = \frac{j\omega r}{1 + j\omega r} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega r}}$$

La risposta di questo circuito è quindi identica a quella del circuito CR.

Circuito RC

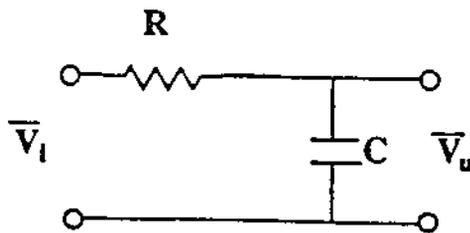


fig. 21

Si ha

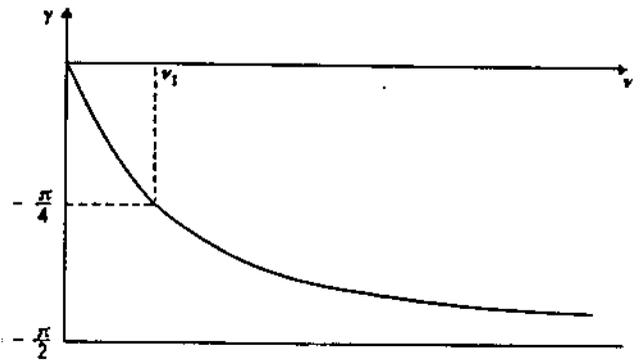
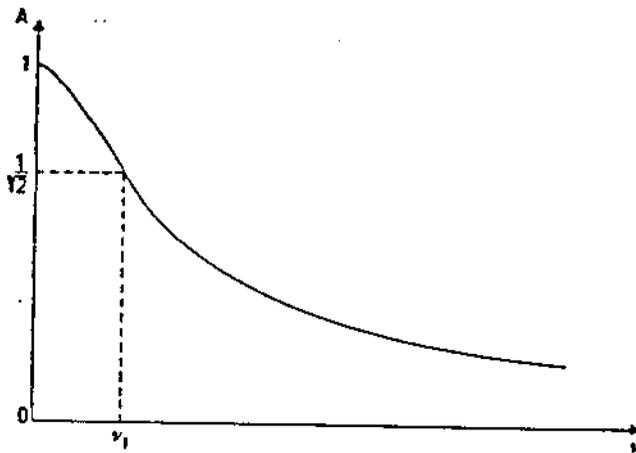
$$\bar{A} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

ed essendo  $RC = r$

$$\bar{A} = \frac{1}{1 + j\omega r}$$

E' quindi

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 r^2}}, \quad \arg \bar{A} = \gamma = \arctan(-\omega r) \quad (6)$$



Definita la frequenza di taglio come per il circuito CR si ha

$$\nu_T = \frac{1}{2\pi r}$$

Come si vede, in questo caso, per

$\gamma \ll \gamma_T$  è  $A \approx 1$ , mentre per  $\gamma \gg \gamma_T$ ,  $A \ll 1$ ;  
 il circuito si comporta quindi da filtro "passa-basso".

Circuito LF.

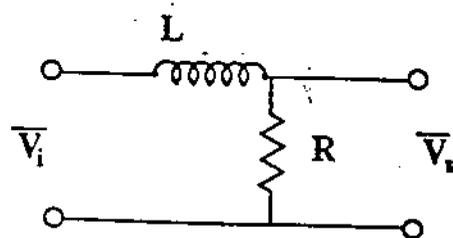


fig. 23

Si ha:

$$\bar{A} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

essendo  $\tau = \frac{L}{R}$   $\bar{A} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$

come nel caso del circuito RC.

Le curve di risposta dei circuiti attenuatori, sia per quanto riguarda la funzione  $A(\gamma)$  che la funzione  $\gamma(\gamma)$  dipendono dalla sola costante  $\tau$ .

Esse sono suscettibili di una rappresentazione grafica che può essere particolarmente utile.

Riscritte le (5) e (6) nella forma

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_T}\right)^2}}, \quad \gamma = \arctan \frac{\nu}{\nu_T} \quad (7) \text{ per il filtro passa-alto}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_T}\right)^2}}, \quad \gamma = -\arctan \frac{\nu}{\nu_T} \quad (8) \text{ per il filtro passa-basso}$$

e posto  $z = k \log_b \frac{\nu}{\nu_T}$  si ha  $\frac{\nu}{\nu_T} = b^{z/k}$

e quindi, nel caso dei filtri passa-alto (vedi eq. 7)

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + b^{-2z/k}}} \quad (9a) \quad , \quad \gamma = \arctan b^{-z/k} \quad (9b)$$

e nel caso dei filtri passa-basso (vedi eq. 8)

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+b^2x/k}} \quad (10a)$$

$$\gamma = -\arctan b^2/k \quad (10b)$$

Gli andamenti delle (9a) e (10a) sono riportati nella fig. 24 a, rispettivamente curva a) e curva b), e quelle della (9b) e (10b) nella fig. 24b -rispettivamente curva a) e curva b). Dalle figure risultano evidenti alcune caratteristiche di simmetria.

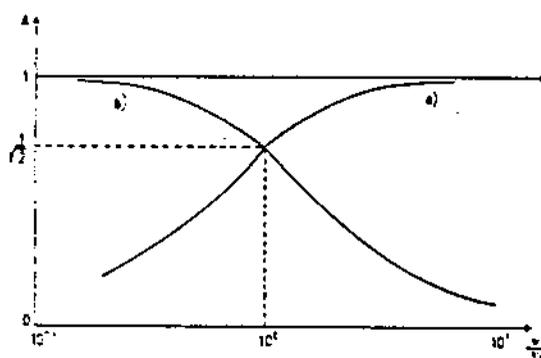


fig 24a

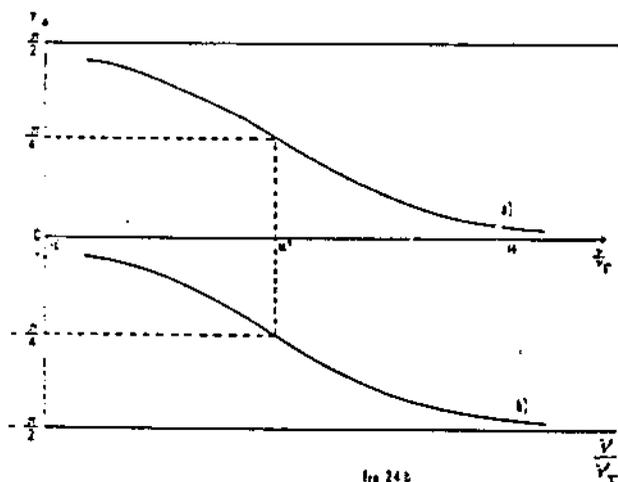


fig 24b

La scelta della variabile  $\frac{v}{v_T}$ , anche indipendentemente dalla rappresentazione in scala logaritmica, consente di ottenere delle curve "universali" per  $A(\frac{v}{v_T})$ ,  $\gamma(\frac{v}{v_T})$  che descrivono il comportamento dei circuiti considerati indipendentemente dalle loro caratteristiche particolari.

### 1.7 Circuiti risonanti

In analogia con i fenomeni di risonanza in meccanica si sogliono

chiamare risonanti quei circuiti i quali, sollecitati da segnali sinusoidali di frequenza variabile, forniscono una risposta sinusoidale la cui ampiezza presenta un massimo (più o meno pronunciato) in corrispondenza di una particolare frequenza determinata dagli elementi passivi del circuito stesso.

Tra i circuiti risonanti si considerano qui due esempi fondamentali, costituiti dai circuiti RLC serie e parallelo.

### 1.7.1 Circuito RLC serie

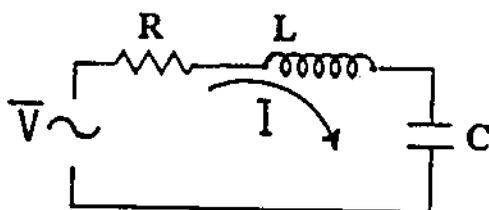


fig. 25

Si consideri un generatore ideale di tensione sinusoidale di frequenza variabile connesso ai terminali di una rete passiva costituita da un resistore, un condensatore e un induttore ideali posti in serie (vedi fig. 25). In condizioni di regime il circuito fornisce una risposta rappresentata da una corrente sinusoidale che ha la stessa frequenza della tensione applicata. Ci si propone di studiare l'ampiezza dell'intensità  $i$  corrente nel circuito, ed il suo sfasamento rispetto alla tensione  $\bar{V}$  (costante) del generatore. A tale scopo si consideri l'impedenza  $\bar{Z}$  vista dai terminali del generatore:

$$\bar{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

e quindi

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \varphi = \arg \bar{Z} = \arctan \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

i cui andamenti in funzione di  $\omega$  sono riportati nelle fig. 26 e 27.

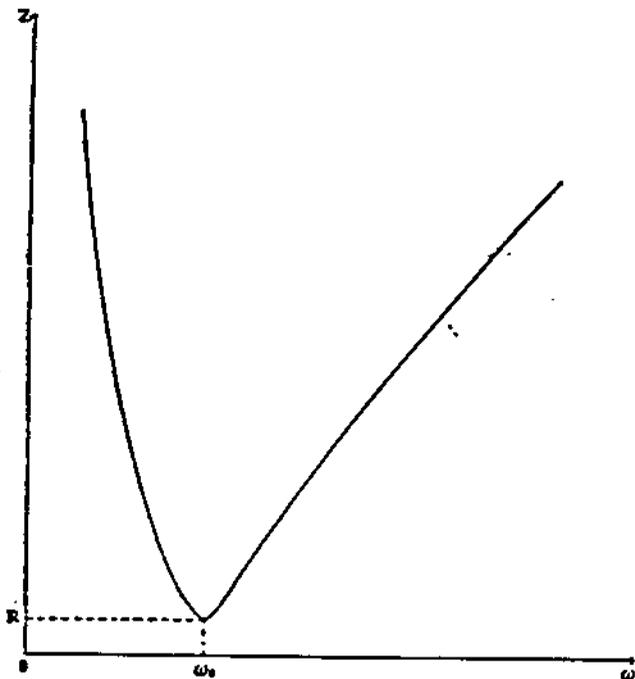


Fig. 26

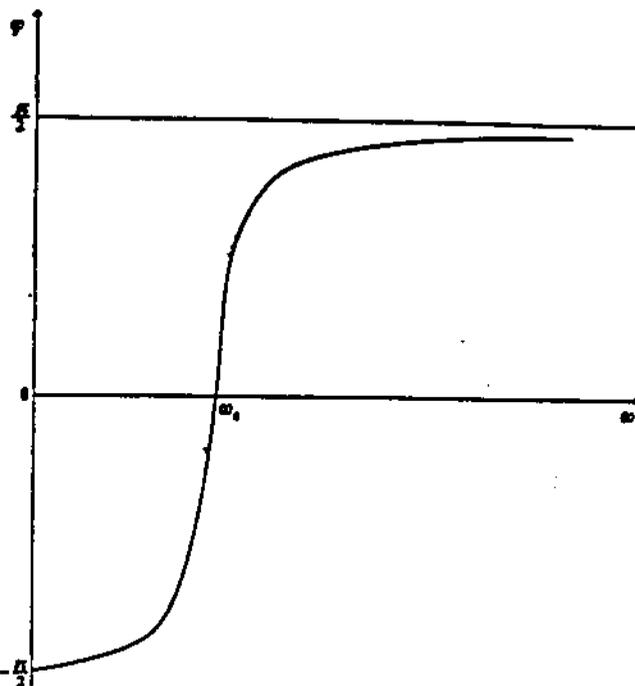


Fig. 27

Come si vede,  $Z$  presenta un minimo per quel particolare valore  $\omega_0$

di  $\omega$  che annulla la reattanza, cioè per  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

In tali condizioni le tensioni ai capi rispettivamente dell'induttore e del condensatore sono opposte per ogni valore di  $t$  e l'impedenza del circuito si riduce alla sola componente resistiva.

Per quanto riguarda l'intensità di corrente si può scrivere:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

fornito ai capi della serie e quello di uscita è prelevato ai capi del resistore.

L'attenuazione complessa di questo filtro è

$$\bar{A} = \frac{V_R}{V} = \frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

che, come si vede, è indipendente dall'ampiezza e dalla fase del segnale applicato mentre dipende dalla frequenza di esso e dalle caratteristiche degli elementi passivi del circuito.

L'andamento del modulo  $A$  e del suo argomento sono riportati nelle figg. 29a e 29b.

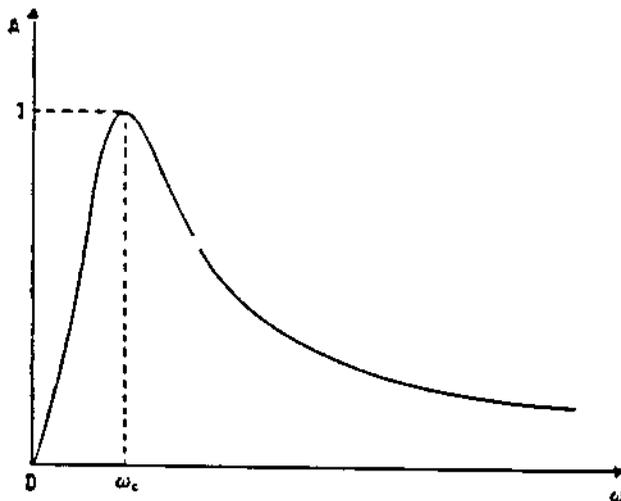


fig. 29a

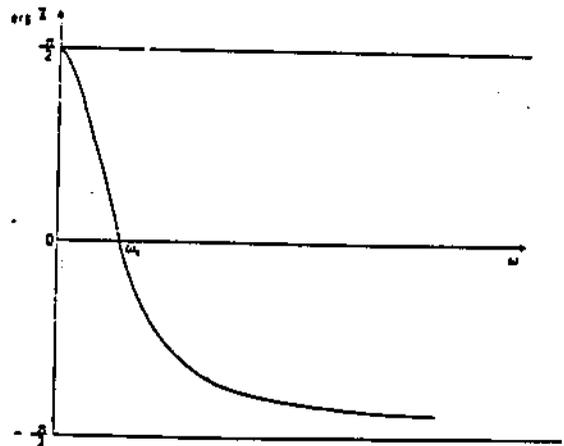


fig. 29b

Si definisce banda passante l'intervallo di frequenza di estremi  $\nu_1 < \nu_2$  ( $\nu_2 > \nu_1$ ) in corrispondenza dei quali si ha  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Si caratterizza in tal modo il comportamento del circuito nel senso che per valori di  $\nu$  compresi tra  $\nu_1$  e  $\nu_2$  l'attenuazione è prossima a 1 (compresa tra 1 e  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ) mentre per  $\nu \ll \nu_1$  e  $\nu \gg \nu_2$

essa è molto vicina a zero. Il filtro prende quindi il nome di "passabanda".

$\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dipendono dalle caratteristiche degli elementi passivi del circuito e si ottengono risolvendo l'equazione

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R\sqrt{2}$$

Tale condizione si traduce nelle equazioni

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = -R \qquad \omega L - \frac{1}{\omega C} = R$$

le soluzioni positive delle quali sono rispettivamente

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} \qquad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

l'ampiezza della banda passante risulta quindi

$$\frac{1}{2\pi} (\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L} \qquad (11)$$

Per caratterizzare la capacità selettiva del filtro si suole definire il "fattore di merito"

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1} \qquad (12)$$

(ove  $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ) il cui reciproco  $\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_0}$  esprime la

frazione della frequenza di risonanza rappresentata dalla larghezza di banda. Un tale filtro è quindi tanto più selettivo quanto più piccola è tale frazione, cioè quanto più grande è  $Q$ . Corrispondentemente la curva di attenuazione è tanto più "piccata" quanto maggiore è  $Q$ .

Sostituendo nella (12) la (11) si ottengono per il fattore di merito le espressioni

$$Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Come si vede per ogni fissata coppia di valori  $L$  e  $C$  cui corrisponde la pulsazione di risonanza  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  il fattore di merito è inversamente proporzionale a  $R$ .

Può essere rappresentativo esprimere il modulo di  $A$  e l'argomento  $\gamma$  di  $\bar{A}$  in funzione di  $Q$  e di  $\omega_0$ . Si ha

$$\begin{aligned} A &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 C^2} (\omega LC - \frac{1}{\omega})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 C^2 \omega_0^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\nu}{\nu_0} - \frac{\nu_0}{\nu}\right)^2}} \\ \gamma &= \arctan \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) = \arctan \frac{1}{RC} \left(\frac{1}{\omega} - \omega LC\right) \\ &= \arctan \frac{1}{RC \omega_0} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right) = \arctan Q \left(\frac{\nu_0}{\nu} - \frac{\nu}{\nu_0}\right) \end{aligned}$$

Le funzioni  $A(\nu)$  e  $\gamma(\nu)$  dipendono quindi soltanto dai due parametri  $Q$  e  $\nu_0$ , i quali, come si è visto, dipendono a loro volta dalle caratteristiche degli elementi passivi del circuito.

Nelle figure 30a, b sono rappresentate, per un fissato  $\nu_0$ , due diverse funzioni  $A(\nu)$  e  $\gamma(\nu)$  corrispondenti ad altrettanti valori di  $Q$ .

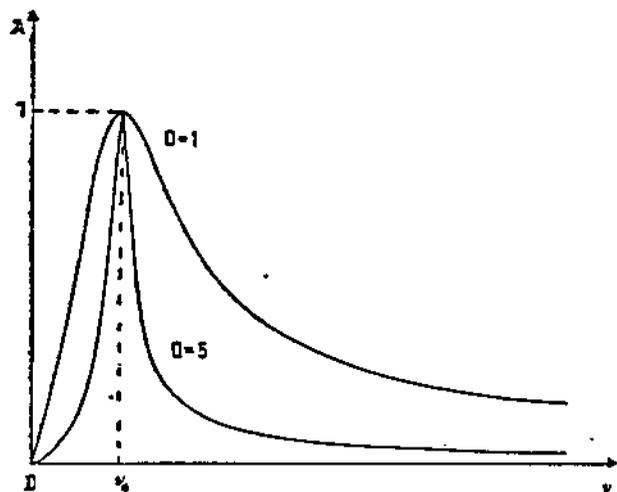


fig. 30a

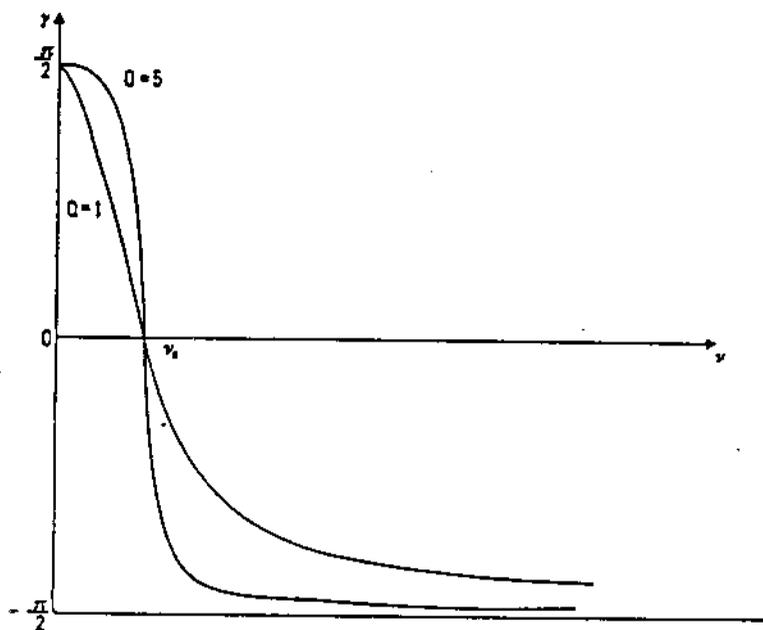


fig. 30b

Rappresentando  $A(\gamma)$  e  $\chi(\gamma)$  in carta semilogaritmica ed assumendo come variabile indipendente  $\frac{\gamma}{\gamma_0}$  si ottengono delle curve "universali", dipendenti soltanto dal parametro  $Q$  (vedi figg. 31a, b).

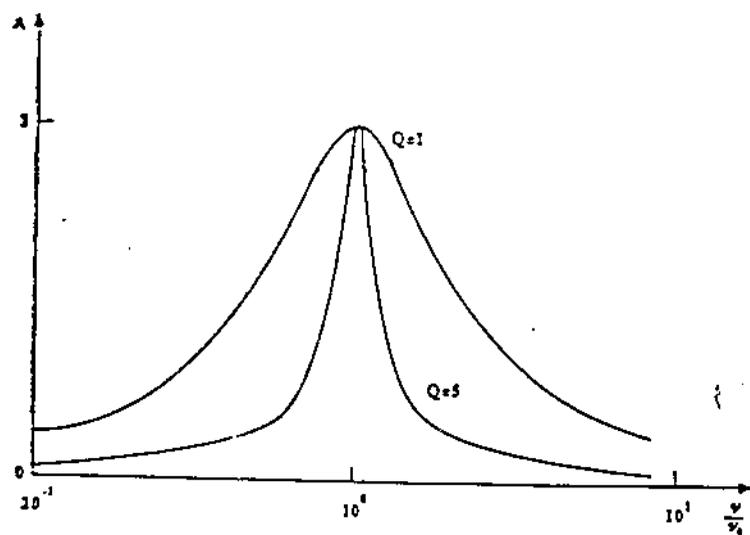


fig. 31a

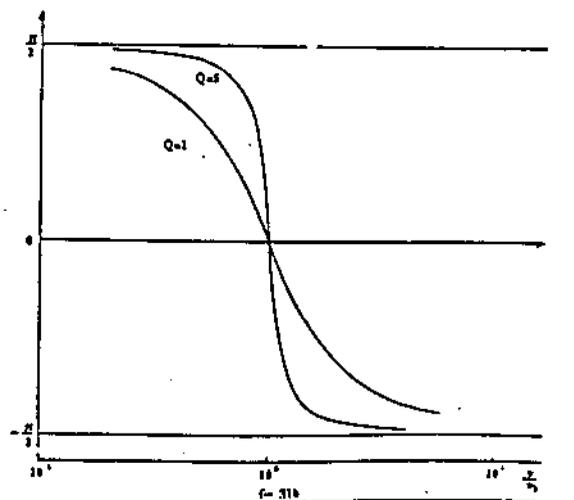


fig. 31b

I risultati ottenuti sono suscettibili di una significativa rappresentazione grafica, che evidenzia le connessioni tra le caratteristiche R, L, e C degli elementi passivi ed i parametri Q e  $\gamma_0$  che definiscono il comportamento del circuito.

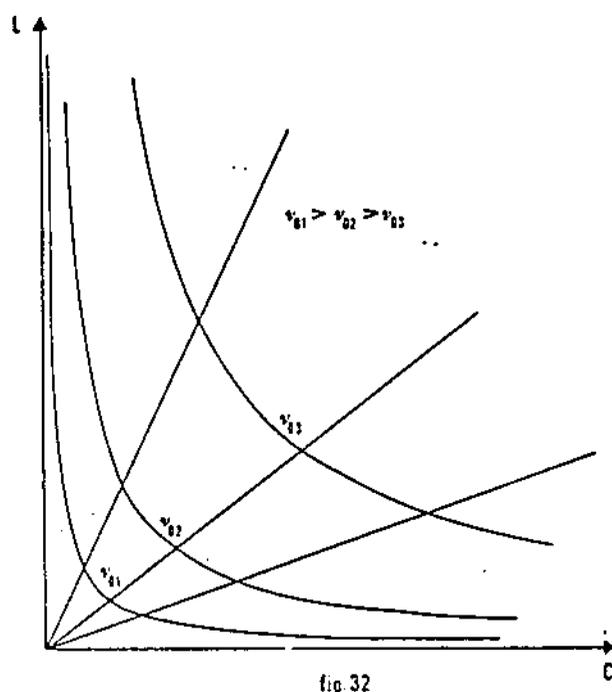


fig. 32

Nel piano (L, C) l'equazione  $LC = \frac{1}{4\pi^2 \gamma_0^2}$  definisce una famiglia di iperboli equilatera riferite agli asintoti ciascuna delle quali è individuata da un particolare valore di  $\gamma_0$ , mentre l'equazione  $Q^2 = \frac{1}{R^2} \frac{L}{C}$ ,

da cui  $L = Q^2 R^2 C$ , definisce un fascio di rette passanti per l'origine di coefficiente angolare  $Q^2 R^2$  (vedi fig. 32).

Fissati ad esempio i valori dei parametri Q e  $\gamma_0$  il grafico mostra che, al variare di R, resta determinata una coppia di valori L e C come coordinate del punto di intersezione tra l'iperbole individuata da  $\gamma_0$  e la retta di coefficiente angolare  $Q^2 R^2$ .

Qualora invece siano fissati  $\gamma_0$  e  $R$ , la coppia  $(L, C)$  dipende dal valore di  $Q$  e, come si vede, si ha un  $Q$  tanto maggiore quanto maggiore è  $L$  (e, in corrispondenza, quanto più piccola è  $C$ ).

### 1.7.3 Sovratensioni

Un interessante fenomeno può verificarsi relativamente ai segnali di tensione esistenti ai capi dell'induttore e del condensatore.

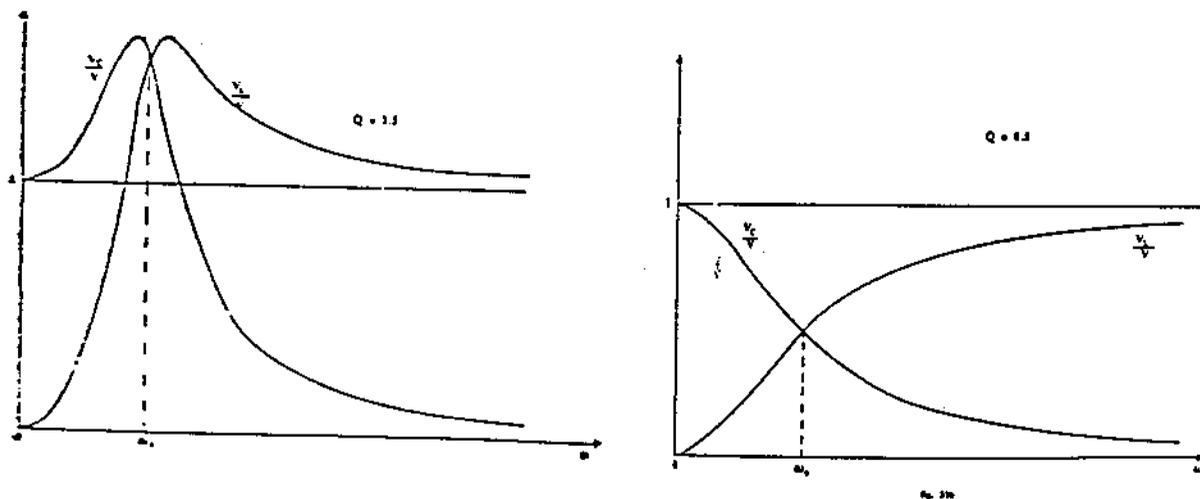
Sotto certe condizioni infatti, come è dimostrato nel seguito, le ampiezze delle tensioni ai capi degli elementi reattivi sono maggiori di quella della tensione ai capi della serie. Tale fenomeno, noto con il nome di sovratensione, deve essere preso in considerazione per quanto riguarda problemi di isolamento, in particolare nelle macchine elettriche.

Allo scopo di evidenziare tale fenomeno, si considerino le grandezze  $\frac{V_L}{V}$  e  $\frac{V_C}{V}$ ; per esse si ha:

$$\frac{V_L}{V} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$\frac{V_C}{V} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Gli andamenti delle due funzioni sono rappresentati nelle figure 33 a, b per  $Q^2 > \frac{1}{2}$  e  $Q^2 < \frac{1}{2}$ .



Come si vede, nel primo caso le tensioni ai capi degli elementi reattivi sono maggiori, in determinati intervalli di frequenza, della tensione ai capi della serie.

Il massimo di ciascuna di tali curve è crescente al crescere di  $Q$  e si presenta in  $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$  per  $\frac{V_L}{V}$ , e in  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  per  $\frac{V_C}{V}$ .

#### 1.7.4 Circuito RLC parallelo

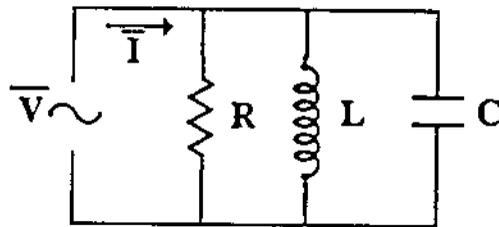


fig. 34

Si descrive ora il comportamento di un circuito costituito da un resistore, un condensatore ed un induttore ideali posti in parallelo nei due casi limite in cui il circuito è alimentato da un generatore ideale di tensione sinusoidale o da un generatore ideale di corrente sinusoidale, entrambi di frequenza variabile.

Si osservi che un generatore reale approssima bene un generatore ideale di tensione o di corrente a seconda che la sua resistenza interna (alla quale generalmente si riduce la sua impedenza di uscita) sia molto minore o molto maggiore della resistenza ohmica del circuito.

#### 1.7.5 Circuito antirisonante in corrente

In fig. 34 è riportato lo schema del circuito, in cui  $\bar{V}$

rappresenta l'ampiezza complessa della f.e.m di un generatore ideale di tensione ( $\bar{V} = \text{cost.}$ )

L'ammettanza  $\bar{Y} = 1/\bar{Z}$  della rete passiva vista dai terminali del generatore è data da:

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

da cui

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Ne segue che l'ampiezza dell'intensità di corrente erogata dal generatore è

$$I = VY = V \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

il cui andamento è riportato in fig. 35.

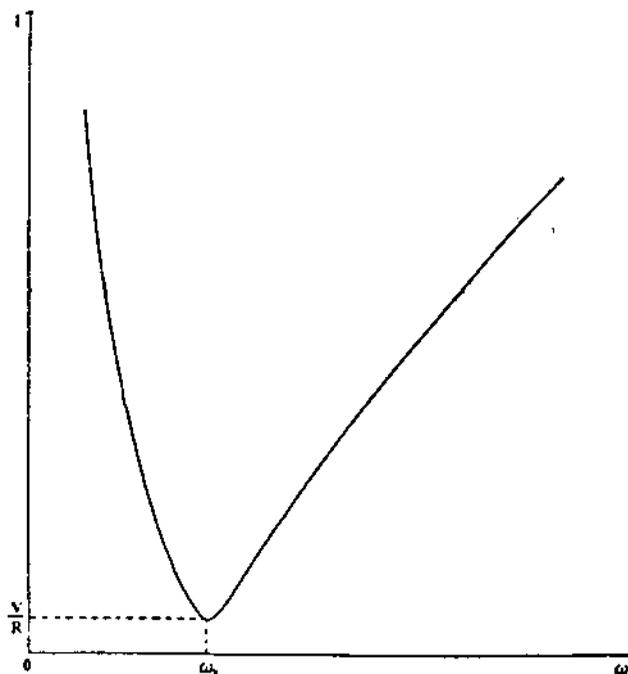
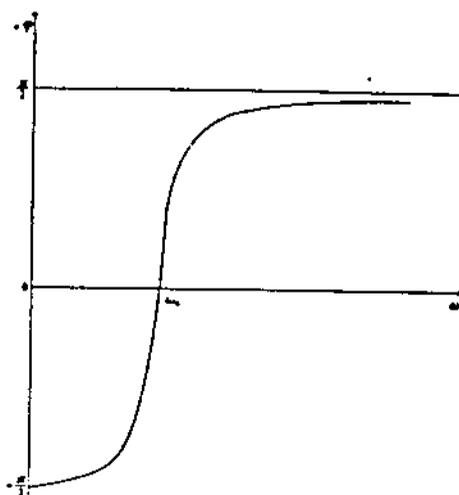


fig. 35

Come si vede l'ampiezza dell'intensità di corrente presenta un minimo per  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Lo sfasamento  $-\varphi$  tra corrente e tensione, rappresentato dall'anomalia di  $\bar{Y}$ , vale  $-\varphi = \arctan R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

ed il suo andamento è rappresentato in fig. 36.



“ ”

#### 1.7.6 Circuito risonante in tensione

La fig. 37 rappresenta lo schema del circuito, in cui  $\bar{I}$  è l'ampiezza complessa della intensità di corrente erogata da un generatore ideale di corrente ( $\bar{I} = \text{cost.}$ )

Essendo, come nel caso precedente,

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

si ha, per l'ampiezza complessa della tensione ai capi del parallelo

$$\bar{V} = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} = \frac{\bar{I}}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

= quindi:

$$V = \frac{I}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \quad (12a)$$

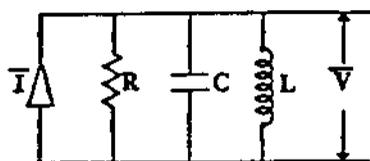


fig. 37

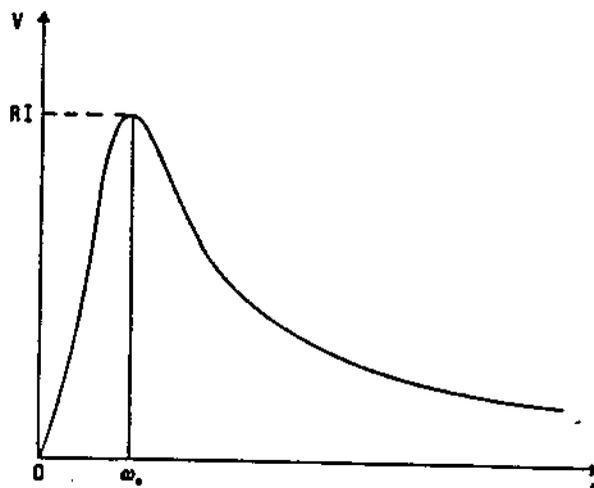


fig. 38

L'andamento di  $V$  in funzione di  $\omega$  è riportato in fig. 38.

La curva, che descrive anche in questo caso un fenomeno di risonanza, presenta un massimo per  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (pulsazione di risonanza) ove

$$V(\omega_0) = V_0 = RI. \quad (12b)$$

Lo sfasamento tra tensione e corrente varia in funzione di  $\omega$  nel modo seguente:

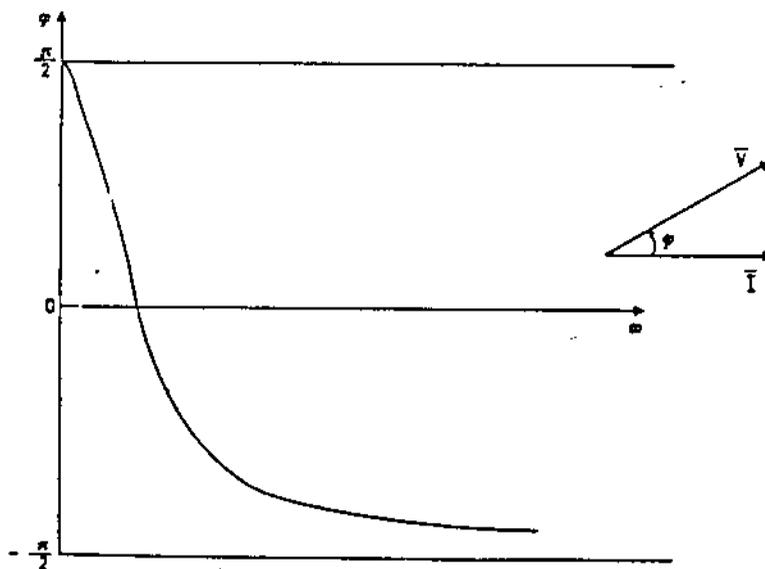


fig. 39

Per quanto riguarda lo studio al variare di  $\omega$  delle correnti che attraversano i singoli elementi si considerino i rapporti di esse con la corrente di alimentazione  $I$ . Si ha:  $\frac{\bar{I}_R}{I} = \frac{1/R}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$ .

Questa funzione ha lo stesso andamento della  $\frac{V_L(\omega)}{V}$  nel circuito RLC serie ed è graficata nella fig. 40:

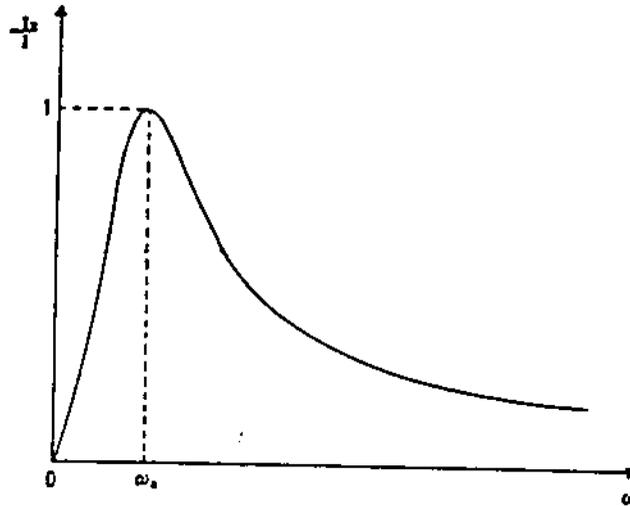


Fig. 40

Si ha inoltre

$$\frac{I_L}{I} = \frac{\frac{1}{\omega L}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

$$\frac{I_C}{I} = \frac{\omega C}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

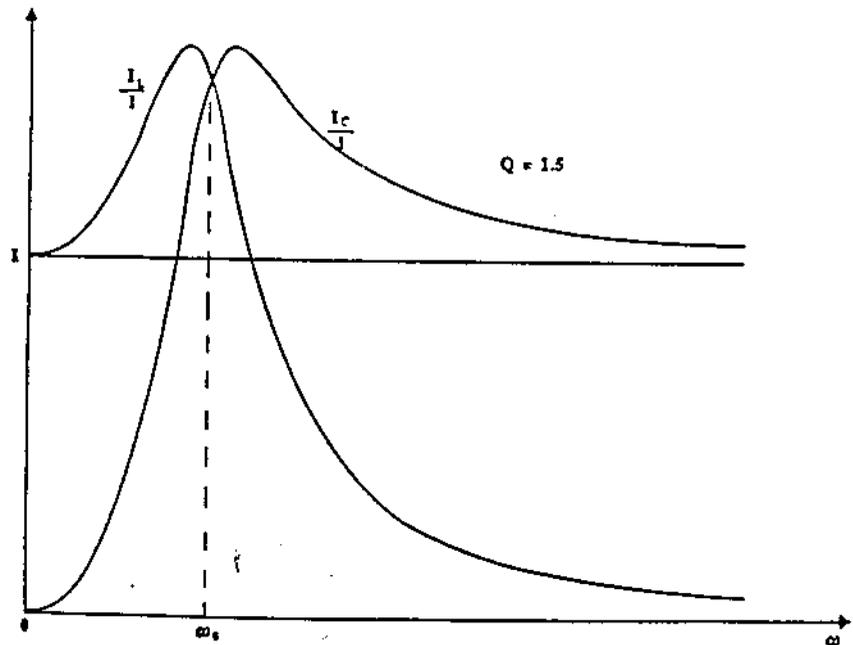


Fig. 41

i cui andamenti sono riportati in fig. 41; come si vede essi sono analoghi a quelli di  $\frac{V_C}{V}$  e  $\frac{V_L}{V}$  in un circuito RLC serie.

Anche per un circuito risonante parallelo si definisce una banda passante i cui valori estremi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si ricavano dai valori di  $\omega$  per i quali  $V(\omega) = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ . Per le (42a) e (42b) si ottiene l'equazione

$$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \frac{1}{R} \sqrt{2}$$

che si traduce nelle due seguenti:

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = -\frac{1}{R} \quad e \quad \omega C - \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{R}$$

le soluzioni positive delle quali sono rispettivamente

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{L^3 + 4R^2LC}}{2LRC} \quad e \quad \omega_2 = \frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{L^3 + 4R^2LC}}{2LRC}$$

l'ampiezza della banda passante risulta quindi

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{1}{2\pi} (\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{RC}$$

ed il fattore di merito

$$Q = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Come si vede, il fattore di merito è il reciproco di quello di un circuito risonante serie costituito dai medesimi elementi passivi.

### 1.8 Elementi reali di circuito

Finora si è parlato di resistori, condensatori e induttori considerandoli elementi ideali; si è cioè ammesso che per questi elementi la relazione tra tensione e corrente sia tale che una di tali grandezze è proporzionale all'altra o alla sua derivata prima rispetto al tempo. Ciò implica che ogni elemento passivo è

caratterizzato da una ben determinata grandezza fisica (R, L o C) costante rispetto a variazioni di tensione e di frequenza.

In realtà tale assunzione è verificata solo in prima approssimazione per il concorso di fenomeni di diversa natura, per tener conto dei quali ciascun elemento reale può essere rappresentato mediante una combinazione di più elementi ideali opportunamente connessi.

### Resistore

E' rappresentabile mediante lo schema in fig. 42 in cui

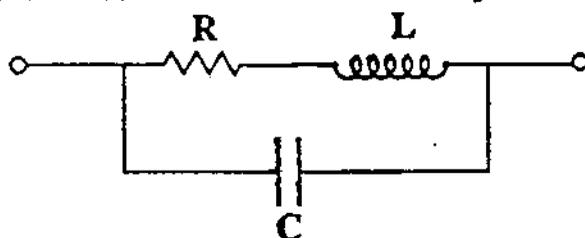


fig. 42

l tiene conto dell'induttanza dei fili e C della capacità di essi.

Per i resistori normalmente usati (ad impasto) i valori di L e C sono molto piccoli, per cui fino a frequenze dell'ordine di 100 MHz lo schema equivalente è:



A questo pregio si contrappone il difetto che per questo tipo di resistori la potenza massima dissipabile è molto piccola (dell'ordine di qualche watt); per grandi potenze si adoperano resistori a filo.

### Induttore

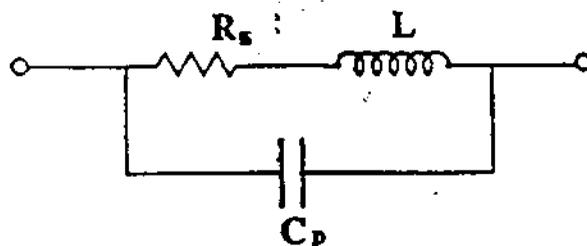


fig. 43

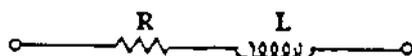
$R_s$  tiene conto della resistenza (ohmica) dell'avvolgimento, dell'effetto pellicolare (ad alta frequenza la corrente passa praticamente sulla sola superficie del conduttore - vedi nota a piè di pagina) e dell'effetto di prossimità (la corrente che circola in una spira subisce l'influenza del campo magnetico creato dalla corrente che circola nella spira accanto); varia con la frequenza.

$C_p$  tiene conto del fatto che fra due spire vicine percorse da una corrente si manifesta un effetto capacitivo.

Il circuito schematizzato in fig. 43 risuona alla frequenza

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R_s^2 \frac{C}{L}} ;$$

per frequenze assai più basse della  $\nu_0$  lo schema equivalente diventa:




---

Nota:

L'effetto pellicolare consiste nel fatto che, quando un conduttore è percorso da una corrente sinusoidale, la densità di essa non è uniforme, ma varia con la distanza dalla superficie del conduttore medesimo al variare della frequenza. Per un conduttore di sezione circolare, detta  $J_0$  la densità di corrente superficiale e  $x$  la distanza dalla superficie, si ha:

$$J(x) = J_0 e^{-x/\delta}$$

in cui la costante  $\delta$  varia come  $\nu^{-1/2}$ .

### Condensatore

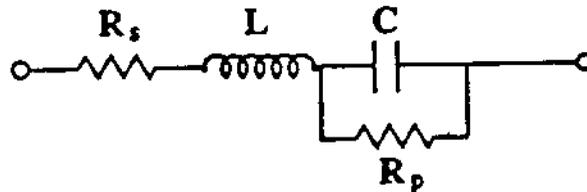


fig. 44

- $R_s$  tiene conto della resistenza dei contatti, saldature, ecc.
- $L$  tiene conto della induttanza dei fili che vanno alle armature;
- $R_p$  tiene conto delle perdite dovute all'isolante interposto tra le armature: varia con la frequenza.
- $R_s$  ed  $L$ , per frequenze inferiori a circa 20 MHz, si possono trascurare per cui lo schema equivalente normalmente usato è:

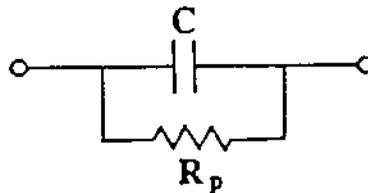


fig. 45

Per caratterizzare tale comportamento si suole introdurre l'angolo di perdita  $\delta$  del condensatore: tale angolo, in relazione allo schema equivalente di fig. 45, è  $\delta = \arctg R_p \omega C$  (v. fig. 46).

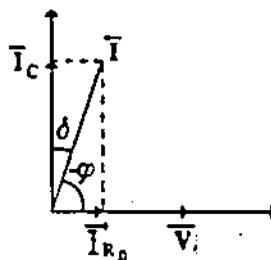


fig. 46

#### 1.8.1 Schema equivalente per un bipolo passivo

Un bipolo passivo può essere rappresentato secondo i due schemi equivalenti della figura seguente

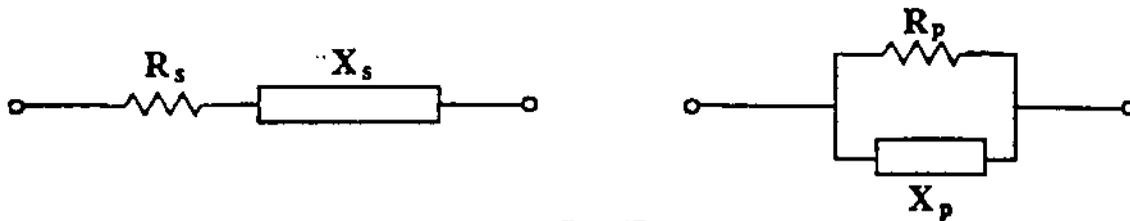


fig. 47

ove  $R_s$  e  $R_p$  sono le componenti resistive e  $X_s$  e  $X_p$  quelle reattive. Imponendo che le impedenze complesse viste dai rispettivi terminali siano uguali si ha:

$$R_s + jX_s = \frac{1}{\frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p}}$$

da cui, uguagliando separatamente le parti reali ed i coefficienti della parte immaginaria:

$$R_s = \frac{R_p}{\frac{R_p^2}{X_p^2} + 1}, \quad X_s = \frac{X_p}{1 + \frac{X_p^2}{R_p^2}}$$

Dalle ultime due relazioni risulta che si può ritenere  $R_s \approx R_p$  se  $X_p \gg R_p$ ; oppure  $X_s \approx X_p$  se  $X_p \ll R_p$ .

Inversamente si ha

$$R_p = R_s + \frac{X_s^2}{R_s}, \quad X_p = X_s + \frac{R_s^2}{X_s}$$

per cui

$$R_p \approx R_s \text{ se } X_s \ll R_s \quad \text{e} \quad X_p \approx X_s \text{ se } R_s \ll X_s$$

### 1.8.2 Schemi di circuiti equivalenti con elementi reali

A titolo di esempio si riportano alcuni schemi equivalenti di circuiti RLC serie e parallelo nei quali si tiene conto dell'effettivo comportamento degli elementi passivi utilizzati per la realizzazione pratica dei circuiti.

#### 1) Circuito RLC serie

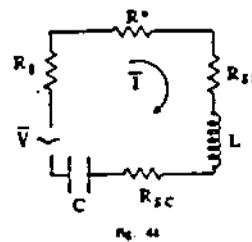
Per frequenze inferiori alla frequenza propria di risonanza di un induttore, e comunque inferiori a circa 20 MHz, lo schema equivalente di un circuito serie RLC è quello di fig. 48, in cui

$R_g$  è la resistenza interna del generatore

$R^*$  è la resistenza esterna

$R_{SI}$  è la resistenza serie dell'induttore

$R_{SC}$  è la resistenza serie del condensatore.



$R_{SC}$  rappresenta la resistenza serie del condensatore calcolata mediante la trasformazione parallelo-serie di un bipolo passivo del par. preced.; la reattanza capacitiva serie si può ritenere inalterata se  $X_p \ll R_p$ .

#### 2) Circuito RLC parallelo

Lo schema equivalente è quello di fig. 49 in cui

$R_g$  è la resistenza interna del generatore

$R_{PC}$  è la resistenza parallelo del condensatore

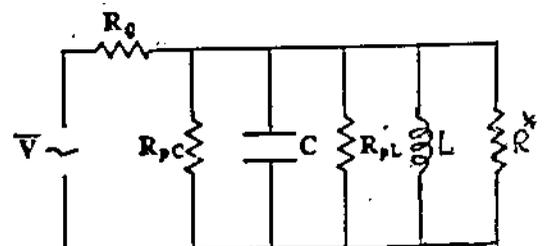


fig. 49

$R^*$  è la resistenza esterna

$R_{pL}$  rappresenta la resistenza parallelo dell'induttore calcolata mediante la trasformazione serie-parallelo di un bipolo passivo; la reattanza induttiva parallelo si può ritenere inalterata se  $R_s \ll X_s$ .

### 1.9 Potenza in regime sinusoidale

Si consideri un elemento passivo di impedenza  $\bar{Z} = R + jX$  e siano  $v(t) = V \sin(\omega t + \alpha)$  e  $i(t) = I \sin(\omega t + \beta)$  i valori istantanei della differenza di potenziale ai suoi capi e della intensità della corrente che lo percorre.

La potenza istantanea dissipata da tale elemento è

$$p(t) = v(t)i(t) = VI \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta)$$

da cui, mediante le formule di Werner,

$$p(t) = \frac{VI}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \alpha + \beta)]$$

essendo  $\varphi = \alpha - \beta$ .

La potenza istantanea può quindi essere espressa mediante la somma di due termini, il primo dei quali è costante ed il secondo oscilla con frequenza  $2\gamma$ .

La potenza reale, detta anche potenza "attiva", è il valor medio della  $p(t)$ , per cui

$$\bar{p}(t) = P = \frac{VI}{2} \cos \varphi = V_{eff} I_{eff} \cos \varphi \quad (12 \text{ bis})$$

L'espressione così ottenuta, che è la nota formula di Galileo Ferraris, rappresenta la potenza realmente assorbita (o dissipata) da un circuito e dipende in modo essenziale dallo

sfasamento  $\varphi$  tra tensione e corrente. La (12 bis) può trasformarsi nel modo seguente:

$$\bar{p}(t) = R I_{eff}^2, \quad \text{essendo}$$

$$V_{eff} = Z I_{eff} \quad \text{e} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

Si evidenzia in tal modo che la potenza attiva dipende soltanto dalla presenza di elementi ohmici.

Nel caso in cui l'elemento di circuito considerato contenga soltanto componenti reattivi, si ha, ovviamente,  $\cos \varphi = 0$  e pertanto  $\bar{p}(t) = 0$ .

Non si ha cioè dissipazione di potenza da parte dell'elemento di circuito in studio pur non essendo nulla la potenza istantanea. Quest'ultima infatti, in questo caso oscilla con frequenza  $2\nu$  e ampiezza  $VI/2$  intorno al valore zero. Ciò descrive il fatto fisico relativo agli scambi di energia tra il generatore ed il campo magnetico (nel caso in cui sia presente un induttore) e il campo elettrostatico (nel caso in cui sia presente un condensatore), scambi che avvengono con frequenza  $2\nu$ . Per tener conto che anche in presenza di soli elementi reattivi è impegnata nel circuito una potenza, sebbene non vi sia dissipazione di essa, si suole introdurre il concetto di potenza reattiva, espressa dalla formula

$$P_r = V_{eff} I_{eff} \sin \varphi$$

la quale esprime il prodotto del valore efficace della tensione per la componente del valore efficace della corrente in quadratura con la tensione (vedi fig. 50).

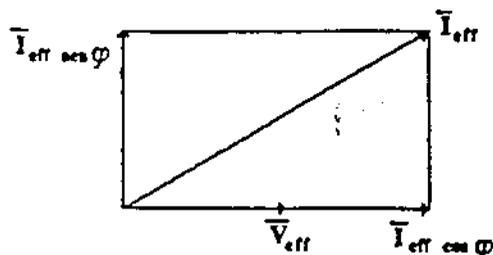


fig. 50

La potenza reattiva viene comunemente misurata in VAR (voltampere reattivi).

Tenendo presente che la massima potenza dissipabile da un carico si ha per  $\varphi=0$ , si suole indicare con il nome di potenza apparente la grandezza  $P_a = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ , misurata in VA (voltampere). Ne segue la relazione formale

$$P_a^2 = P^2 + P_r^2.$$

## 2. Circuiti derivatori ed integratori

Nei precedenti capitoli sono stati studiati, riguardandoli come quadrupoli, alcuni particolari circuiti in regime sinusoidale, come i circuiti attenuatori e quelli risonanti.

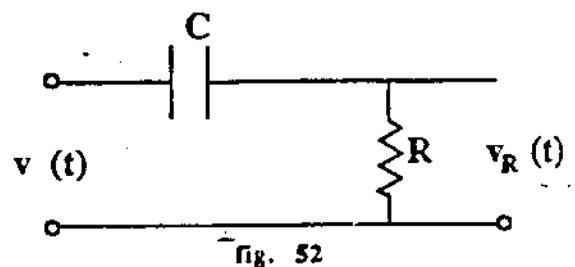
Si vogliono ora studiare alcuni particolari quadrupoli che si comportano come circuiti derivatori e integratori nel senso che, applicando ad essi in ingresso un segnale di tensione funzione del tempo, si ottiene in uscita un segnale che è direttamente proporzionale alla derivata o all'integrale rispetto al tempo del segnale in ingresso.

Tra i vari possibili circuiti che assolvono le funzioni precedentemente indicate, si considerano circuiti costituiti da due elementi passivi, resistore e condensatore, e resistore ed induttore.

### 2.1 Circuiti derivatori

#### a) Circuito CR

Sia  $v(t)$  il segnale di tensione applicato in ingresso. Tale tensione si ripartisce in  $v_C(t)$  e  $v_R(t)$  essendo  $v(t) = v_C(t) + v_R(t)$  per ogni  $t$ .



Si supponga che sia verificata, per ogni  $t$ , la condizione

$$|v_R(t)| \ll |v_C(t)| \quad (13)$$

per cui si ha

$$v(t) \approx v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v_C(t_0)$$

Derivando ambo i membri rispetto al tempo si ha

$$\frac{dv(t)}{dt} \approx \frac{1}{C} i(t) \quad \text{da cui} \quad i(t) \approx C \frac{dv(t)}{dt}$$

Per quanto riguarda il segnale di uscita si ha

$$v_R(t) = R i(t) \approx RC \frac{dv(t)}{dt} = \tau \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{essendo} \quad \tau = RC$$

b) circuito RL

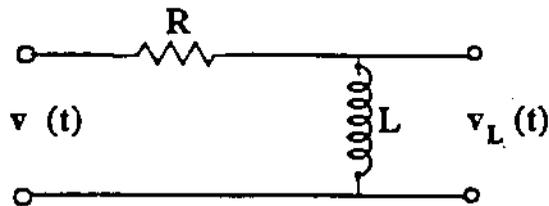


fig. 54

si ha in questo caso

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t);$$

si supponga

$$|v_L(t)| \ll |v_R(t)| \quad (14)$$

per ogni t.

$$\text{Risulta quindi} \quad v(t) \approx v_R(t) = R i(t)$$

$$\text{da cui} \quad i(t) \approx \frac{1}{R} v(t)$$

Ne segue

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \approx \frac{L}{R} \frac{dv(t)}{dt} = \tau \frac{dv(t)}{dt}$$

essendo in questo caso

$$\tau = \frac{L}{R}$$

## 2.2 Circuiti integratori

a) Circuito RC

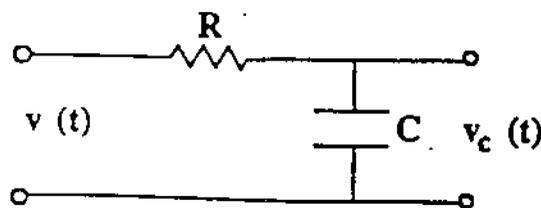


fig. 53

Si supponga in questo caso che sia verificata per ogni  $t$  la condizione

$$|v_C(t)| \ll |v_R(t)| \quad (15)$$

da cui  $v(t) \approx v_R(t) = R i(t)$

Se ne ricava

$$i(t) \approx \frac{1}{R} v(t)$$

e quindi, per il segnale in uscita,

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' \approx \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t v(t') dt' = \frac{1}{T} \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

essendosi scelta l'origine dei tempi  $t_0$  in modo tale che  $v_C(t_0) = 0$ .

b) circuito LR

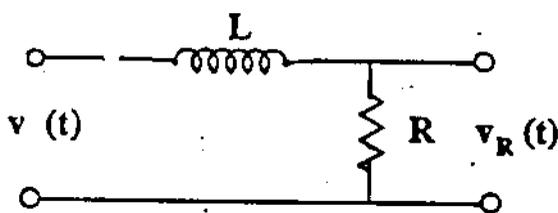


fig. 55

Si ha  $v(t) = v_L(t) + v_R(t)$ ;  
 si supponga, per ogni  $t$ ,  
 $|v_R(t)| \ll |v_L(t)|$ .

(16)

Risulta allora  $v(t) \approx v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

cioè  $L di(t) \approx v(t) dt$

da cui integrando  $i(t) \approx \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0)$

scegliendo l'origine dei tempi in modo che sia  $i(t_0)=0$   
 si ricava

$$v_R(t) = R i(t) \approx \frac{R}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Ciascun caso finora discusso fornisce soltanto un'approssimazione di circuito derivatore e integratore propriamente detto. Come si è visto, tale approssimazione è tanto migliore quanto meglio sono verificate le disequaglianze (13), (14) e (15), (16).

Queste, a loro volta, dipendono dalla costante di tempo  $\tau$  del circuito; infatti le condizioni (13) e (14) di derivazione si possono scrivere

$$i(t) \ll \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t i(t') dt' \quad (\text{avendo scelto } t_0 \text{ in modo che } v_C(t_0)=0)$$

mentre quelle (15) e (16) di integrazione si possono scrivere

$$\int_{t_0}^t i(t') dt' \ll \tau i(t)$$

E' quindi evidente che la prima è tanto meglio verificata quanto più piccola è  $\tau$  e la seconda quanto più grande è  $\tau$ .

Il termine di confronto per  $\tau$  è individuato volta per volta in base alle caratteristiche del segnale di ingresso (p.es. il periodo nel caso di un segnale periodico, la durata se si tratta di un segnale impulsivo).

E' opportuno inoltre sottolineare che le relazioni (13), (14) e (15), (16), se da un lato favoriscono le condizioni di integrazione e di derivazione, dall'altro riducono l'ampiezza del segnale in uscita e quindi si tratta di scegliere di volta in volta un opportuno compromesso.

Le discussioni relative ai circuiti considerati sono state eseguite supponendo che gli elementi passivi siano ideali.

Si deve tener conto che l'impiego di elementi reali comporta variazioni rispetto alla trattazione precedente.

Tali variazioni sono però generalmente contenute nel caso di resistori e di condensatori, mentre possono essere sensibili nel caso degli induttori, prevalentemente per il fatto che questi ultimi presentano una resistenza serie che non è fisicamente distinta dalla componente induttiva.

### 2.3 Circuiti derivatori ed integratori con segnali in ingresso di tipo particolare

A titolo di esempio si studiano ora i circuiti CR e RC in corrispondenza a diverse forme del segnale di ingresso.

#### 2.3.1 Segnale a gradino.

Un segnale a gradino è definito dalla relazione

$$\begin{aligned} v(t) &= V_0 = \text{cost} && \text{per } t > t_0 \\ v(t) &= 0 && \text{per } t \leq t_0 \end{aligned} \quad (\text{vedi fig. 56})$$

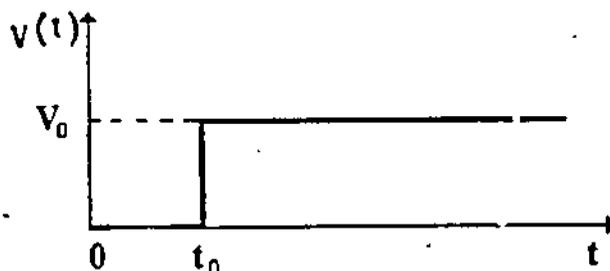


fig. 56

Per  $t > t_0$  si ha

$$V_0 = R i(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' ;$$

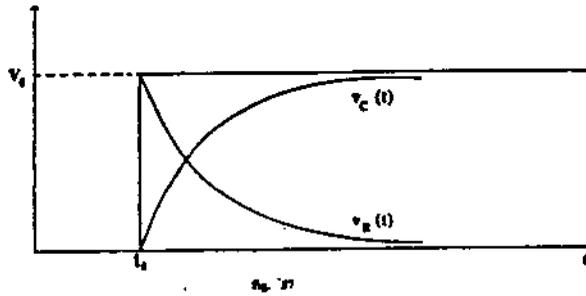
integrando la precedente equazione si ricava

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

per cui

$$v_R(t) = V_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad v_C(t) = V_0 \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right)$$

(vedi fig. 57)

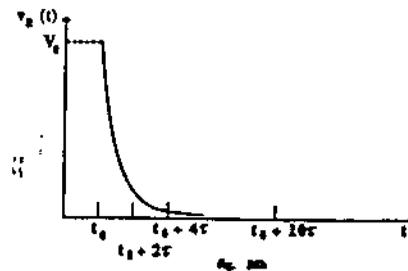


Posto per semplicita'  $t_0=0$ , per  $t \ll \tau$  si ha

$$v_C(t) \approx V_0 \frac{t}{\tau}$$

cioè il segnale di uscita prelevato ai capi del condensatore è direttamente proporzionale all'integrale  $V_0 t$  del segnale d'ingresso.

Per  $t \gg \tau$  si ha  $v_R(t) \approx 0$ , cioè il segnale di uscita prelevato ai capi del resistore è direttamente proporzionale alla derivata (nulla) del segnale di ingresso (fig. 58 a e b).



2.3.2 Segnale a onda quadra.

Un segnale a onda quadra è un segnale periodico di periodo  $T$  variabile tra  $+V_1$  e  $-V_2$  per  $t_0 \leq t < t_0 + T$

secondo l'andamento riportato in fig. 59.

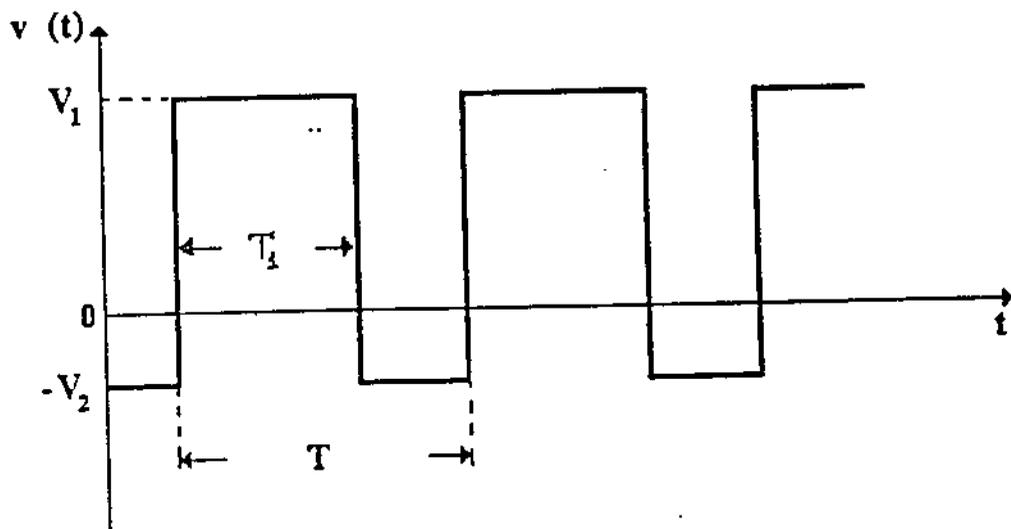


fig. 59

Si consideri il caso in cui  $V_1 = V_0$ ,  $V_2 = 0$  e  $T_1 = T/2$  (cfr. fig. 60); si assuma  $t = 0$  come istante iniziale e si supponga che con un tale segnale sia alimentato un circuito RC serie.

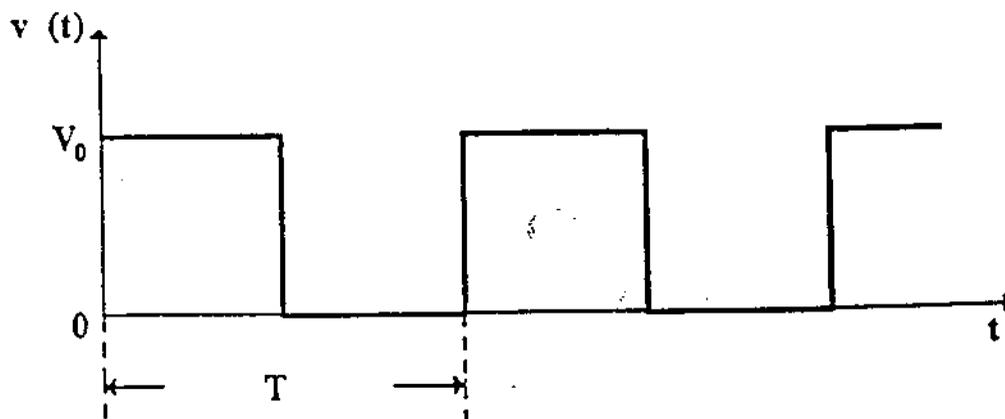


fig. 60

Si hanno le seguenti equazioni per quanto riguarda la intensità di corrente  $i(t)$  e le cadute di potenziale  $v_R(t)$  e  $v_C(t)$  ai capi del resistore e del condensatore:

per  $0 \leq t < \frac{T}{2}$  posto  $V_C(0) = 0$

$$\text{si ha: } i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$v_R(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

$$v_C(t) = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

Come si vede,

$$v_R(t) + v_C(t) = V_0.$$

Per  $t = \frac{T}{2}$

$$v_R\left(\frac{T}{2}\right) = V_0 e^{-\frac{T}{2\tau}}$$

$$v_C\left(\frac{T}{2}\right) = V_0 (1 - e^{-\frac{T}{2\tau}})$$

cioè, posto  $e^{-\frac{T}{2\tau}} = k$

$$v_R\left(\frac{T}{2}\right) = k V_0$$

$$v_C\left(\frac{T}{2}\right) = V_0 (1 - k)$$

Per  $\frac{T}{2} \leq t < T$

$$i(t) = -\frac{V_0(1-k)}{R} e^{-\frac{t-T}{\tau}}$$

$$v_R(t) = -V_0(1-k) e^{-\frac{t-T}{\tau}}$$

$$v_C(t) = V_0(1-k) e^{-\frac{t-T}{\tau}}$$

Si ha:

$$v_R(t) + v_C(t) = 0$$

Per  $t = T/2$  si ha una discontinuità nella  $v_R(t)$ , che passa dal valore  $kV_0$  al valore  $-V_0(1-k)$ : il valore di tale discontinuità è, come si può facilmente verificare,  $V_0$ .

Per  $T \leq t < T + \frac{T}{2}$  si ha

$$i(t) = \frac{V_0 - v_C(T)}{R} e^{-\frac{t-T}{\tau}} = \frac{V_0 - V_0(1-k)k}{R} e^{-\frac{t-T}{\tau}}$$

da cui si ricavano le corrispondenti espressioni per  $v_R(t)$  e  $v_C(t)$ .

Dopo  $n$  periodi, per  $nT \leq t < nT + \frac{T}{2}$  si ha:

$$v_C(t) = V_0 [1 - (1-k + k^2 - k^3 + \dots - k^n) e^{-\frac{t-nT}{\tau}}] \quad (17)$$

e per  $nT + \frac{T}{2} \leq t < (n+1)T$

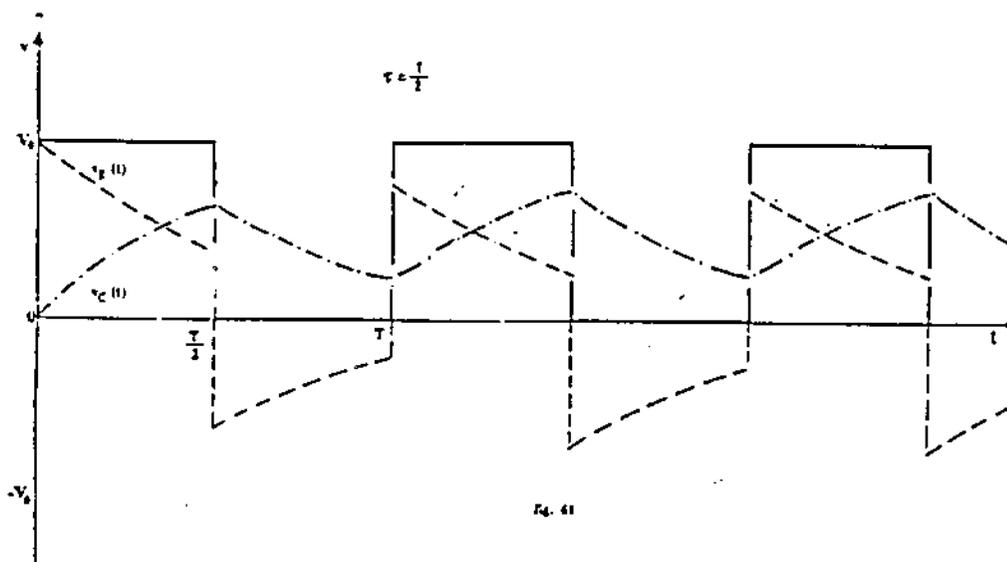
$$v_C(t) = V_0 (1 - k + k^2 - k^3 + \dots - k^{n+1}) e^{-\frac{t - (nT + \frac{T}{2})}{\tau}} \quad (18)$$

mentre negli stessi intervalli si ha

$$v_R(t) = V_0 (1 - k + k^2 - k^3 + \dots - k^n) e^{-\frac{t - nT}{\tau}} \quad (19)$$

$$v_R(t) = -V_0 (1 - k + k^2 - k^3 + \dots - k^{n+1}) e^{-\frac{t - (nT + \frac{T}{2})}{\tau}} \quad (20)$$

L'evoluzione temporale dei segnali  $v_R(t)$  e  $v_C(t)$  è riportata in fig. 61.



Per  $n$  molto grande (praticamente  $\infty$ ) la somma delle serie in parentesi è  $\approx 1/(1+k)$ , per cui si ha:

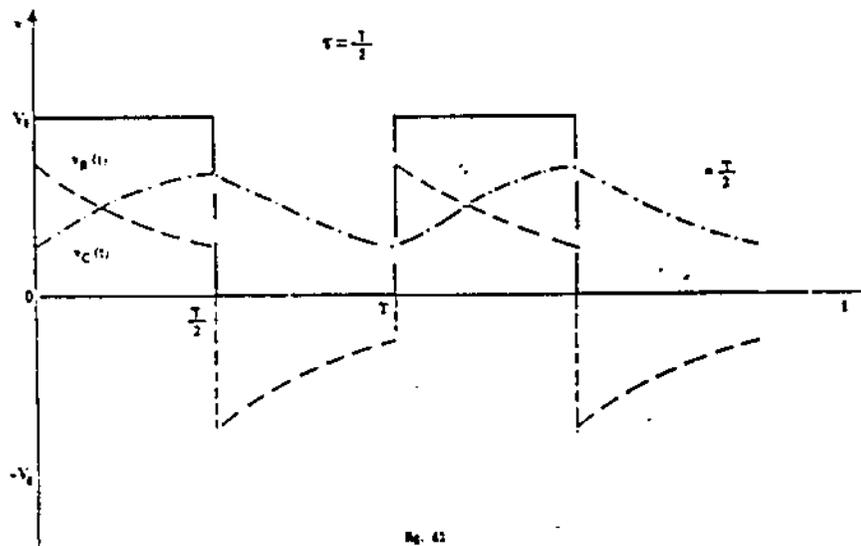
$$v_C(t) \approx V_0 \left[ 1 - \frac{1}{1+k} e^{-\frac{t-nT}{\tau}} \right] \quad (21)$$

$$v_C(t) \approx V_0 \frac{1}{1+k} e^{-\frac{t-(nT+\frac{T}{2})}{\tau}} \quad (22)$$

$$v_R(t) \approx V_0 \frac{1}{1+k} e^{-\frac{t-nT}{\tau}} \quad (23)$$

$$v_R(t) \approx -V_0 \frac{1}{1+k} e^{-\frac{t-(nT+\frac{T}{2})}{\tau}} \quad (24)$$

Le forme d'onda relative ai segnali  $v_R(t)$  e  $v_C(t)$  nella situazione asintotica in cui sono descritte dalle equazioni (21), (22), (23) e (24) sono rappresentate in fig. 62.



Le (23) e (24) per  $T/2 \gg \tau$ , e quindi  $k \ll 1$ , diventano

$$v_R(t) \approx V_0 e^{-\frac{t-nT}{\tau}} \quad (25)$$

$$v_R(t) \approx -V_0 e^{-\frac{t-(nT+\frac{T}{2})}{\tau}} \quad (26)$$

e sono rappresentate nella fig. 63 insieme agli andamenti (21) e (22) della  $v_C(t)$  nelle stesse condizioni. Le (23) e (24) sono indicate a tratteggio.

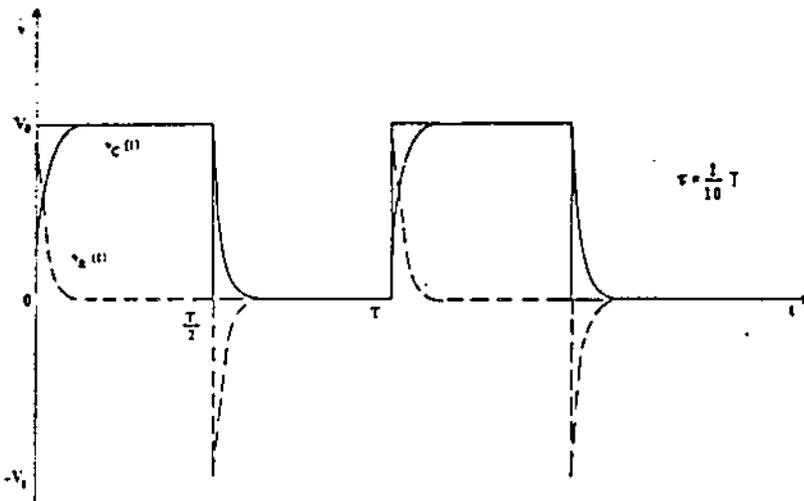


fig. 63

La condizione di derivazione  $|v_R(t)| \ll |v_C(t)|$  è, come si

vede, verificata negli intervalli in cui  $nT < t < nT + \frac{T}{2}$

per  $t - nT \gg r$  e negli intervalli in cui  $nT + \frac{T}{2} < t < (n+1)T$

per  $t - (nT + \frac{T}{2}) \gg r$ ; in tali condizioni si ha

infatti  $v_R(t) \approx 0$ , cioè il segnale ai capi del resistore è direttamente proporzionale alla derivata temporale del segnale d'ingresso.

Si consideri ora il caso in cui  $r \gg \frac{T}{2}$  per cui  $k = e^{-\frac{T}{2r}} \approx 1 - \frac{T}{2r}$

e, posto  $\frac{T}{2r} = \epsilon$  si ha  $\frac{1}{1+k} \approx \frac{1}{2} + \epsilon$ .

Si ottiene quindi in questo caso

$$v_C(t) \approx \frac{V_0}{2} \left[ 1 - 2\epsilon + \frac{t - nT}{\tau} (1 + 2\epsilon) \right] \quad (27)$$

$$v_C(t) \approx \frac{V_0}{2} (1 + 2\epsilon) \left[ 1 - \frac{t - (nT + \frac{T}{2})}{\tau} \right] \quad (28)$$

Le (27) e (28) sono rappresentate nella fig. 64.

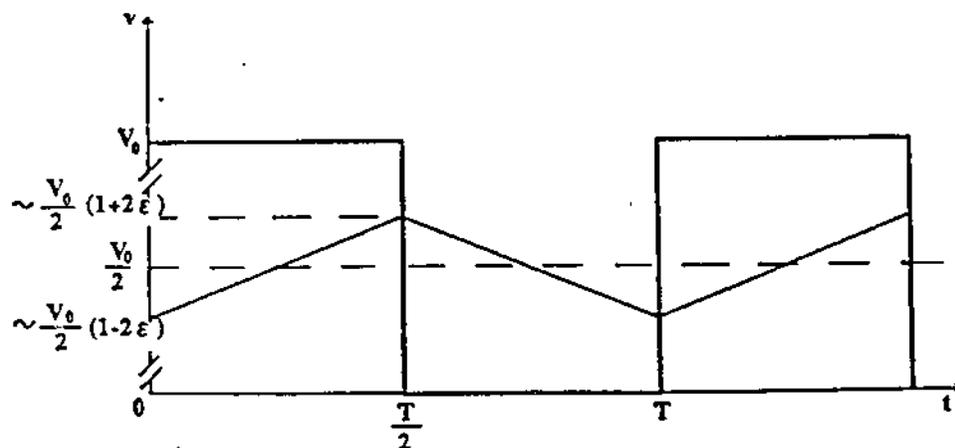
Si noti che:

A) la pendenza del segnale sia nel caso (27) che nel caso (28) è in modulo  $\approx V_0/2\tau$ ;

B) il valor medio del segnale è  $\approx V_0/2$ .

La condizione di integrazione  $|v_C(t)| \ll |v_R(t)|$  è in questo

caso verificata per ogni  $t$  a meno di una costante che è il valor medio di  $v_C(t)$ , cioè  $V_0/2$ .



Se si considera un segnale a onda quadra avente l'andamento riportato in fig. 65

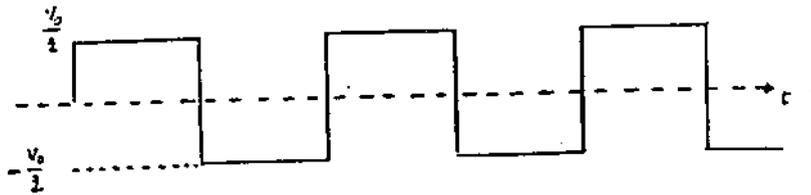


fig. 65

Le (21), (22), (23) e (24) assumono la forma

$$v_C(t) = \frac{V_0}{2} \left[ 1 - \frac{2}{1+k} e^{-\frac{t-nT}{\tau}} \right] \quad (29)$$

$$v_C(t) = -\frac{V_0}{2} \left[ 1 - \frac{2}{1+k} e^{-\frac{t-(nT+\frac{T}{2})}{\tau}} \right] \quad (30)$$

$$v_R(t) = \frac{V_0}{2} \left[ \frac{2}{1+k} e^{-\frac{t-nT}{\tau}} \right] \quad (31)$$

$$v_R(t) = -\frac{V_0}{2} \left[ \frac{2}{1+k} e^{-\frac{t-(nT+\frac{T}{2})}{\tau}} \right] \quad (32)$$

Le (31) e (32) sono identiche alle (23) e (24) mentre per  $\tau \gg T/2$  le (29) e (30) diventano:

$$v_C(t) \approx -\frac{V_0}{2} \left[ 2t + \frac{t-nT}{\tau}(1+2k) \right] \quad (33)$$

$$v_C(t) \approx \frac{V_0}{2} \left[ 2e^{-\frac{t - (nT + \frac{T}{2})}{\tau}} \right] \quad (34)$$

### 2.3.3 Segnale sinusoidale.

I circuiti RC e CR, in regime sinusoidale, sono stati già studiati riguardandoli come circuiti attenuatori. Si tratta ora di studiare quali siano le condizioni che devono verificarsi affinché essi si comportino come circuiti derivatori o integratori.

Si consideri un circuito RC alimentato da un generatore di tensione sinusoidale di ampiezza  $V_0$  e di frequenza  $\gamma$ .

Per i segnali ai capi di R e C si possono scrivere, usando il metodo simbolico, le equazioni seguenti:

$$V_R = V_0 \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$V_C = V_0 \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

La condizione di derivazione  $|v_R(t)| \ll |v_C(t)|$  per ogni t equivale a

$$V_R \ll V_C$$

cioè, trattandosi di elementi in serie,

$$R \ll \frac{1}{\omega C}$$

Questa condizione è verificata per

$$RC = \tau \ll \frac{1}{\omega} \quad , \text{ ossia} \quad T \gg 2\pi\tau$$

In tal caso si ha

$$\bar{V}_R \approx \bar{V}_o \cdot j\omega RC$$

cioè il segnale ai capi di R è proporzionale, attraverso la costante  $\tau$ , alla derivata temporale del segnale di ingresso.

La condizione di integrazione  $|v_C(t)| \ll |v_R(t)|$  per ogni  $t$

equivale a  $V_C \ll V_R$

e quindi a

$$\frac{1}{\omega C} \ll R$$

Tale condizione è verificata per  $RC \gg \frac{1}{\omega}$ , cioè  $T \ll 2\pi\tau$ .

Si ha allora

$$\bar{V}_C \approx \bar{V}_o \cdot \frac{1}{j\omega RC}$$

cioè il segnale ai capi di C è proporzionale, attraverso la costante  $1/\tau$ , alla primitiva sinusoidale del segnale di ingresso.

## 2.4 Studio del circuito RLC serie in regime non sinusoidale.

In analogia allo studio dei circuiti RC e CR con segnali di ingresso a gradino ed a onda quadra, si vuole ora studiare la risposta a tali segnali da parte di un circuito RLC serie.

a) segnale a gradino.

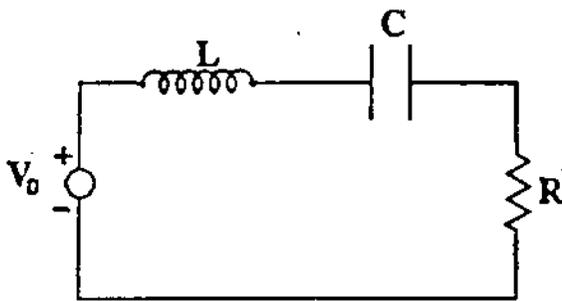


fig. 66

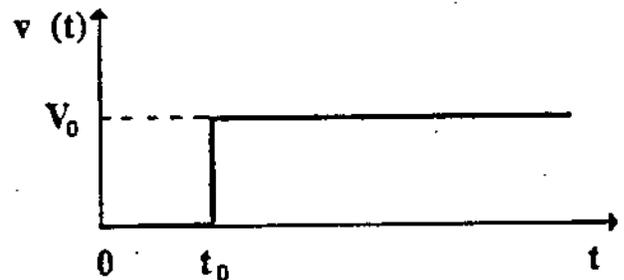


fig. 67

Posto  $t_0 = 0$  e supposto  $v_C(t_0) = 0$ , per  $t > 0$  l'equazione del circuito è

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' + R i(t) = V_0$$

da cui, derivando rispetto al tempo,

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

La soluzione di tale equazione è del tipo

$$i(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

ove

$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

mentre  $C_1$  e  $C_2$  sono costanti da determinare in base alle condizioni iniziali.

Il caso sperimentalmente più interessante si presenta quando

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$$

cioè

$$R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

(e quindi  $Q > 1/2$ ).

Si ha in tal caso, posto  $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 e^{-j\omega t} + C_2 e^{j\omega t})$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$i(0) = 0 \quad \text{e} \quad L \frac{di(t)}{dt} = V_0$$

tale equazione diventa

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega \cdot L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$$

da cui

$$v_R(t) = R \frac{V_o}{\omega \cdot L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$$

si ottiene così un'oscillazione smorzata di periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

e di "coefficiente di smorzamento"  $\frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L}$

L'andamento della  $v_R(t)$  è riportato in fig. 68.

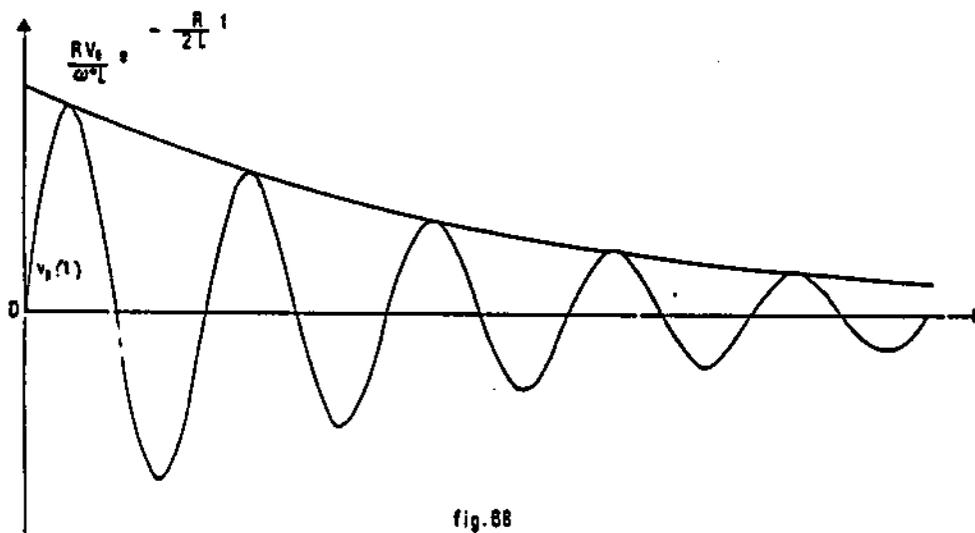


fig. 68

b) segnale a onda quadra.

Si considera qui soltanto il caso in cui  $R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$  e  $\frac{T}{2} \gg \tau$ ,

essendo  $T$  il periodo dell'onda quadra.

Durante la semionda positiva, il circuito si comporta in modo del

tutto analogo a quello già studiato con il segnale a gradino; si ha cioè

$$v_R(t) = \frac{RV_0}{\omega \cdot L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$$

in cui  $V_0$  è l'ampiezza dell'onda quadra.

Per  $t = T/2$   $v_R(t) \approx 0$  e  $v_C(t) \approx V_0$ .

per  $\frac{T}{2} \leq t < T$ , il condensatore si scarica sugli altri elementi passivi e la corrente è

$$i(t) = -\frac{V_0}{\omega \cdot L} e^{-\frac{R}{2L}(t-\frac{T}{2})} \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{T}{2} \right) \right]$$

per cui

$$v_R(t) = -R \frac{V_0}{\omega \cdot L} e^{-\frac{R}{2L}(t-\frac{T}{2})} \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{T}{2} \right) \right]$$

I corrispondenti andamenti sono riportati in fig. 69 per  $T = 10 \tau$ .

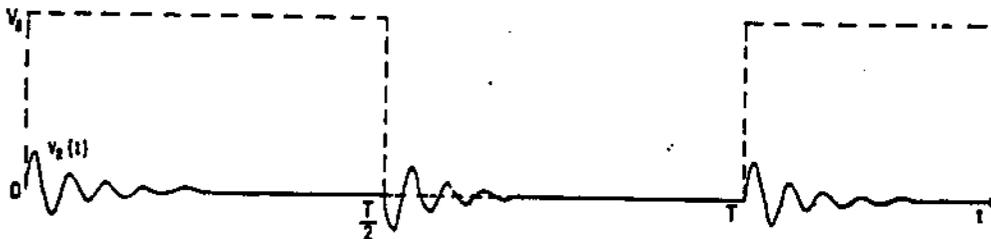


fig. 69

### 3. Diodo

#### 3.1 Cenni sulla struttura dei cristalli

Lo studio della struttura di un atomo, effettuata mediante l'applicazione delle leggi della meccanica quantistica, fornisce, come è noto, il seguente risultato: i singoli elettroni che costituiscono il guscio di un atomo isolato possono muoversi soltanto su particolari orbite. A ciascuna di tali orbite corrisponde un ben determinato livello energetico caratterizzato dal numero quantico totale  $n$  (intero), cui è associata l'energia  $E_n$  dell'elettrone

$$E_n = -k \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, \dots,$$

ove  $k$  è una costante.

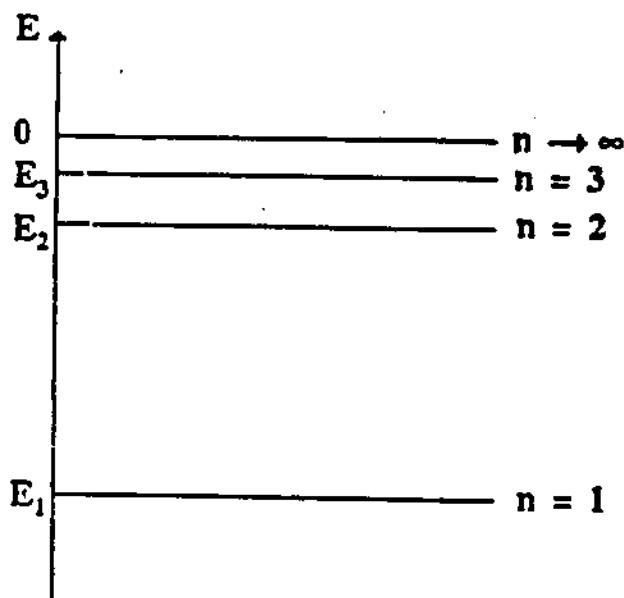


Fig. 70

Diversa è la situazione nel caso di un solido. In esso gli atomi sono disposti in modo regolare ai vertici dei moduli del reticolo cristallino e per effetto delle interazioni tra i numerosi atomi presenti ciascun livello energetico si suddivide in un insieme di  $N$  sottolivelli (ove  $N$  è il numero di atomi del cristallo) diffe-

renti l'uno dall'altro per piccole quantità di energia. Essendo  $N$  molto grande ( $\sim 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ), l'insieme di tali sottolivelli può essere riguardato come una struttura continua alla quale si dà il nome di "banda".

I livelli energetici permessi per gli elettroni in un cristallo sono quindi raggruppabili in bande di energia; tra due "bande permesse" consecutive esiste un intervallo di energia che costituisce la "banda proibita".

Alla temperatura  $T=0 \text{ K}$  gli elettroni occupano i livelli più bassi. In tale situazione un cristallo si comporta come un conduttore o un isolante a seconda che il numero di elettroni di ciascun atomo sia dispari o pari.

Nel primo caso, a cominciare dalla banda di energia minore, si trovano bande permesse completamente piene fino ad una che è piena per metà; le rimanenti sono tutte vuote.

Nel secondo caso le bande permesse sono o completamente piene (quelle di energia inferiore ad un certo livello) o completamente vuote. La banda di energia maggiore completamente piena prende il nome di banda di valenza mentre la banda di energia minore, vuota o parzialmente piena, prende il nome di banda di conduzione.

Affinchè un cristallo possa condurre è necessario che qualche elettrone sia presente nella banda di conduzione: ciò accade per  $T=0$  soltanto per i conduttori. Per  $T>0$  qualche elettrone, per effetto dell'agitazione termica, acquista l'energia sufficiente a passare dalla banda di valenza alla banda di conduzione superando l'intervallo di energia costituito dalla banda proibita.

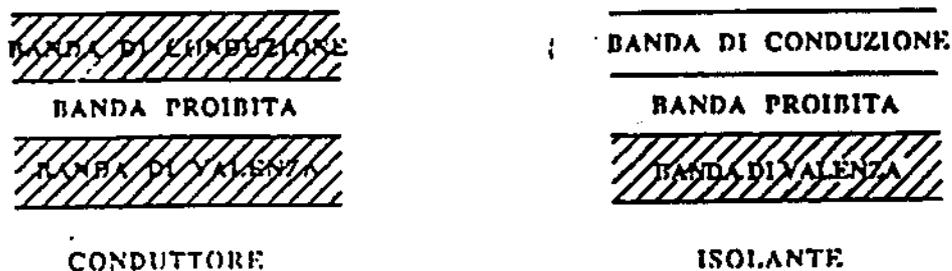


Fig. 71

In tal caso anche un non conduttore presenta una conducibilità non nulla. Tale conducibilità è praticamente nulla per gli isolanti per i quali la larghezza della banda proibita è dell'ordine di 10 eV, mentre può diventare considerevole per i semiconduttori che hanno la struttura degli isolanti, con banda proibita della larghezza di  $\sim 1$  eV.

### 3.2 Proprietà dei semiconduttori

A causa del piccolo intervallo di energia che separa il livello superiore della banda di valenza dal livello inferiore della banda di conduzione, la conducibilità dei semiconduttori è, a parità di temperatura, molto maggiore di quella degli isolanti e, ovviamente, aumenta al crescere della temperatura.

Si deve tener conto inoltre del fatto che, per ogni elettrone che passa dalla banda di valenza alla banda di conduzione, nella banda di valenza viene creata una "lacuna", che ha una sua mobilità e si comporta come se fosse costituita da una carica positiva. La corrente in un semiconduttore è pertanto dovuta sia al moto degli elettroni che a quello delle lacune.

La conducibilità in un semiconduttore può essere aumentata aggiungendo al cristallo, nel suo processo di crescita, impurità di valenza diversa da quella degli atomi che lo costituiscono ("drogaggio" del cristallo).

Si consideri ad esempio il caso del Ge o del Si, che hanno entrambi quattro elettroni nella banda di valenza. Se il drogaggio viene eseguito con As, pentavalente, un atomo di As sostituisce nel reticolo cristallino un atomo di Ge in modo tale che 4 dei suoi 5 elettroni hanno energie comprese nella banda di valenza e il 5° ha energia situata nella banda di conduzione.

Nel caso in cui per il drogaggio si usino atomi di B, trivalente, si ha un eccesso di lacune nella banda di valenza. Si ottengono in tal modo, nel primo caso semiconduttori di tipo n in cui la conducibi-

lità è dovuta ad un eccesso di elettroni nella banda di conduzione; nel secondo caso si ottengono semiconduttori di tipo p in cui la conducibilità è dovuta ad un eccesso di lacune nella banda di valenza.

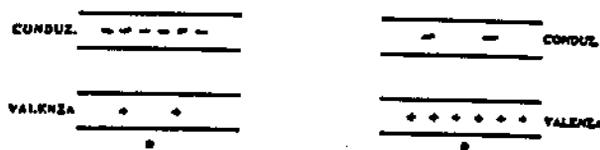


Fig. 72

### 3.3 Diodo a giunzione

Se un semiconduttore di tipo n e uno di tipo p vengono "saldati" insieme formando una "giunzione" si ha un processo di diffusione per cui gli elettroni passano dalla regione n alla regione p e le lacune dalla regione p alla n.

Tale diffusione produce, ai lati della giunzione, la formazione di una sorta di doppio strato che impedisce al processo di continuare, consentendo semplicemente scambi nell'ambito di un equilibrio statico (v. fig. 73).

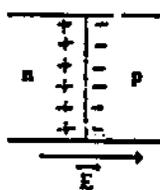


Fig. 73

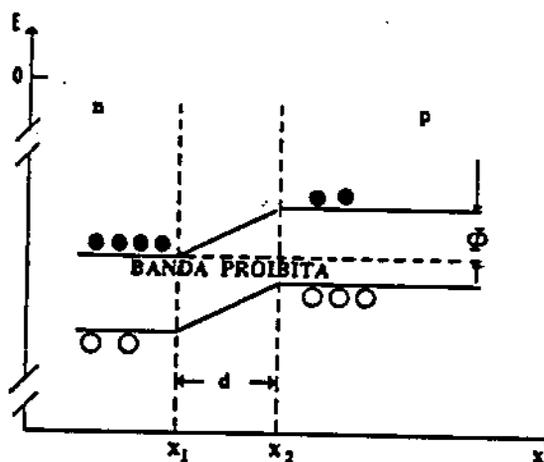


Fig. 74

La presenza del campo elettrico dovuto alla formazione del doppio strato produce un abbassamento dei livelli energetici degli elettroni della banda di conduzione nella zona n e un innalzamento per

quelli che si trovano nella zona p. Tra i livelli inferiori della banda di conduzione nelle due zone si viene così a creare una differenza di energia  $\phi$  (v. fig.74).

Limitando, per semplicità, le considerazioni relative al passaggio di corrente soltanto agli elettroni si può osservare che:

- i pochi elettroni che dalla zona p arrivano in  $x_2$  passano nella zona n in quanto favoriti dal campo  $\vec{E}$ ;
- i molti elettroni che dalla zona n arrivano in  $x_1$  trovano nel campo  $\vec{E}$  un ostacolo alla diffusione nella zona p, e possono realizzarla soltanto se la loro energia è  $> \phi$ .

La probabilità P che, alla temperatura assoluta T un elettrone abbia una energia  $> \phi$  è, per la statistica di Boltzmann,

$$P = e^{-\frac{\phi}{kT}} \quad (k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1})$$

(v. nota a piè di pag.)

Pertanto la corrente elettronica da n a p ha un'intensità che è proporzionale alla probabilità P e può scriversi

$$I_{np} = A e^{-\frac{\phi}{kT}}$$

#### NOTA

Il numero di elettroni di energia compresa tra  $\xi$  e  $\xi + d\xi$  può scriversi:

$$dN = C e^{-\frac{\xi}{kT}} d\xi$$

quindi il numero di elettroni di energia  $\xi > \phi$  risulta

$$N(\xi > \phi) = C \int_{\phi}^{\infty} e^{-\frac{\xi}{kT}} d\xi = C k T e^{-\frac{\phi}{kT}}.$$

Il numero totale di elettroni è:

$$N_{\text{tot}} = C \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi}{kT}} d\xi = k T C$$

per cui, per N molto grande,

$$P = \frac{N(\xi > \phi)}{N_{\text{tot}}} = e^{-\frac{\phi}{kT}}$$

L'intensità della corrente  $I_{0,pn}$  da p a n, essendo, in condizioni di equilibrio statistico, nulla l'intensità totale attraverso la giunzione, deve essere opposta a  $I_{0,np}$ ; si ha cioè uguaglianza tra i rispettivi valori assoluti

$$I_{0,pn} = I_{0,np} = A e^{-\frac{\phi}{kT}} = I_0.$$

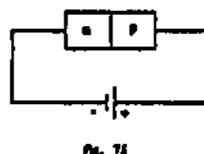
### 3.4 Polarizzazione di un diodo e caratteristica di esso

Un diodo può essere polarizzato applicando una differenza di potenziale ai suoi terminali. L'effetto di tale polarizzazione è quello di produrre una variazione dei livelli energetici.

Si distinguono due casi.

#### a) Polarizzazione diretta

Si ottiene connettendo la zona p con il polo positivo e la zona n con il polo negativo di un generatore di tensione continua (v. fig. 75).



La differenza di energia tra il livello inferiore della banda di conduzione delle zone p e n risulta di conseguenza  $\phi - eV$ , essendo V la differenza di potenziale applicata. Ciò favorisce il flusso di elettroni da n a p mentre il flusso inverso rimane invariato, non dipendendo dal valore del dislivello energetico.

Si ha pertanto una corrente elettronica totale che circola da n verso p la cui intensità è

$$I_{np} - I_{0,pn} = A e^{-\frac{\phi - eV}{kT}} - A e^{-\frac{\phi}{kT}} =$$

$$= A e^{-\frac{\phi}{kT}} \left( 1 - e^{-\frac{eV}{kT}} \right) = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{eV}{kT}} \right).$$

Il diodo in tal caso si dice "in conduzione".

#### b) Polarizzazione inversa

Si ottiene connettendo il generatore come in fig. 76.

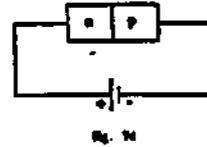
Il dislivello energetico risulta essere in questo caso  $\phi + eV$  e l'in-

tensità della corrente elettronica che circola da p verso n è

$$I_{epn} - I_{np} = A e^{-\frac{\phi}{kT}} - A e^{-\frac{\phi + eV}{kT}} =$$

$$= I_0 (1 - e^{-\frac{eV}{kT}}).$$

Il diodo in questo caso si dice "in interdizione".



Le due equazioni possono riassumersi nella seguente:

$$I = I_0 (e^{\frac{eV}{kT}} - 1) \quad (35)$$

in cui  $I$  è ora l'intensità della corrente di verso convenzionale (opposta a quella elettronica) e  $V$  è la differenza di potenziale tra la zona p e la zona n (per cui è  $V > 0$  in polarizzazione diretta e  $V < 0$  in polarizzazione inversa).  $I$  risulta in ogni caso concorde con  $V$ .

L'equazione (35) definisce la caratteristica del diodo ed è rappresentata in fig. 77.

Si può definire una resistenza dinamica di giunzione

$$r^* = \frac{dV}{dI} = \frac{1}{\frac{dI}{dV}}$$

la quale è ovviamente variabile in funzione della tensione applicata, salvo nei tratti in cui la caratteristica può essere approssimata con una retta. In essi si ha

$$R_{dir}^* \ll R_{inv}^*$$

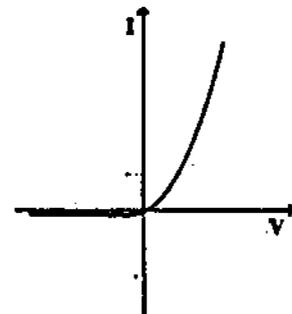


fig. 77

### 3.5 Impiego di un diodo in regime sinusoidale

Estrapolando la disuguaglianza precedente si può pensare a un diodo ideale come a un elemento passivo avente resistenza nulla in condizioni di polarizzazione diretta e resistenza infinita in condizioni

di polarizzazione inversa. Ciò consente di rappresentare in modo semplice l'andamento della intensità della corrente che attraversa il diodo e della differenza di potenziale ai capi di esso quando venga alimentato da un generatore che fornisce una tensione variabile sinusoidalmente nel tempo (fig.78 a).

Nella fig.78 b sono rappresentate la tensione  $v(t)$  fornita dal generatore, la corrente  $i_D(t)$  che attraversa il diodo (i valori della quale, durante i semiperiodi in cui il diodo è polarizzato direttamente, sono determinati, nella ipotesi semplificativa fatta, dalla sola resistenza interna del generatore) e la tensione  $v_D(t)$  ai capi del diodo.

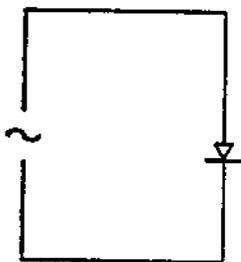


fig.78a

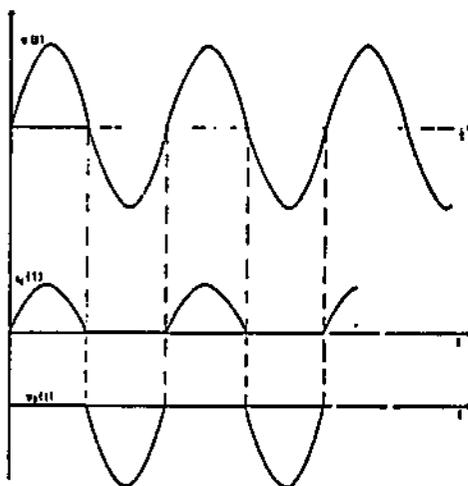


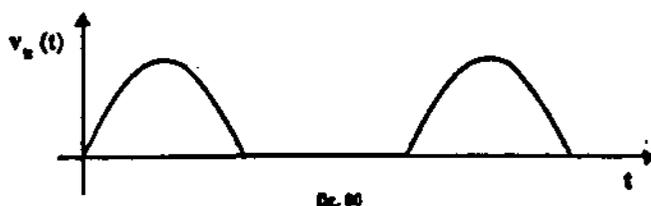
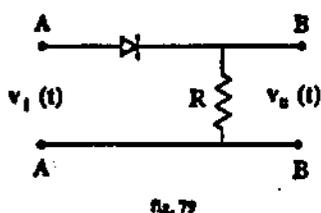
fig.78b

Questo comportamento del diodo consente la sua utilizzazione come "raddrizzatore"; è infatti possibile realizzare mediante esso un quadrupolo tale che, applicando in ingresso un segnale di tensione sinusoidale si ottenga in uscita un segnale di tensione continua, cioè di segno costante.

### 3.5.1 Raddrizzamento a una semionda. Fattore di ondulazione

In riferimento al circuito riportato in fig. 79, in cui R è una resistenza molto maggiore della resistenza dinamica diretta del diodo e molto minore di quella inversa, si supponga di applicare tra i terminali di ingresso AA un segnale sinusoidale di data frequenza.

Si ottiene, in uscita, un segnale il cui andamento temporale è riportato in fig. 80, l'ampiezza del quale è circa uguale a quella del segnale in ingresso.



Come si vede, si tratta di un segnale continuo, il cui andamento temporale differisce però sensibilmente da quello fornito da un generatore di tensione continua e costante. Per indicare la "bontà" del raddrizzamento si suole definire il fattore  $r$  di ondulazione ("ripple") nel seguente modo:

$$r = \frac{[v_u(t) - V_m]_{qm}}{V_m}$$

in cui  $V_m$  è il valor medio del segnale  $v_u(t)$  e il simbolo

$[v_u(t) - V_m]_{qm}$  è il valore quadratico medio della differenza tra  $v_u(t)$  e il suo valor medio.

E' evidente che tanto minore è  $r$ , tanto migliore è il raddrizzamento.

Si ha in generale, per un qualsiasi segnale periodico  $v(t)$  di valor medio  $V_m$ ,

$$\begin{aligned} [v(t) - V_m]_{qm} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} [v(t) - V_m]^2 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \left[ \int_t^{t+T} v^2(t) dt + V_m^2 T - 2 V_m \int_t^{t+T} v(t) dt \right]} = \\ &= \sqrt{[v(t)]_{qm}^2 + V_m^2 - 2 V_m} = \sqrt{[v(t)]_{qm}^2 - V_m^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$r = \sqrt{\left(\frac{v(t)_{qm}}{V_m}\right)^2 - 1} .$$

Nel caso attuale in cui si operi su un segnale sinusoidale un raddrizzamento a una sola semionda,

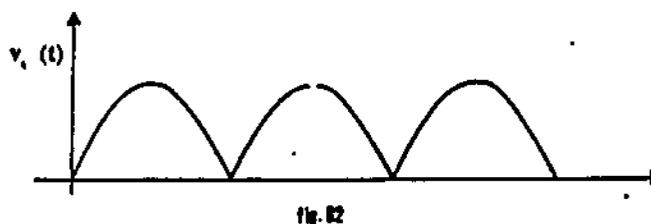
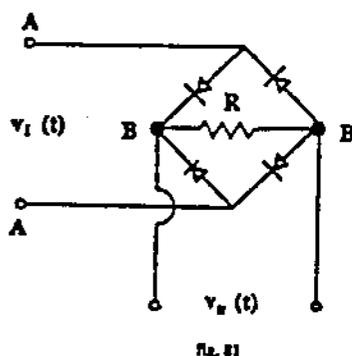
$$[v_u(t)]_{qm} = \frac{V}{2} , \quad V_m = \frac{V}{\pi}$$

per cui

$$r = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1} \approx 1,21.$$

### 3.5.2 Raddrizzamento a due semionde

Il circuito di fig. 81 rappresenta un ponte di diodi, che può essere utilizzato per ottenere un raddrizzamento a due semionde qualora si applichi fra i terminali di ingresso AA un segnale di tensione sinusoidale.



Come è evidente dall'osservazione della fig. 81, tra i terminali di uscita BB è presente una ddp  $v_u(t)$  sempre dello stesso segno, con l'andamento rappresentato in fig. 82.

In questo caso si ha

$$[v_u(t)]_{qm} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad V_m = \frac{2V}{\pi}$$

per cui

$$r = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1} \approx 0,48 .$$

Le proprietà raddrizzatrici del diodo possono essere utilizzate, come sarà illustrato in seguito, per misurare ddp e intensità di corrente variabili sinusoidalmente nel tempo.

#### 4 - Misurazione di tensione e corrente variabili periodicamente in funzione del tempo

Si vogliono ora studiare le risposte fornite da uno strumento analogico a bobina mobile del tipo già descritto per misurazioni di correnti e tensioni continue, nel caso in cui la sollecitazione sia costituita da un segnale sinusoidale o periodico.

Lo studio in questione riguarda la risposta fornita dallo strumento in condizioni stazionarie, che si instaurano dopo un intervallo di tempo molto maggiore delle costanti di tempo che caratterizzano la fase transitoria.

##### 4.1 Risposta ad una sollecitazione sinusoidale

L'equazione del moto dell'equipaggio mobile di uno strumento a bobina mobile si può scrivere, com'è noto,

$$J\ddot{\Theta} + \beta\dot{\Theta} + C\Theta = m(t) \quad (36)$$

ove  $m(t)$  è il momento della coppia di forze attiva la quale dipende dalla grandezza da misurare (ddp o intensità di corrente).

Nell'ipotesi che  $m(t)$  vari sinusoidalmente col tempo, in condizioni stazionarie la (36) può essere scritta, col metodo simbolico, come segue:

$$(-\omega^2 J - j\omega\beta + C)\vec{\Theta} = \vec{M}$$

da cui

$$\vec{\Theta} = \frac{\vec{M}}{C - J\omega^2 + j\beta\omega}$$

Il modulo  $\Theta$  di  $\vec{\Theta}$  fornisce l'ampiezza dell'oscillazione:

$$\Theta = \frac{M}{\sqrt{(C - J\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}$$

la quale nel caso di smorzamento critico, in cui  $\beta^2 = 4J C = \beta_c^2$

diventa

$$\Theta = \frac{M}{C + j\omega^2} \quad (37)$$

che, tenendo conto della relazione  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{C}}$  ove  $T_0$  è il periodo proprio di oscillazione dell'equipaggio mobile, ed indicando con  $T$  il periodo di  $m(t)$  si può scrivere

$$\Theta = \frac{M}{C \left[ 1 + \left( \frac{T_0}{T} \right)^2 \right]} \quad (38)$$

Il termine stazionario della soluzione della (36) che, come si è detto, è l'unico che abbia interesse nel caso attuale, può dunque scriversi

$$\Theta = \Theta \cos(\omega t + \delta)$$

ove  $\Theta$ , nel caso attualmente considerato di smorzamento critico, è espresso dalla (38).

La differenza di fase  $\varphi$  tra la deviazione  $\Theta(t)$  dell'equipaggio mobile ed il momento  $m(t)$  della coppia attiva è

$$\varphi = \arctg \frac{\beta \omega}{C - j\omega^2} = \arctg \frac{\beta \frac{2\pi}{T}}{C \left[ 1 - \left( \frac{T_0}{T} \right)^2 \right]} \quad (39)$$

Le relazioni (38) e (39) consentono di studiare il comportamento dell'equipaggio mobile; i casi di maggior interesse sono i seguenti:

a)  $T \gg T_0$ , in cui  $\Theta \approx \frac{M}{C}$  e  $\varphi \approx \arctg \frac{2\pi\beta}{CT}$

b)  $T \ll T_0$ , in cui  $\Theta \approx 0$  e quindi  $\varphi \approx 0$ .

Come si vede:

- nel caso a), quando cioè il periodo  $T$  di  $m(t)$ , che è anche il periodo della grandezza in misura, è molto maggiore del periodo proprio  $T_0$  dello strumento, la deviazione dell'equipaggio mobile segue le variazioni della grandezza in misura con uno sfasamento che è tanto minore quanto maggiore è  $T$ .

Per valori di  $T$  sufficientemente elevati la deflessione istantanea dell'equipaggio mobile si può esprimere come  $\Theta(t) = \frac{m(t)}{C}$ ,

relazione analoga alla  $\vartheta_0 = \frac{1}{C} f(I)$  che si riferisce a condizioni di equilibrio nel caso di corrente continua e costante.

- nel caso b) invece l'equipaggio mobile non riesce a seguire le variazioni della grandezza che ne sollecita il moto, e la deflessione  $\vartheta$  è praticamente nulla.

#### 4.2 Risposta ad una sollecitazione periodica

Le considerazioni precedenti, valide nell'ipotesi che  $m(t)$  abbia andamento sinusoidale, possono essere estese al caso in cui  $m(t)$  abbia un andamento periodico qualsiasi.

Infatti, sviluppando  $m(t)$  in serie di Fourier si ha

$$m(t) = M_0 + \sum_n M_n \cos\left(n \frac{2\pi t}{T} + \alpha_n\right) \quad (40)$$

per cui, sostituendo questa espressione nel secondo membro della (36), si ottiene un'equazione la cui soluzione stazionaria, per la linearità della (36), è la somma delle soluzioni stazionarie delle infinite equazioni il cui primo membro è uguale al primo membro della (36) ed il secondo è costituito via via da uno degli addendi dello sviluppo (40).

Il modulo di ciascuna soluzione, nel caso in cui il moto dell'equipaggio sia aperiodico critico, può essere scritto (v. eq. 38)

$$\vartheta_n = \frac{M_n}{C \left[1 + \left(\frac{nT_0}{T}\right)^2\right]} \quad (41)$$

per cui la soluzione stazionaria complessivamente può scriversi

$$\vartheta(t) = \frac{M_0}{C} + \sum_n \frac{M_n}{C \left[1 + \left(\frac{nT_0}{T}\right)^2\right]} \cos\left(n \omega t + \delta_n\right)$$

Il caso più interessante, dal punto di vista delle applicazioni pratiche, è quello in cui il periodo  $T$  della  $m(t)$  soddisfa la condizione  $T_0 \gg T$ ; ne segue, a maggior ragione,  $T_0 \gg T/n$ , ove  $T/n$  è il periodo dell'armonica di ordine  $n$  dello sviluppo di Fourier.

La relazione (41) si riduce allora alla

$$\Theta = \frac{M_0}{C}$$

cioè la deviazione dell'equipaggio mobile raggiunge un valore "di regime" e lo mantiene indipendentemente dal tempo. Tale valore può essere precisato integrando la (40) rispetto al tempo sull'intervallo di un periodo; si ottiene infatti

$$\int_0^T m(t) dt = M_0 T + \int_0^T \sum_n M_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \alpha_n\right) dt$$

da cui

$$m_0 = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) dt = \overline{m(t)}$$

ove con  $\overline{m(t)}$  si è indicato il valor medio del momento della coppia deviatrice. Si può quindi esprimere la deflessione costante  $\Theta$  dell'equipaggio mobile come

$$\Theta = \frac{\overline{m(t)}}{C}$$

Pertanto, verificandosi la condizione  $T \ll T_0$ , la deviazione dell'equipaggio mobile è proporzionale al valor medio del momento della coppia deviatrice; perciò gli strumenti a scala lineare, per i quali  $m(t) = k i(t)$ , hanno

$$\Theta = \frac{k}{C} \overline{i(t)}$$

e consentono quindi di leggere il valor medio della grandezza in misura; gli strumenti a scala quadratica, per i quali  $m(t) = k i^2(t)$ , hanno

$$\Theta = \frac{k}{C} \overline{i^2(t)} = \frac{k}{C} \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{k}{C} I_{eff}^2$$

e possono quindi essere usati per la misura di grandezze periodiche a condizione che i valori letti sulla scala tarata per grandezze indipendenti dal tempo siano interpretati come valori efficaci della grandezza in misura.

#### 4.3 Impiego di uno strumento analogico per misurazioni di correnti e tensioni sinusoidali

Le caratteristiche in uno strumento a bobina mobile sono tali che la condizione  $T \ll T_0$  è generalmente verificata per segnali sinusoidali di frequenza dell'ordine dell'hertz. Ne segue che per frequenze superiori la risposta a una sollecitazione sinusoidale è una deviazione praticamente nulla.

Pertanto, per eseguire la misurazione di una corrente o di una tensione sinusoidale si trasforma la sollecitazione medesima in un'altra, periodica, della stessa frequenza e di valor medio non nullo. Lo strumento fornisce quindi, come si è visto, una risposta proporzionale a tale valor medio.

Per ottenere questa trasformazione si utilizzano le proprietà raddrizzatrici dei diodi.

In linea di principio sarebbe sufficiente inserire un diodo in serie alla bobina mobile B dello strumento (fig.83), ottenendo in



fig 83

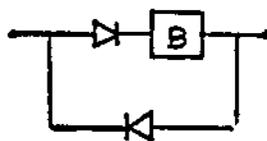


fig 84

tal modo un segnale di corrente raddrizzato a una semionda. Uno strumento così modificato, posto in serie in un circuito allo scopo di misurare una intensità di corrente, perturberebbe però drasticamente la grandezza in misura; questa perturbazione viene evitata ponendo in parallelo al sistema di fig.83 un diodo con polarità invertita (fig.84).

Ricordando quanto detto circa il valor medio di un segnale raddrizzato a una semionda, si ha che la deviazione angolare  $\vartheta$  dell'equi-

paggio mobile è

$$\vartheta = \frac{k I}{C \pi} = \frac{k}{C} \frac{2}{\pi} I_{\text{eff}}$$

Si suole tarare la scala dello strumento in termini di  $I_{\text{eff}}$ ; ciò

si ottiene semplicemente cambiando la costante di proporzionalità, come si vede dalla formula precedente. La non linearità della caratteristica dei diodi impiegati fa sì che la scala dello strumento per misurazioni di intensità di corrente sinusoidale non possa coincidere esattamente con quella per le correnti continue e costanti. Per misurazioni di ddp sinusoidali non è necessario l'impiego del secondo diodo, poichè lo strumento viene inserito in parallelo. Uno strumento che consenta di misurare, utilizzando la stessa bobina mobile, sia correnti e tensioni continue e costanti, sia, mediante l'impiego dei diodi, correnti e tensioni sinusoidali, fornisce per queste ultime grandezze misure meno precise a causa della dipendenza dalla temperatura delle caratteristiche dei diodi.

Il tipo di raddrizzamento descritto consente di controllare, invertendo i contatti con i puntali dello strumento, la simmetria delle due semionde della sinusoide.

Utilizzando un ponte di diodi secondo lo schema di fig.85 si ottiene un raddrizzamento a due semionde e conseguentemente un raddoppiamento della sensibilità dello strumento.

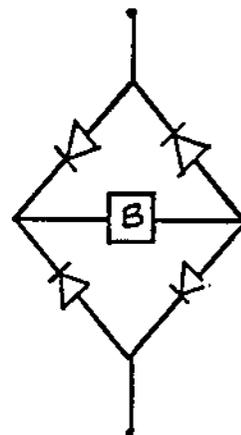


fig. 85

ooo00ooo

## INDICE

	pg
1 - Reti elettriche in regime sinusoidale	1
1.1 Generalità sulle grandezze periodiche	1
1.2 Rappresentazione simbolica di una grandezza sinusoidale	5
1.3 Derivata di una grandezza sinusoidale	8
1.4 Integrale di una grandezza sinusoidale	9
1.5 Relazioni tra tensione e corrente nei circuiti in regime sinusoidale	9
1.5.1 Principi di Kirchhoff	10
1.5.2 Relazioni tra tensione e corrente per elementi passivi ideali	11
1.5.3 Impedenza	14
1.5.4 Impedenza equivalente di una rete passiva	15
1.5.5 Esempi di risoluzione di circuiti	18
1.5.6 Teoremi di Thevenin e di Norton	20
1.6 Circuiti attenuatori o sfasatori	23
1.6.1 Quadrupoli passivi	23
1.6.2 Alcuni particolari circuiti attenuatori o sfasatori	24
1.7 Circuiti risonanti	29
1.7.1 Circuito RLC serie	30
1.7.2 Circuito RLC serie come filtro passa-banda	32
1.7.3 Sovratensioni	38
1.7.4 Circuito RLC parallelo	39
1.7.5 Circuito antirisonante in corrente	39
1.7.6 Circuito antirisonante in tensione	41
1.8 Elementi reali di circuito	44
1.8.1 Schema equivalente per un bipolo passivo	47
1.8.2 Schemi di circuiti equivalenti con elementi reali	49
1.9 Potenza in regime sinusoidale	50

2 - Circuiti derivatori e integratori	PE 53
2.1 Circuiti derivatori	53
2.2 Circuiti integratori	54
2.3 Circuiti derivatori ed integratori con segnali in ingresso di tipo particolare	57
2.3.1 Segnale a gradino	57
2.3.2 Segnale a onda quadra	59
2.3.3 Segnale sinusoidale	67
2.4 Studio del circuito RLC serie in regime non si- nusoidale	69
3 - Diodo	73
3.1 Cenni sulla struttura dei cristalli	73
3.2 Proprietà dei semiconduttori	75
3.3 Diodo a giunzione	76
3.4 Polarizzazione di un diodo e caratteristica di esso	78
3.5 Impiego di un diodo in regime sinusoidale	79
3.5.1 Raddrizzamento a una semionda. Fattore di on- dulazione	80
3.5.2 Raddrizzamento a due semionde	82
4 - Misurazione di tensione e corrente variabili periodicamente in funzione del tempo	84
4.1 Risposta ad una sollecitazione sinusoidale	84
4.2 Risposta ad una sollecitazione periodica	86
4.3 Impiego di uno strumento analogico per misu- razioni di correnti e tensioni sinusoidali	88

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA

"La Sapienza"

Dipartimento di Fisica

Appunti delle lezioni

di

ESPERIMENTAZIONE FISICA

M.Alessio - S.Improta

UNITA' DI MISURA

Il presente fascicolo è la copia del Decreto  
del Presidente della Repubblica 12 agosto 1982, n.802  
sull'attuazione della direttiva CEE n.80/181 relativa  
alle unità di misura, così come è riportato nel Sup-  
plemento ordinario alla Gazzetta Ufficiale n.302 del  
3 novembre 1982.

segue Articolo 1

1.2.2. Il testo dell'avvertenza è sostituito da quello seguente:

"I prefissi ed i loro simboli di cui al punto 1.3. si applicano alle unità ed ai simboli di cui sopra, ad eccezione del millimetro di mercurio e del suo simbolo. Il multiplo  $10^2$  a è tuttavia denominato "ettaro"."

1.3. Nel capitolo II:

1.3.1. è soppressa l'unità di misura per la pressione sanguigna che figura nella tabella;

1.3.2. il testo dell'avvertenza è sostituito da quello seguente:

"I prefissi ed i loro simboli di cui al punto 1.3. del capitolo I si applicano alle unità ed ai simboli della precedente tabella, ad eccezione del simbolo  $\text{g}.$ ".

SCHEMA DI D.D.L. RECANTE ATTUAZIONE DELLA DIRETTIVA (CEE) N. 85/1 CHE MODIFICA LA DIRETTIVA (CEE) N. 80/181 RELATIVA ALLE UNITA' DI MISURA ATTUATA CON DECRETO DEL PRESIDENTE DELLA REPUBBLICA 12 AGOSTO 1982, N. 802.

---

Articolo 1

1. All'allegato del decreto del Presidente della Repubblica 12 agosto 1982, n. 802, concernente l'attuazione della direttiva (CEE) n. 80/181 relativa alle unità di misura, sono apportate le modifiche seguenti:

1.1. La definizione dell'unità di lunghezza di cui al punto 1.1. del Capitolo I è sostituita dalla seguente:

"Unità di lunghezza

Il metro è la lunghezza del tragitto percorso dalla luce nel vuoto in un intervallo di  $1/299792458$  di secondo."

(17° CGPM, 1983, Ris. 1);

1.2. Nel capitolo I, punto 4:

1.2.1. La tabella è completata con le voci seguenti:

Grandezza	Unità		
	Nome	Simbolo	Valore
Pressione sanguigna e pressione degli altri liquidi organici	millimetro di mercurio	mm Hg(*)	1 mm Hg = 133,322 Pa
Sezione efficace	barn	b	1 b = $10^{-28}$ m <sup>2</sup>

## Articolo 2

Il Ministro dell'industria, del commercio e dell'artigianato provvede, con propri decreti, all'adeguamento delle disposizioni della presente legge, del decreto del Presidente della Repubblica 12 agosto 1982, n. 802, concernente l'attuazione della direttiva (CEE) n. 80/181 sulle unità di misura, e dell'allegato di quest'ultimo, alle direttive comunitarie nella materia.

## Articolo 3

La presente legge entra in vigore il giorno successivo a quello della sua pubblicazione nella Gazzetta Ufficiale della Repubblica italiana.

**DECRETO DEL PRESIDENTE DELLA REPUBBLICA**  
12 agosto 1982, n. 832.

**Attuazione della direttiva (CEE) n. 80/181 relativa alle unità di misura.**

**IL PRESIDENTE DELLA REPUBBLICA**

Visti gli articoli 76 e 87 della Costituzione;

Vista la legge 9 febbraio 1982, n. 42, recante delega al Governo ad emanare norme per l'attuazione delle direttive della Comunità economica europea;

Vista la direttiva n. 80/181 del 20 dicembre 1979, emanata dal Consiglio delle Comunità europee, concernente il ravvicinamento delle legislazioni degli Stati membri relative alle unità di misura;

Considerato che in data 8 giugno 1982, ai termini dell'art. 1 della legge 9 febbraio 1982, n. 42, è stato inviato lo schema del presente provvedimento ai Presidenti della Camera dei deputati e del Senato della Repubblica per gli adempimenti ivi previsti;

Tenuto conto delle osservazioni formulate in sede parlamentare;

Considerato che risulta così completato il procedimento previsto dalla legge di delega;

Sulla proposta del Ministro per il coordinamento interno delle politiche comunitarie, di concerto con i Ministri degli affari esteri, del tesoro, dell'industria, del commercio e dell'artigianato e di grazia e giustizia;

Vista la deliberazione del Consiglio dei Ministri, adottata nella riunione del 23 luglio 1982;

**EMANA**

il seguente decreto:

**Art. 1.**

Le unità di misura legali da utilizzare per esprimere grandezze sono quelle riportate nel capitolo I dell'allegato al presente decreto.

Sono ritenute legali fino al 31 dicembre 1985 le unità di misura destinate ad esprimere grandezze riportate nel capitolo II dell'allegato al presente decreto.

Per indicare le unità di misura di cui ai commi precedenti si devono usare esclusivamente le denominazioni, le definizioni e i simboli previsti nell'allegato.

**Art. 2.**

Le prescrizioni di cui all'articolo precedente si applicano, nelle attività economiche, nei settori della sanità e della sicurezza pubblica e nelle operazioni di carattere amministrativo, agli strumenti di misura impiegati, alle misurazioni effettuate e alle indicazioni di grandezza espresse in unità di misura.

## Art. 3.

E' autorizzato l'impiego di unità di misura diverse da quelle legali:

a) nei settori della navigazione marittima ed aerea e del traffico ferroviario, qualora tali unità siano contemplate da convenzioni o da accordi internazionali che vincolano l'Italia o la Comunità economica europea;

b) per i prodotti e le apparecchiature immessi in commercio e/o in servizio alla data del 31 dicembre 1982 e per i relativi componenti e ricambi.

Tuttavia i dispositivi indicatori degli strumenti di misura indicati nella lettera b) devono essere conformi alle disposizioni del presente decreto entro il 31 dicembre 1985.

Nel settore disciplinato dal paragrafo I della « Norma internazionale ISO 2955 del 1° marzo 1974 - Elaborazione della informazione: Rappresentazioni di unità SI e di altre unità per l'uso di sistemi che comprendono serie limitate di caratteri », si applicano le prescrizioni fissate dalla stessa norma ISO in materia di unità contemplate dal presente decreto.

E' autorizzato fino al 31 dicembre 1989 l'impiego di indicazioni plurime, costituite dall'indicazione di una delle unità di misura legali previste all'art. 1, primo comma, accompagnata da una o più indicazioni espresse con unità diverse. In tal caso l'indicazione dell'unità legale deve essere predominante e le dimensioni dei caratteri di tale indicazione devono essere almeno pari a quelle dei caratteri delle indicazioni che l'accompagnano.

Gli strumenti di misura devono recare le indicazioni di grandezza in un'unica unità di misura legale.

## Art. 4.

Chiunque si sottrae alle disposizioni del presente decreto è sottoposto alla sanzione amministrativa pecuniaria da L. 500.000 a L. 1.500.000.

La sanzione amministrativa contemplata dal comma precedente è applicata dall'ufficio provinciale metrico competente, con l'osservanza delle disposizioni di cui alla legge 24 novembre 1981, n. 689.

E' fatta salva l'applicazione della legge penale, ove i fatti che concretano le infrazioni di cui al primo comma costituiscono reato.

## Art. 5.

La vigilanza sull'applicazione del presente decreto è demandata al Ministero dell'industria, del commercio e dell'artigianato che la esercita tramite l'ufficio centrale metrico e gli uffici provinciali metrici.

## Art. 6.

Il presente decreto entra in vigore il giorno successivo a quello della sua pubblicazione nella Gazzetta Ufficiale della Repubblica italiana.

Il presente decreto, munito del sigillo dello Stato, sarà inserito nella Raccolta ufficiale delle leggi e dei decreti della Repubblica italiana. E' fatto obbligo a chiunque spetti di osservarlo e di farlo osservare.

Dato a Roma, addì 12 agosto 1982

PERTINI

SPADOLINI — ABIS —  
COLONBO — ANDREATTA  
— MARCORA — DARIDA

Visto, il Guardasigilli: DARIDA  
Registrato alla Corte dei conti, addì 7 ottobre 1982  
Atti di Governo, registro n. 42, foglio n. 28

ALLEGATO

## CAPITULO I

UNITA' DI MISURA LEGALI  
DISCIPLINATE DALL'ART. 1, COMMA PRIMO

1. UNITA' SI, LORO MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI DECIMALI.

1.1. Unità SI di base.

Grandezza	Unità	
	Nome	Simbolo
Lunghezza . . . . .	metro	m
Massa . . . . .	kilogrammo	kg
Tempo . . . . .	secondo	s
Intensità di corrente elettrica .	ampere	A
Temperatura termodinamica . .	kelvin	K
Quantità di sostanza . . . . .	mole	mol
Intensità luminosa . . . . .	candela	cd

Le definizioni delle unità SI di base sono le seguenti:

*Unità di lunghezza.*

Il metro è la lunghezza pari a 1.650.763,73 lunghezze d'onda nel vuoto della radiazione corrispondente alla transizione fra i livelli 2 p<sub>10</sub> e 5 d<sub>2</sub> dell'atomo di cripto 86.

(11° CGPM, 1960, ris. 6).

*Unità di massa.*

Il kilogrammo è l'unità di massa; esso è pari alla massa del prototipo internazionale del kilogrammo.

(3° CGPM, 1901, pag. 70 del resoconto).

*Unità di tempo.*

Il secondo è la durata di 9.192.631.770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo del cesio 133.

(13° CGPM, 1967, ris. 1).

*Unità di intensità di corrente elettrica.*

L'ampere è l'intensità di una corrente elettrica costante che, mantenuta in due conduttori paralleli rettilinei di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile, posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produrrebbe fra questi conduttori una forza eguale a  $2 \times 10^{-7}$  newton su ogni metro di lunghezza.

(CIPM, 1946, ris. 2, approvata dalla 9° CGPM, 1948).

*Unità di temperatura termodinamica.*

Il kelvin, unità di temperatura termodinamica, è la frazione  $1/273,16$  della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.

(13° CGPM, 1967, ris. 4).

**Unità di quantità di sostanza.**

La mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kilogrammi di carbonio 12.

Quando si usa la mole, le entità elementari devono essere specificate; esse possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, altre particelle, oppure raggruppamenti specificati di tali particelle.

(14° CGPM, 1971, ris. 3).

**Unità di intensità luminosa.**

La candela è l'intensità luminosa, in una determinata direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza  $540 \times 10^{12}$  hertz e la cui intensità energetica in tale direzione è 1/683 watt allo steradiante.

(16° CGPM, 1979, ris. 3).

1.1.1. Nome e simbolo speciali dell'unità SI di temperatura nel caso della temperatura Celsius.

Grandezza	Unità	
	Nome	Simbolo
Temperatura Celsius . . . . .	grado Celsius	°C

La temperatura Celsius  $t$  è definita dalla differenza  $t = T - T_0$ , tra due temperature termodinamiche  $T$  e  $T_0$ , con  $T_0 = 273,15$  kelvin. Un intervallo o una differenza di temperatura possono essere espressi in kelvin o in gradi Celsius. L'unità «grado Celsius» è uguale all'unità «kelvin».

12. Altre unità SI.

12.3. Unità derivate SI che hanno nomi e simboli speciali.

Grandezza	Unità		Espressione	
	Nome	Simbolo	In altre unità SI	In unità SI di base e supplementari
Frequenza . . . . .	hertz	Hz		$s^{-1}$
Forza . . . . .	newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Pressione e tensione . . . . .	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energia, lavoro, quantità di calore . . . . .	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Potenza (1), flusso energetico . . . . .	watt	W	$J \cdot s^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Quantità di elettricità, carica elettrica . . . . .	coulomb	C		$s \cdot A$
Tensione elettrica, potenziale elettrico, forza elettromotrice	volt	V	$W \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Resistenza elettrica . . . . .	ohm	$\Omega$	$V \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Conduttanza . . . . .	siemens	S	$A \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^2 \cdot A^2$
Capacità elettrica . . . . .	farad	F	$C \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Flusso d'induzione magnetica . . . . .	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} \cdot A^{-1}$
Induzione magnetica . . . . .	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Induttanza . . . . .	henry	H	$Wb \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Flusso luminoso . . . . .	lumen	lm		cd · sr
Illuminamento . . . . .	lux	lx	$lm \cdot m^{-2}$	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$
Attività (irraggiamento ionizzante) . . . . .	becquerel	Bq		$s^{-1}$
Dose assorbita, energia massica impartita, kerma, indice di dose assorbita	gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-2}$
Equivalente di dose . . . . .	sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-2}$

(1) Nomi speciali dell'unità di potenza: il nome «voltampere», simbolo «VA», per esprimere la potenza apparente della corrente elettrica alterna e il nome «var», simbolo «var», per esprimere la potenza elettrica reattiva. Il nome «var» non è incluso in risoluzioni della CGPM.

Alcune unità derivate dalle unità SI di base o supplementari possono essere espresse impiegando le unità del capitolo I. In particolare, alcune unità derivate SI possono essere espresse con i nomi e i simboli speciali riportati nella tabella di cui sopra, per esempio: l'unità SI della viscosità dinamica può essere espressa come  $m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$  oppure  $N \cdot s \cdot m^{-2}$  oppure Pa·s.

**12.1. Unità supplementari SI.**

Grandezza	Unità	
	Nome	Simbolo
Angolo piano . . . . .	radiante	rad
Angolo solido . . . . .	steradiante	sr

(11° CGPM, 1960, ris. 12).

Le definizioni delle unità supplementari SI sono le seguenti:

**Unità di angolo piano.**

Il radiante è l'angolo piano compreso tra due raggi che, sulla circonferenza di un cerchio, intercettano un arco di lunghezza pari a quella del raggio.

(Norma internazionale ISO 31 - I, dicembre 1965).

**Unità di angolo solido.**

Lo steradiante è l'angolo solido, che, avendo il vertice al centro di una sfera, delimita sulla superficie di questa un'area pari a quella di un quadrato di lato uguale al raggio della sfera.

(Norma internazionale ISO 31 - I, dicembre 1965).

**12.2. Unità derivate SI.**

Le unità derivate in modo coerente dalle unità SI di base e dalle unità supplementari SI vengono indicate mediante espressioni algebriche sotto forma di prodotti di potenze delle unità SI di base e delle unità supplementari SI con un fattore numerico pari ad 1.

13. Prefissi e loro simboli che servono a designare taluni multipli e sottomultipli decimali.

Fattore	Prefisso	Simbolo	Fattore	Prefisso	Simbolo
$10^{24}$	esa	E	$10^{-1}$	deci	d
$10^{21}$	peta	P	$10^{-2}$	centi	c
$10^{18}$	tera	T	$10^{-3}$	milli	m
$10^9$	giga	G	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^6$	mega	M	$10^{-9}$	nano	n
$10^3$	kilo	k	$10^{-12}$	pico	p
$10^2$	etto	h	$10^{-15}$	femto	f
$10^1$	deca	da	$10^{-18}$	atto	a

I nomi ed i simboli dei multipli e sottomultipli decimali dell'unità di massa vengono formati mediante l'aggiunta dei prefissi alla parola «grammo» e dei loro simboli al simbolo «g».

Per designare alcuni multipli e sottomultipli decimali di un'unità derivata la cui espressione si presenta sotto forma di una frazione, un prefisso può essere legato indifferentemente alle unità che figurano al numeratore, al denominatore o in entrambi.

Sono vietati i prefissi composti, cioè formati mediante giustapposizione di più prefissi di cui sopra.

14. Nomi e simboli speciali autorizzati di multipli e sottomultipli decimali di unità SI.

Grandezza	Unità		
	Nome	Simbolo	Relazione
Volume . . . . .	litro	l o L (1)	1 l = 1 dm <sup>3</sup> = 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>
Massa . . . . .	tonnellata	t	1 t = 1 Mg = 10 <sup>6</sup> kg
Pressione e tensione . . . . .	bar	bar (2)	1 bar = 10 <sup>5</sup> Pa

(1) Per l'unità litro possono essere utilizzati i due simboli «l» e «L». (16<sup>a</sup> CGPM, 1979, ris. 6).

(2) Unità che, nell'opuscolo dell'Ufficio Internazionale dei pesi e misure, è compresa tra le unità ammesse temporaneamente.

Avvertenza: I prefissi ed i simboli di cui al punto 13 si applicano alle unità ed ai simboli elencati nella tabella del punto 14.

2. UNITA' DEFINITE IN BASE ALLE UNITA' SI, MA CHE NON SONO MULTIPLI O SOTTOMULTIPLI DECIMALI. QUESTE.

Grandezza	Unità		
	Nome	Simbolo	Relazione
Angolo piano . . . . .	angolo giro (°) (1) (a)		1 angolo giro = 2 $\pi$ rad
	grado centesimale (°) oppure gon (°)	gon (°)	1 gon = $\frac{\pi}{200}$ rad
	grado sessagesimale	°	1° = $\frac{\pi}{180}$ rad
	minuto d'angolo	'	1' = $\frac{\pi}{10800}$ rad
	secondo d'angolo	"	1" = $\frac{\pi}{648000}$ rad
Tempo . . . . .	minuto	min	1 min = 60 s
	ora	h	1 h = 3.600 s
	giorno	d	1 d = 86.400 s

(1) Il segno (°) dopo un nome o un simbolo di unità ricorda che questi non figurano negli elenchi compilati dalla CGPM, dalla CIPM e dal BIPM. Questa osservazione si applica al presente allegato nel suo complesso.

(a) Non esiste un simbolo internazionale.

Avvertenza: I prefissi di cui al punto 13 si applicano soltanto ai nomi «grado» e «gon» ed i relativi simboli soltanto al simbolo «gon».

## 3. UNITÀ E FINITE UNICAMENTE AMMESSI NEI SETTORI DI BASE.

L'unità di massa atomica è pari a  $1/12$  della massa di un atomo del nucleide  $^{12}\text{C}$ .

L'elettronvolt è l'energia cinetica acquistata da un elettrone che passa nel vuoto da un punto ad un altro che abbia un potenziale superiore di 1 volt.

Grandezza	Unità		
	Nome	Simbolo	Valore
Massa . . . . .	unità di massa atomica	u	$1 \text{ u} \approx 1,660\,565\,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Energia . . . . .	elettronvolt	eV	$1 \text{ eV} \approx 1,602\,189\,2 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Il valore di queste unità, espresso in unità SI, non è conosciuto esattamente. I valori indicati sono estratti dal bollettino CODATA n. 11, del dicembre 1973, del Consiglio internazionale delle Unioni scientifiche.

Avvertenza: A queste due unità ed ai loro simboli si applicano i prefissi ed i simboli di cui al punto 13.

## 4. UNITÀ E NOMI DI UNITÀ AMMESSI UNICAMENTE IN SETTORI DI APPLICAZIONE SPECIALIZZATI.

Grandezza	Unità		
	Nome	Simbolo	Valore
Vergenza dei sistemi ottici . . . . .	diottria (°)		$1 \text{ diottria} = 1 \text{ m}^{-2}$
Massa delle pietre preziose . . . . .	carato metrico		$1 \text{ carato metrico} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$
Area delle superfici agrarie e dei fondi	ara	a	$1 \text{ a} = 10^4 \text{ m}^2$
Massa lineica delle fibre tessili e dei filati	tex (°)	tex (°)	$1 \text{ tex} = 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$

Avvertenza: A queste unità si applicano i prefissi di cui al punto 13. Il multiplo  $10^2 \text{ a}$  è nondimeno denominato «ettaro».

## 5. UNITÀ COMPOSTE.

Combinando le unità di cui al capitolo I si costituiscono unità composte.

## CAPITOLO II

## UNITÀ DI MISURA LEGALI DISCIPLINATE DALL'ART. 1, COMMA SECONDO

## GRANDEZZE, NOMI DI UNITÀ, SIMBOLI E VALORI.

Grandezza	Unità		
	Nome	Simbolo	Valore
Pressione sanguigna . . . . .	millimetro di mercurio (°)	mm Hg (°)	$1 \text{ mm Hg} = 133,322 \text{ Pa}$
Angolo piano . . . . .		° (°) (1)	$1^\circ = \frac{\pi}{200} \text{ rad}$
Attività di radionuclidi . . . . .	curie	Ci	$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$
Dose assorbita . . . . .	rad	rad (2)	$1 \text{ rad} = 10^{-2} \text{ Gy}$
Equivalente di dose . . . . .	rem (°)	rem (°)	$1 \text{ rem} = 10^{-2} \text{ Sv}$
Esposizione (raggi x o $\gamma$ ) . . . . .	röntgen	R	$1 \text{ R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$
Viscosità dinamica . . . . .	poise	P	$1 \text{ P} = 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Viscosità cinematica . . . . .	stokes	St	$1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

(1) Simbolo del «grado centesimale». Il secondo comma dell'art. 1 si applica al simbolo ° e non al grado centesimale.

(2) Quando il nome rad può generare confusione con il simbolo del radiante, si può utilizzare ed come simbolo del rad.

Avvertenza: I prefissi e i loro simboli di cui al punto 13 del capitolo I si applicano alle unità ed ai simboli indicati nel presente punto, ad eccezione del millimetro di mercurio e del suo simbolo e del simbolo °.

Fino alla data indicata nell'art. 1, comma secondo, le unità di cui al capitolo II possono essere combinate tra di loro o con quelle del capitolo I per costituire unità composte.

ERNESTO LUPO, direttore  
VINCENZO MARINELLI, vice direttore

DINO ECIDIO MARTINA, redattore  
FRANCESCO NOCITA, vice redattore