

Figura 10.14: Tensione di un condensatore su una resistenza e un induttore per valori di resistenza intorno al valore per cui si ottiene il ‘caso critico’ di smorzamento (vedi testo). La curva tratteggiata corrisponde al caso critico; quelle ‘superiori’ (caso sovrasmorzato) e ‘inferiori’ (caso sottosmorzato) hanno valori di resistenza rispettivamente maggiori e inferiori del 10, 20 e 30% di quella del caso critico. Il riquadro in alto a destra riporta lo zoom nei primi 5 microsecondi per mostrare come tutte le soluzioni cominciano con derivata nulla, corrispondente a corrente nulla.

la resistenza tra +30% e -30% di quella critica. La figura mostra anche lo zoom nei primi istanti della scarica per enfatizzare il fatto come inizialmente gli andamenti siano tutt’altro che esponenziali, come discusso sopra.

10.10.1 Caso sovrasmorzato

I casi sovrasmorzati corrispondenti a resistenze maggiori rispettivamente del +10% e del +30% di quella critica sono riportati in figura 10.15 con i dettagli dei due esponenziali che contribuiscono all’andamento temporale. Per confronto viene riportato, come ottima approssimazione del caso limite per R molto grande, l’andamento in cui la resistenza vale dieci volte la resistenza critica. Si noti come il caso più vicino a quello critico, indicato in figura con “ $R_c \times 1.1$ ”, abbia k_1 e $|k_2|$ maggiori dei corrispondenti coefficienti del caso con resistenza superiore. Per $R = 10 \times R_0$ il coefficiente negativo k_2 è praticamente nullo, k_1 praticamente unitario e l’andamento sembra un perfetto esponenziale (ma basta zoomare per controllare che all’origine la derivata è nulla). Si nota inoltre che per R grande lo smorzamento è più lento, nonostante l’aggettivo ‘sovrasmorzato’ potrebbe far pensare che tanto maggiore è il discriminante dell’equazione algebrica associata, quanto maggiore è lo smorzamento. Infatti si può facilmente provare che nel limite di R molto grande

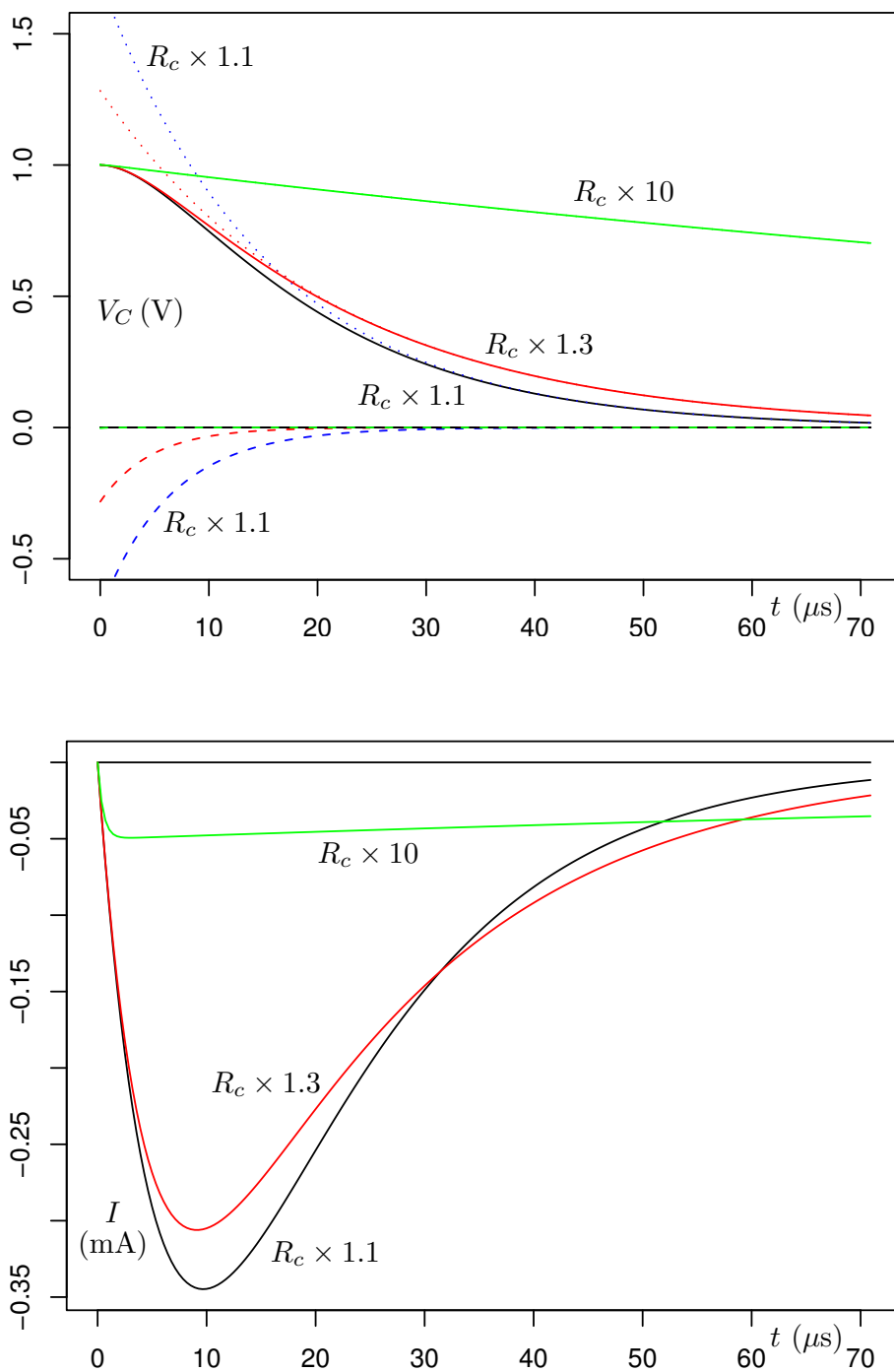


Figura 10.15: In alto: casi sovrasmorzati con resistenze maggiori del 10% e del 30% di quella critica in cui sono stati graficate (puntinate quelle negative e tratteggiate quelle positive) le due esponenziali di cui la soluzione fisica è sovrapposizione. Per confronto viene riportato anche il caso di $R = 10R_C$, dall'andamento praticamente esponenziale (sembra rettilineo in quanto la sua costante di tempo è molto grande, valendo circa $200 \mu\text{s}$). Il grafico in basso riporta le correnti corrispondenti.

vale la relazione

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \tau_1 = \frac{\gamma}{\omega_0^2} = RC : \quad (10.130)$$

il condensatore si scarica come un semplice RC ! Si noti infatti che il limite di γ che tende a infinito corrisponde anche al limite $L \rightarrow 0$.²⁰

Per questi tre casi mostriamo le rispettive correnti in basso di figura 10.15. Esse sono negative in quanto antiorarie e in tutti i casi esse sono inizialmente nulle. Si noti inoltre come nel caso $10 \times R_0$ il massimo assoluto viene raggiunto dopo circa $3 \mu s$, tempo piccolissimo rispetto alla scala naturale di tale smorzamento, essendo la costante di tempo di circa $200 \mu s$: se si osservasse il fenomeno su un grafico con la scala temporale che si estende fino a 6τ , come abbiamo fatto tipicamente per l' RC , sembrerebbe che la corrente vada istantaneamente a -0.05 mA .²¹

10.10.2 Caso sottosmorzato

Passiamo ora alle oscillazioni sottosmorzate, delle quali riportiamo in figura 10.16 diversi casi ottenuti variando la resistenza. Si vede come al diminuire di R (e quindi di γ , avendo fissato L) il sistema esegue un maggior numero di oscillazioni 'apprezzabili'²² prima che il condensatore si scarichi completamente. Essendo le oscillazioni non periodiche a causa della diminuzione dell'ampiezza con il tempo, esse sono caratterizzate da *pseudoperiodi* (T_1), definiti come la distanza temporale fra picchi successivi. Essendo $T_1 = 2\pi/\omega_1$, lo pseudoperiodo dipende da R quando questa differisce di poco dal valore critico, ma essa questa diventa molto piccola il periodo sarà praticamente uguale a $2\pi/\omega_0$,²³ come vedremo negli esempi delle figure 10.16 e 10.18. In effetti

²⁰Altri limiti di interesse sono

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \tau_2 &= \frac{1}{\gamma} \\ \lim_{\gamma \rightarrow \infty} k_1 &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = 1 \\ \lim_{\gamma \rightarrow \infty} k_2 &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} -\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} = 0. \end{aligned}$$

²¹Questo ci giustifica il fatto che, anche se in principio ci sono sempre delle induttanze in gioco, a causa delle inevitabili autoinduzioni (per non parlare delle mutue induzioni fra diversi tratti di circuito) nella maggior parte dei circuiti nei quali non sono indicati induttori, gli effetti delle induzioni possono essere trascurati. (Il discorso è in un certo senso analogo a quello dei 'condensatori nascosti' del paragrafo 5.8.1.)

²²Nel senso di ampiezza apprezzabile su un grafico insieme alla tensione iniziale: per un matematico il numero di oscillazioni sarà sempre infinito.

²³Essendo $\omega_1^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \\ &= \omega_0 \times \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}} \\ &\approx \omega_0 \times \left[1 - \frac{\gamma^2}{8\omega_0^2}\right], \end{aligned}$$

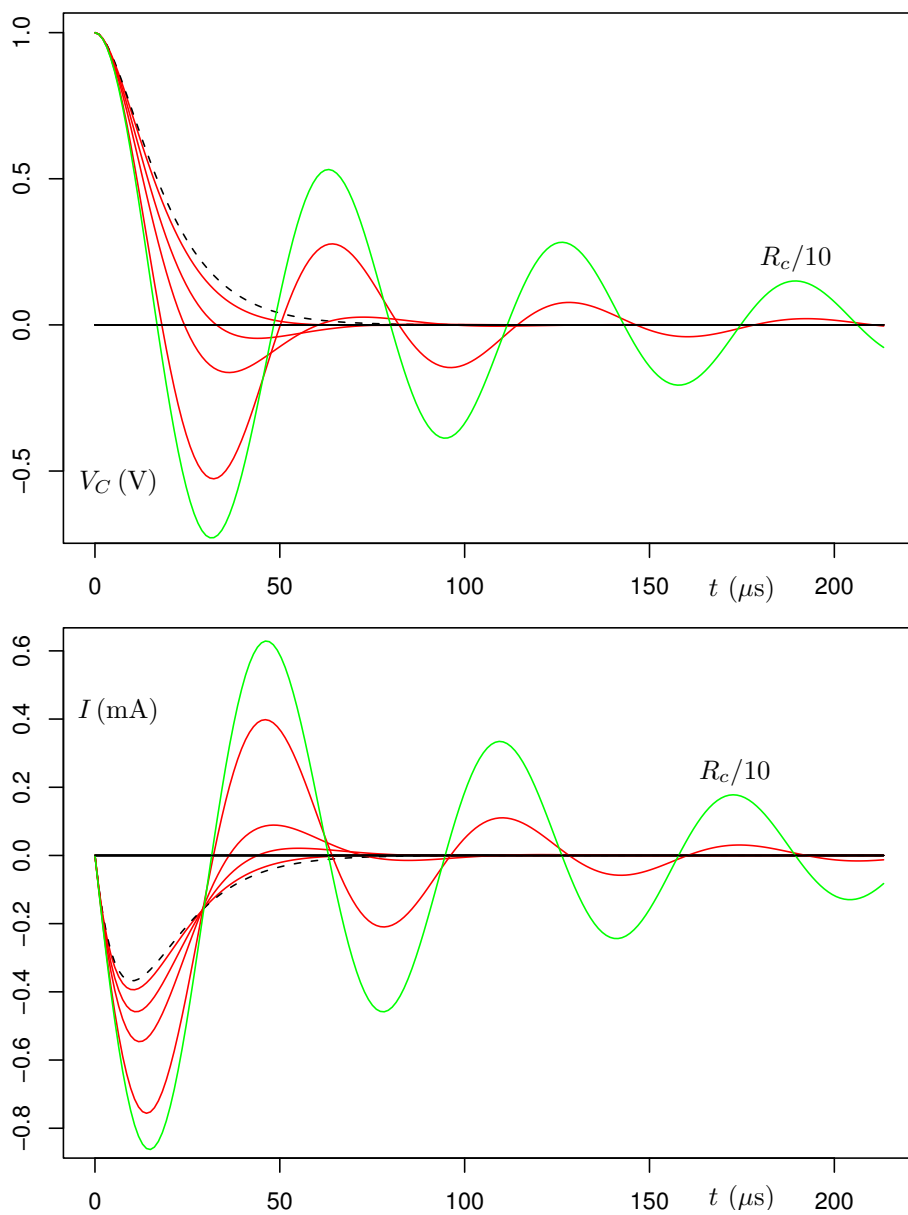


Figura 10.16: Tensioni ai capi del condensatore e correnti che fluiscono nel circuito per il caso critico (curve tratteggiate) e quello sottosmorzato al diminuire della resistenza (in unità della resistenza critica e a mano a mano che ci allontaniamo dal caso critico e quindi le oscillazioni si spengono più lentamente: 0.9, 0.7, 1/2, 1/5, 1/10.).

il grafico mostra una differenza di pseudoperiodo fra il caso $R_c/5$ e $R_c/10$ abbastanza piccola, apprezzabile confrontando i picchi al termine della terza oscillazione: il picco di $R_c/5$ arriva leggermente in ritardo rispetto a quello di $R_c/10$: la resistenza grande (leggi 'viscosità elevata' nel caso meccanico) rallenta il tempo di oscillazione. Ricordiamo infine che la tensione ai capi della resistenza, essendo proporzionale alla corrente, seguirà esattamente lo stesso andamento della corrente.

10.11 Energia di un oscillatore smorzato

Passiamo ora a considerazioni energetiche. Come sappiamo, se sono presenti termini di 'attrito' (R nel caso elettrico e β nel caso meccanico) ci sarà una perdita di energia ogni qualvolta corrente o velocità saranno diverse da zero. Ci aspettiamo dunque una potenza dissipata che dipende dal tempo. Concentriamoci di nuovo sul caso elettrico, usando il solito circuito da 10 nF e 10 mH. Il grafico in alto di figura 10.17 riporta l'andamento temporale della potenza dissipata. Il caso critico è raffigurato dalla curva tratteggiata. La potenza massima (che si verifica durante la prima oscillazione) aumenta se la resistenza diminuisce (nell'ordine sono riportati i casi in cui diminuisce del 10% e del 50% di quella critica), quindi comincia a diminuire quando il sistema comincia a compiere diverse oscillazioni, come mostrato dalla curva puntinata, ottenuta per $R_c/5$, e infine per quella che presenta il maggior numero di oscillazioni, per per la quale R vale $R_c/10$.

Il grafico in basso riporta invece l'energia residua del sistema oscillante in funzione del tempo. Di nuovo, il caso critico è rappresentato dalla curva tratteggiata che si esaurisce intorno a $50 \mu\text{s}$ e le due curve vicine ad essa sono ottenute per $0.9R_c$ e $R_c/2$ (quest'ultima è riconoscibile dal cenno di oscillazione). Casi interessanti sono quelli per $R_c/5$ e $R_c/10$, facilmente riconoscibili. Si nota un andamento dell'energia che riflette quello della potenza dissipata, essendo quest'ultima legata alla derivata della prima. Si osservano quindi dei punti stazionari in corrispondenza di multipli del semi-pseudoperiodo, in quanto la corrente è nulla, mentre l'energia decresce rapidamente per multipli dei suoi quarti, essendo massima la corrente (solita storia di sfasamento di $+\pi/2$ fra corrente e tensione ai capi del condensatore).

Per confronto sono stati riportati anche tre casi sovrasmorzati, facilmente riconoscibili dal loro andamento esponenziale e comunque raffigurati da curve chiare tratteggiate. Quello che si spegne più rapidamente (intorno a $100 \mu\text{s}$) è ottenuto per $2R_c$, mentre gli altri due hanno $5R_c$ e $10R_c$. Si vede quindi come, in tutti i casi, *la perdita di energia è tanto più lenta quanto più R si discosta dal valore critico.*

che nel seguito riscriveremo, alla luce dell'importante parametro ('fattore di merito', o 'di qualità') $Q = \omega_0/\gamma$ (anche se useremo, come di consuetudine lo stesso simbolo Q della carica, si capirà dal contesto di cosa si sta parlando), come

$$\omega_1 \approx \omega_0 \times \left[1 - \frac{1}{8Q^2} \right].$$

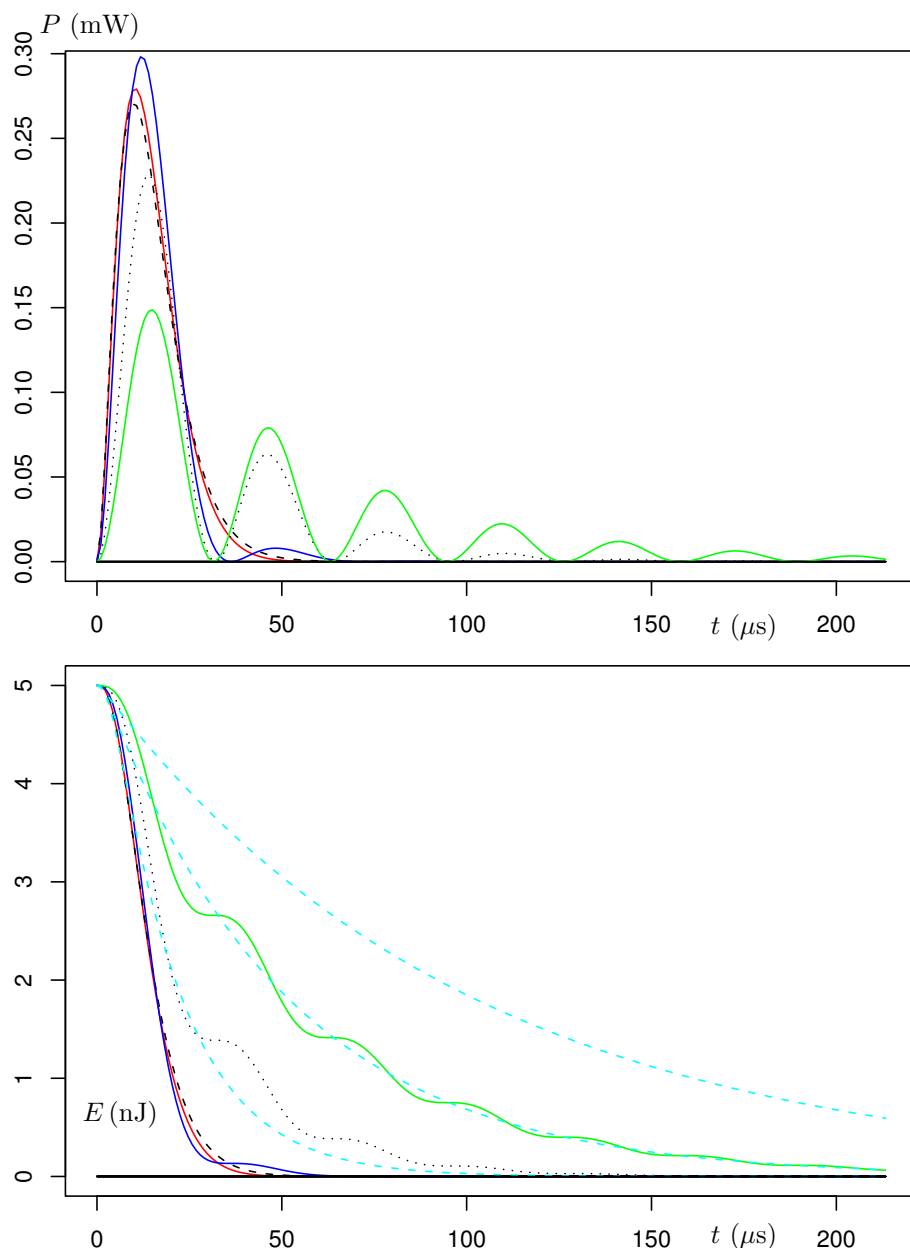


Figura 10.17: Potenza dissipata per effetto Joule (grafico superiore) ed energia residua nell'oscillatore RCL (grafico inferiore) in funzione del tempo (vedi testo)

10.11.1 Caso sottosmorzato — fattore di merito

Concentriamoci ora sul caso sottosmorzato, ed in particolare quando il sistema ‘oscilla abbastanza’, nel senso che chiariremo nel seguito. Usando le considerazioni preliminari di carattere generale del paragrafo 10.8.1, il parametro η , frazione dell’energia al termine di ogni oscillazione, vale

$$\eta = \frac{E(n=1)}{E_0} = \frac{E(n)}{E(n-1)} \quad (10.131)$$

$$= \frac{V_C^2(t=T_1)}{V_C^2(0)} = \frac{(V_{C_0} e^{-T_1/\tau})^2}{V_{C_0}^2} \quad (10.132)$$

$$= e^{-2T_1/\tau} = e^{-\gamma(2\pi/\omega_1)}. \quad (10.133)$$

Ne segue che il parametro n_0 introdotto nel paragrafo 10.8.1, il quale ci dà il numero di oscillazioni affinché l’energia dell’oscillatore si riduca a $1/e$ di quella iniziale (ed che ricordiamo essere legato a η dalla relazione $\eta = e^{-n_0}$), vale

$$n_0 = \frac{\omega_1}{2\pi\gamma}. \quad (10.134)$$

Usando l’espressione di ω_1 abbiamo

$$n_0 = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}}{2\pi\gamma} \quad (10.135)$$

$$= \frac{\omega_0 \sqrt{1 - [(\gamma/2)/\omega_0]^2}}{2\pi\gamma} \quad (10.136)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}. \quad (10.137)$$

Introducendo il nuovo parametro Q (non lo si confonda con la carica!), per ora semplicemente definito come

$$Q = \omega_0/\gamma, \quad (10.138)$$

otteniamo

$$n_0 = \frac{1}{2\pi} Q \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{1}{Q^2}}. \quad (10.139)$$

Nel caso in cui Q sia ‘abbastanza grande’, ad esempio tale che il suo quadrato sia *dell’ordine* di 10, possiamo approssimare la formula precedente come

$$n_0 \approx \frac{1}{2\pi} Q \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right) \quad (10.140)$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} Q, \quad (10.141)$$

in cui $1/(8Q^2)$ ci dà l’errore relativo che commettiamo nell’approssimazione. Già con $Q \approx 2.5$ che corrisponde al caso sottosmorzato con $R_c/5$, l’approssimazione è del 2%, che si riduce a 0.5% per $R_c/10$, a cui corrisponde $Q = 5$. Quindi scriveremo nel seguito $n_0 = Q/2\pi$, assumendo questa approssimazione.

Il parametro Q ci fornisce quindi un'indicazione quantitativa dello smorzamento dell'oscillatore, nel senso che maggiore è tale numero e, qualitativamente, più oscilla il circuito. Più precisamente, se esso è maggiore di qualche unità, $Q/2\pi$ è uguale al numero di oscillazioni necessarie affinché il sistema riduca la sua energia a $1/e$ di quella iniziale. Per tale motivo Q chiamato *fattore di merito* (o di *qualità*) di un circuito. Riassumendo, e includendo nella lista la frazione di energia residua dopo ciascuna oscillazione, abbiamo

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (10.142)$$

$$n_0 \approx \frac{Q}{2\pi} \quad (10.143)$$

$$\eta \approx e^{-2\pi/Q}. \quad (10.144)$$

In funzione dei parametri del circuito il fattore di merito vale²⁴

$$Q = \frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10.145)$$

Ad esempio, nel caso dei casi maggiormente oscillanti di figura 10.17, che come abbiamo detto hanno rispettivamente fattori di merito di 5 e 2.5, abbiamo η pari a 0.28 e 0.08. Riportiamo in figura 10.18 ulteriori casi di oscillazioni sottosmorzate, con Q di 5, 10 e 50.

L'osservazione di tali andamenti ci suggerisce un ulteriore parametro di interesse, che possiamo chiamare η_A , l'equivalente di η , ma riferita all'ampiezza di oscillazione invece che all'energia, ovvero

$$\eta_A = \frac{V_C(n T_1)}{V_C((n-1) T_1)}, \quad (10.146)$$

quantità più facilmente misurabile in laboratorio e dalla quale possiamo valutare facilmente gli altri parametri meno diretti. Ne segue che

$$\eta_A = \sqrt{\eta} \approx e^{-\pi/Q}. \quad (10.147)$$

Nei casi di figura 10.17 η_A vale rispettivamente 0.53, 0.73 e 0.94, come si può verificare rapidamente a occhio.

Infine, se vogliamo calcolare il tempo affinché l'energia si riduca ad $1/e$ di quella iniziale dobbiamo moltiplicare n_0 per T_1 , che nelle approssimazioni che stiamo facendo, ovvero di $\omega_1 \approx \omega_0$,²⁵ vale con buona approssimazione

²⁴Si noti come nel caso in cui $\omega_1 \approx \omega_0$, che si verifica spesso in pratica quando il sistema, per dirla alla buona, "oscilla abbastanza", si ha $Q \approx \omega_1/\gamma = (\tau/2)/T_1$, una relazione comoda per stimare quasi a occhio Q dalle oscillazioni osservate sull'oscilloscopio.

²⁵La (10.140) può essere tradotta nell'errore di approssimazione che facciamo su ω_1 e T_1 , essendo

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right) \\ T_1 &\approx T_0 \left(1 + \frac{1}{8Q^2}\right). \end{aligned}$$

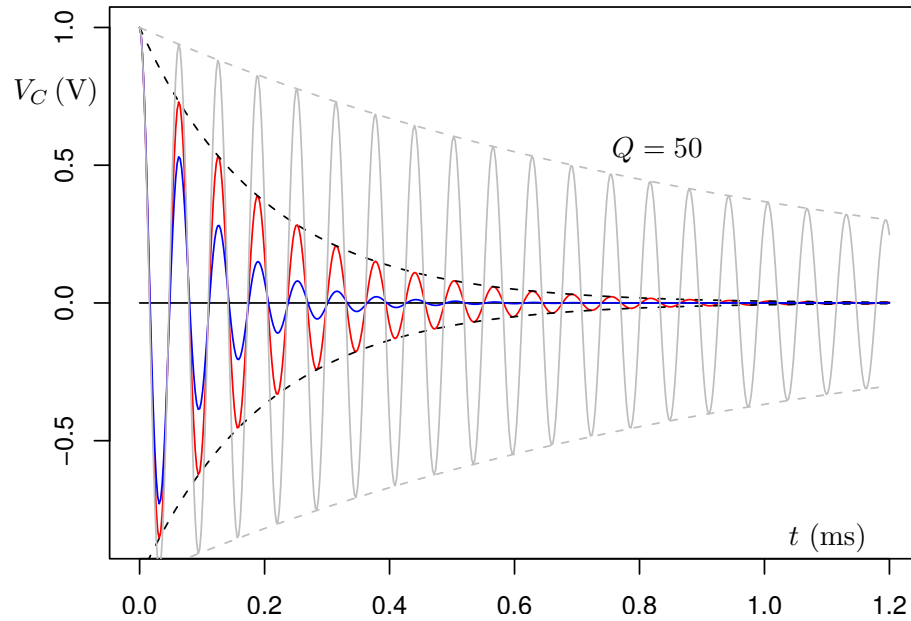


Figura 10.18: Oscillazioni sottosmorzate con fattore di merito 5, 10 e 50, a cui corrispondono η di 0.28, 0.53 e 0.88 (da cui n_0 di 0.8, 1.6 e 8.0). Nei casi di Q di 10 e 50 sono state anche sovrainposte le curve che indicano lo smorzamento esponenziale delle ampiezze con costanti di tempo di, rispettivamente, 0.20 ms e 1.0 ms. (Si notino come le diverse oscillazioni sono caratterizzate da pseudoperiodi praticamente identici.)

$2\pi/\omega_0$. Indicando tale costante di tempo ‘energetica’ con τ_E , abbiamo quindi

$$\tau_E \approx n_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (10.148)$$

$$\approx \frac{1}{\gamma} = \frac{\tau}{2}, \quad (10.149)$$

come ci si poteva attendere: la costante di tempo della decrescita energetica è pari alla metà di quella della decrescita delle ampiezze, semplicemente perché l’energia all’ n -ma oscillazione è proporzionale al quadrato della tensione del condensatore. Quindi per l’energia abbiamo:

$$E(n) \approx E_0 e^{-t_n/\tau_E} = E_0 e^{-\gamma t_n}, \quad (10.150)$$

ove t_n rappresenta il tempo per arrivare fino al termine dell’ n -ma oscillazione completa, che per le nostre approssimazioni vale circa $n T_0$, o $n (2\pi/\omega_0)$.

Concludiamo dando l’espressione di Q in funzione dei parametri del pro-