

Laboratorio di Meccanica

Dispense A.A. 2024-2025

Versione 5.4, 25 Settembre 2024

Giulio D'Agostini

con la collaborazione di:

**Fabio Bellini, Andrea Messina,
Riccardo Paramatti e Francesco Santanastasio**

Sapienza Università di Roma

Dipartimento di Fisica

Roma – 2024

Indice

Prefazione	1
-------------------------	----------

I

Introduzione

1	Introduzione	5
1.1	Onde gravitazionali o semplici vibrazioni ambientali?	5
1.2	Dati e ipotesi che li spiegano	7
1.2.1	Fattore di Bayes e aggiornamento del rapporto di probabilità	9
1.3	Conoscenza, modelli e parametri dei modelli	10
1.4	L'esperimento 'giocattolo' delle sei scatole	12
1.5	Valore vero e valore misurato. Errore e incertezza.	13
1.6	Dalle masse dei buchi neri alle masse misurate sulle balance	13
1.7	Quale 'metodo scientifico'? Diffidare dei cliché	16

II

Misure di grandezze fisiche

2	Misura e grandezze fisiche	21
2.1	Introduzione	21
2.2	Grandezze fisiche e unità di misura	22
2.2.1	Definizione operativa di una grandezza	22
2.2.2	Grandezze fisiche di base e derivate	22
2.2.3	Unità di base del Sistema Internazionale	22
2.2.4	Sistema di unità di misura	23
2.2.5	Dimensioni di una grandezza	25
2.2.6	Analisi dimensionale	25
2.3	Valore vero di una grandezza	26
2.4	Misura	26

2.5	Risultati di misura, errori ed incertezze	28
2.5.1	Cause delle incertezze di misura	29
2.5.2	Errori casuali e sistematici	32
2.5.3	Precisione e accuratezza	34
2.5.4	Valutazione dell'incertezza di misura	35
3	Strumenti di misura	37
3.1	Strumenti di misura	37
3.1.1	Strumenti analogici e digitali	37
3.2	Caratteristiche degli strumenti	38
3.2.1	Campo di misura e condizioni di lavoro	38
3.2.2	Dipendenza della risposta dallo stimolo	38
3.3	Errori degli strumenti di misura	40
3.3.1	Correzione di errori sistematici	40
3.4	Strumenti di misura per il laboratorio di meccanica	42
3.4.1	Regolo	42
3.4.2	Calibro ventesimale	43
3.4.3	Calibro Palmer	44
3.4.4	Strumenti digitali	45
3.4.5	Contatore	45
3.5	Esempi	46
3.5.1	Capacità di interpolazione fra le tacche e incertezza di lettura	46
3.5.2	Tempo di reazione e misure di cronometraggio	49
3.5.3	Soluzione dell'esercizio di interpolazione fra le tacche	49
4	Elaborazione dei dati sperimentali	51
4.1	Riduzione dei dati	51
4.2	Tabelle, istogrammi e diagrammi a barre	51
4.2.1	Box plot	56
4.2.2	Istogrammi bidimensionali: scatter plot e lego plot	59
4.3	Distribuzioni statistiche	60
4.4	Misure di posizione	62
4.5	Misure di dispersione	62
4.5.1	Varianza e deviazione standard campionaria	63
4.5.2	Proprietà di medie e varianza ed analogia in meccanica	64
4.5.3	Deviazione standard della media	65
4.5.4	Valutazione pratica della deviazione standard	66
4.5.5	σ_N o σ_{N-1} ? Commenti sul fattore correttivo $N/(N-1)$	66
4.5.6	Effetto del raggruppamento in classi	68
4.5.7	Dispersione relativa e coefficiente di variazione	68
4.6	Altre misure di forma	68
4.7	Misure di correlazione	70
4.8	Cifre significative e statistica descrittiva	73
4.9	Problemi	73
5	Analisi grafiche	75
5.1	Grafici	75
5.2	Stima grafica dei parametri della retta	76
5.3	Cifre significative dei parametri della retta	80
5.3.1	Rilettura dei punti sperimentali e della retta	80

5.3.2	Scelta e tracciamento della retta	80
5.3.3	Altre incertezze nella stima dei parametri	80
5.3.4	Raccomandazioni	81
5.4	Linearizzazione	81
5.5	Analisi grafica dell'esperienza della molla	81
5.5.1	Dipendenza dal modello	82
5.6	Uso di carte logaritmiche	83
5.6.1	Carta semilogaritmica	83
5.6.2	Proprietà delle carte logaritmiche	84
5.6.3	Stima dei parametri	86
5.6.4	Carta doppiologaritmica	88
5.7	Altre linearizzazioni notevoli	89
5.8	Problemi	90
6	Valutazione dell'incertezza di misura	93
6.1	Formalismo sulle variabili casuali	93
6.2	Valutazione dell'incertezza di misura	94
6.3	Dagli effetti alle cause	94
6.3.1	Verosimiglianza	94
6.3.2	Probabilità iniziale e probabilità finale	95
6.3.3	Imparare dall'esperienza	96
6.4	Misure dirette in assenza di errori sistematici	96
6.4.1	Condizioni di ripetibilità	97
6.4.2	Singola osservazione con σ_r nota	97
6.4.3	n osservazioni indipendenti con σ_r nota	97
6.4.4	Caso di σ_r ignota	98
6.5	Presentazione del risultato - cifre significative	99
6.6	Propagazione delle incertezze	101
6.6.1	Caso di combinazioni lineari	101
6.6.2	Linearizzazione	101
6.6.3	Inceteeze relative	102
6.7	Come tener conto degli errori sistematici	103
6.7.1	Condizioni di riproducibilità	103
6.7.2	Correzione dei risultati per tener conto di errori sistematici noti - calibrazioni	103
6.7.3	Inceteeze dovute all'inesatta conoscenza dell'entità di un possibile errore sistematico	103
6.7.4	Imperfetta conoscenza delle costanti di calibrazioni e dei parametri di influenza	103
6.7.5	Casi di errore di più difficile schematizzazione	106
6.7.6	Inceteeza su un fattore di influenza	106
6.7.7	Propagazione senza derivate	107
6.8	Valutazione delle incertezze di tipo B	107
6.9	Esempi numerici	108
6.10	Problemi	111

III

Probabilità e variabili casuali

7	La probabilità	115
7.1	Le valutazioni della probabilità	115
7.1.1	Valutazione combinatoria	116
7.1.2	Probabilità e frequenza	116

7.1.3	Legge empirica del caso e “definizione” frequentista	118
7.1.4	Interpretazione oggettivista e soggettivista della probabilità	119
7.2	Concetto di probabilità condizionata	120
7.3	Eventi di probabilità nulla	120
7.4	Definizione di probabilità come grado di fiducia	121
7.5	Speranza matematica e previsione di vincita	123
7.6	Previsione di guadagno	124
7.7	Eventi e insiemi	126
7.7.1	Somma logica di due eventi incompatibili	128
7.8	Regole di base della probabilità - assiomi	130
7.9	Evento condizionato	131
7.9.1	Probabilità dell'evento condizionato	132
7.9.2	Indipendenza stocastica (o in probabilità)	133
7.9.3	Legge della moltiplicazione	134
7.9.4	Legge delle alternative	134
7.10	Problemi	138
8	Probabilità delle cause	145
8.1	Inferenza probabilistica	145
8.2	Teorema di Bayes	146
8.2.1	Chiavi di lettura del teorema di Bayes	148
8.2.2	Esempi tipici di applicazione	149
8.2.3	Osservazioni indipendenti e prodotto delle verosimiglianze	154
8.2.4	Recupero e superamento del metodo di falsificazione	154
8.3	Problemi	155
9	Variabili casuali	159
9.1	Numeri aleatori	159
9.2	Distribuzione di probabilità di variabile discreta	159
9.2.1	Proprietà delle distribuzioni di probabilità discrete	163
9.2.2	Sintesi di una distribuzione di probabilità: previsione e incertezza di previsione	163
9.2.3	Previsione o valore atteso	164
9.2.4	Valore atteso di una funzione di una variabile casuale	165
9.2.5	Varianza e deviazione standard	165
9.2.6	Proprietà di varianza e deviazione standard	166
9.2.7	Momenti di una distribuzione e altri indicatori di forma	167
9.3	Variabili casuali continue e densità di probabilità	168
9.3.1	Probabilità nulle con diversi gradi di fiducia	168
9.3.2	Dal grado di fiducia alla probabilità finita	168
9.3.3	Funzione densità di probabilità	169
9.3.4	Proprietà della funzione densità di probabilità e della funzione di ripartizione	170
9.3.5	Valori attesi	170
9.4	Variabili casuali multiple	170
9.4.1	Distribuzione di probabilità di variabili multiple	172
9.4.2	Variabili casuali doppie discrete	172
9.4.3	Estensione dei teoremi sulla probabilità alle funzioni di probabilità discrete	173
9.4.4	Variabili casuali doppie continue	173
9.4.5	Distribuzioni marginali	174
9.4.6	Distribuzioni condizionate	174
9.4.7	Variabili casuali indipendenti	175

9.4.8	Formula delle alternative e teorema di Bayes	176
9.4.9	Previsione e incertezza di previsione	176
9.4.10	Covarianza e coefficiente di correlazione	177
9.5	Legge dei grandi numeri	181
9.5.1	Disuguaglianza di Markov	182
9.5.2	Disuguaglianza di Cebicev	182
9.6	Intervalli di probabilità, o di credibilità	183
9.7	Problemi	183
10	Distribuzioni di variabili casuali discrete	185
10.1	Processo di Bernoulli	185
10.1.1	Combinazione di molti processi di Bernoulli	186
10.2	Distribuzione geometrica	187
10.2.1	Assenza di memoria	188
10.2.2	Valore atteso e deviazione standard	189
10.3	Distribuzione binomiale	189
10.3.1	Proprietà della distribuzione binomiale e note sul suo uso	190
10.3.2	Valore atteso e deviazione standard	190
10.3.3	Uso tipico della distribuzione binomiale: misure di efficienza	193
10.3.4	Previsione di una distribuzione statistica	193
10.3.5	Teorema di Bernoulli	194
10.4	Distribuzione di Poisson	196
10.5	Riproduttività della distribuzione binomiale e di Poisson	201
10.6	Altre distribuzioni di interesse	202
10.6.1	Distribuzione di Pascal	202
10.6.2	Distribuzione multinomiale	206
10.7	Quanto credere in "$X = \mu \pm \sigma$"?	208
10.7.1	Alcuni esempi numerici	209
10.8	Problemi	211
11	Distribuzioni variabili casuali continue	215
11.1	Distribuzione uniforme continua	215
11.2	Distribuzioni triangolari	216
11.3	Distribuzione esponenziale	217
11.4	Processo di Poisson - Seconda parte	218
11.4.1	Distribuzione del tempo di attesa del primo successo	218
11.4.2	Relazione fra esponenziale e poissoniana	218
11.4.3	Relazione fra esponenziale e geometrica	219
11.4.4	Tempo di attesa del k -mo successo	220
11.4.5	Intensità di più processi di Poisson indipendenti	221
11.4.6	Vita media di decadimento	222
11.5	Distribuzione normale	222
11.5.1	Distribuzione normale standardizzata	224
11.5.2	Uso delle tabelle dell'integrale della distribuzione normale standardizzata	226
11.5.3	Proprietà riproduttiva della distribuzione normale	229
11.6	Altre distribuzioni di interesse	229
11.6.1	Beta	229
11.6.2	Gamma	231
11.6.3	Distribuzione del χ^2	231
11.6.4	t di Student	234

11.6.5	Esempio di distribuzione bidimensionale continua	235
11.6.6	Distribuzione normale bivariata	236
11.7	Problemi	240
12	Funzioni di variabili casuali	243
12.1	Propagazione delle incertezze	243
12.2	Soluzione generale per variabili discrete	244
12.2.1	Regola generale	244
12.2.2	Convoluzione di due funzioni di probabilità	244
12.2.3	Convoluzione di una funzione poissoniana con una binomiale	246
12.3	Soluzione generale per variabili continue	246
12.3.1	Cambiamento di variabile	247
12.3.2	Caso di funzioni non monotone	249
12.3.3	Somma di due variabili	250
12.3.4	Dimostrazione sul prodotto di due gaussiane	252
12.4	Valore atteso e varianza di combinazioni lineari	252
12.4.1	Limite della media aritmetica	255
12.4.2	Varianza campionaria s_{n-1}^2	256
12.5	Correlazione fra combinazioni lineari di variabili casuali	257
12.6	Teorema del limite centrale	259
12.6.1	Distribuzione della media aritmetica	262
12.6.2	Convergenza gaussiana di alcune distribuzioni di probabilità	262
12.6.3	Derivazione della gaussiana come limite di funzione binomiale o poissoniana	263
12.7	Linearizzazione	268
12.8	Formalismo della matrice di covarianza	268
12.9	Riepilogo di alcune proprietà delle funzioni di variabili casuali	271
12.10	Problemi	271

IV

Inferenza

13	Inferenza	275
13.1	Verosimiglianza normale con σ nota	276
13.1.1	Possibili dubbi sul modello normale	278
13.2	Il metodo della massima verosimiglianza	278
13.3	Effetto di una prior rilevante: combinazione di risultati	280
13.4	Derivazione di Gauss della gaussiana	282
13.5	Caso di forte vincolo dato dalla prior	284
13.6	Caso di σ ignota	286
13.6.1	Ragionamento intuitivo	286
13.6.2	Inferenza simultanea su μ e σ	287
13.6.3	Distribuzione di $1/\sigma^2$	292
13.6.4	Raccomandazioni	293
13.7	Distribuzione predittiva	294
13.8	Problemi	298

14	Adattamento di curve a dati sperimentali	301
14.1	Inferenza sui parametri di una legge	301
14.1.1	Richiami sulla δ di Dirac	302
14.1.2	Come tener conto anche di possibili incertezze sulle X	303
14.2	Il metodo dei minimi quadrati	303
14.2.1	$\sigma_Y = \sigma$ nota e costante	307
14.2.2	σ_{Y_i} ignote e supposte costanti	307
14.2.3	Caso particolare: assenza di andamento	308
14.3	Rette di calibrazione ed estrapolazione	308
14.4	Analisi grafica	309
14.4.1	Stima dei parametri	309
14.4.2	Stima dell'incertezza sui parametri ripetendo le misure	311
14.4.3	Stima dell'incertezza della singola misura dai residui	311
14.4.4	Valutazione semplificata di σ_r	312
14.4.5	Barre di incertezza	312
14.4.6	Incetezza dei parametri mediante σ_r ricavata dai dati	312
14.4.7	Analisi nel baricentro	313
14.5	Effetto degli errori sistematici	313
14.5.1	Errori sistematici dipendenti dal valore della grandezza	313
14.5.2	Errore di zero	313
14.5.3	Errore di scala	314
14.5.4	Deviazione dalla linearità	314
15	Inferenza per misure di conteggio	319
15.1	Misure di conteggi, di proporzioni e di efficienze	319
15.2	Inferenza su p e λ (o r) in condizioni di normalità.	319
15.2.1	Caso poissoniano	319
15.2.2	Caso binomiale	320
15.3	Caso generale di inferenza con verosimiglianza binomiale	320
15.3.1	Caso di routine	322
15.3.2	Casi critici	322
15.3.3	Combinazione di misure indipendenti	323
15.4	Caso generale di inferenza con verosimiglianza poissoniana	323
15.4.1	Caso di routine	324
15.4.2	Caso di $x = 0$ con prior uniforme	324
15.4.3	Combinazione di risultati	325
15.4.4	Inferenza sull'intensità del processo di Poisson da osservazioni effettuate con diversi tempi di osservazione	325
15.5	Teorema di Bayes e probabilità delle ipotesi	329
15.6	Problemi	333
16	Test di ipotesi	337
16.1	Test di ipotesi frequentista	337
16.1.1	Rapporto delle verosimiglianze	339
16.1.2	Il p-value	339
16.2	Test di ipotesi bayesiano	339
16.2.1	Modelli che non dipendono da alcun parametro	340
16.2.2	Modelli parametrici	341
16.2.3	Adattamento del modello e scelta del modello	341
16.2.4	Confronto tra modelli parametrici, fattore di Occam	342

16.3	Analisi delle dipendenze funzionali e scelta del modello	344
16.3.1	Test del χ^2	344
16.3.2	Test del χ^2 per un istogramma	347
16.3.3	Test gaussiano per misure di una stessa grandezza fisica	348
16.3.4	Test t-student per poche misure con incertezza ignota di una stessa grandezza fisica	348
16.4	Test di ipotesi: modello lineare o modello quadratico?	348

V**Appendici**

A	Appendice Come scrivere una relazione di laboratorio	355
A.1	Documentazione del lavoro sperimentale	355
A.2	Redazione del quaderno di laboratorio	356
A.3	Stesura della relazione	358
A.4	Cifre significative	359
A.4.1	Dai valori letti ai risultati delle misure	359
A.4.2	Cifre decimali e cifre significative	360
A.4.3	Regole pratiche (da prendere “cum grano salis”)	361
A.4.4	Suggerimenti	362
A.5	Arrotondamenti	362
A.6	Controllo dimensionale e degli ordini di grandezza	363
A.7	Problemi	363
B	Appendice Calcolo combinatorio	365
B.1	Problemi elementari tipici	365
B.2	Disposizioni e combinazioni	365
B.2.1	Regola fondamentale del calcolo combinatorio	365
B.2.2	Numero di r -disposizioni di n oggetti	366
B.2.3	Numero di r -disposizioni semplici di n oggetti	366
B.2.4	Numero di permutazioni di n oggetti	367
B.2.5	Combinazioni	367
B.2.6	Coefficienti binomiali	368
B.2.7	Note su nomenclatura e simbologia	369
B.3	Note sul calcolo dei grandi numeri	369
B.4	Alcuni esempi classici	370
B.5	Ricapitolando	372
B.6	Problemi	372
C	Appendice Soluzioni dei problemi	375
	Indice analitico	401

Prefazione

Cari Studenti queste dispense hanno lo scopo di raccogliere in un unico testo tutto il materiale funzionale al corso di Laboratorio di Meccanica. Il manuale si basa su tre dispense scritte nel corso degli anni dal Prof. Giulio D'Agostini la cui versione integrale è reperibile [in rete](#).

Il testo fa riferimento alle definizioni e ai concetti elaborati dal *Bureau International Des Poids et Mesures* (BIPM) nella *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM) che racchiude il lavoro delle più autorevoli organizzazioni mondiali di metrologia.

La prima parte è un'introduzione al metodo sperimentale basata sui seminari divulgativi del Prof. G. D'Agostini.

La seconda parte, che anticipa molti dei concetti che sono spiegati in modo più approfondito e formale nelle parti successive, è da intendersi ad uso degli studenti del corso di Laboratorio di Meccanica alle prese con le prime esperienze di laboratorio, come guida pratica finalizzata a poter svolgere una preliminare analisi dei dati sperimentali e stima delle incertezze di misura.

La terza parte, introduce la teoria della probabilità, le proprietà delle variabili casuali e delle funzioni di variabili casuali. Le distribuzioni di variabili casuali più importanti per le applicazioni alle misure sperimentali sono descritte e accompagnate da molti esempi.

Infine, la quarta parte è dedicata all'inferenza statistica partendo dal teorema di Bayes. I più comuni casi di inferenza che si presentano nella fisica sperimentale sono illustrati in dettaglio, sono inoltre descritti i principali test di ipotesi.

Queste dispense sono dunque da intendersi come una raccolta coerente di materiale con il duplice fine di fornire le nozioni di base del calcolo delle probabilità e della statistica, e nello stesso tempo guidare gli studenti collegando le nozioni teoriche alle applicazioni pratiche nelle misure di laboratorio.

Gli argomenti trattati a lezione, potranno dunque seguire un ordine differente rispetto alle dispense, per conciliare il calendario delle esercitazioni di laboratorio con le nozioni teoriche di statistica a queste necessarie.



Introduzione

1	Introduzione	5
1.1	Onde gravitazionali o semplici vibrazioni ambientali?	
1.2	Dati e ipotesi che li spiegano	
1.3	Conoscenza, modelli e parametri dei modelli	
1.4	L'esperimento 'giocattolo' delle sei scatole	
1.5	Valore vero e valore misurato. Errore e incertezza.	
1.6	Dalle masse dei buchi neri alle masse misurate sulle balance	
1.7	Quale 'metodo scientifico'? Diffidare dei cliché	

1. Introduzione

*Quando le leggi della matematica si riferiscono alla realtà, non sono certe;
e quando sono certe, non si riferiscono alla realtà.*
(Albert Einstein)

*“Tutti e sempre ci troviamo – nei confronti di tutte
o quasi le cose – in condizione d’incertezza.
Incerteza in ogni senso.*

Incerteza circa le situazioni di fatto, presenti o passate...

Incerteza nelle previsioni, che non verrebbe eliminata

o sminuita neppure accogliendo nel senso più assoluto

il principio (d’altronde non più di moda) del determinismo...

*Perfino nel campo del tautologico (cioè di che è vero o falso
per mera definizione, indipendentemente da ogni circostanza contingente)
ci troviamo pur sempre, di fatto, nell’incerteza, ...*

per esempio di quale sia la settima o la miliardesima cifra decimale di π ...
(Bruno de Finetti)

1.1 Onde gravitazionali o semplici vibrazioni ambientali?

L’undici febbraio 2016 la Collaborazione internazionale LIGO-Virgo ha annunciato la prima rivelazione di onde gravitazionali. Emesse in un collasso gravitazionale fra due buchi neri avvenuto circa un miliardo di anni fa, esse hanno raggiunto la Terra il 14 settembre 2015, provocando oscillazioni dello spazio che sono state rivelate da sofisticati rivelatori.¹

La figura 1.1 mostra i segnali registrati indipendentemente dai due *interferometri* di LIGO, disposti

¹Come si può immaginare, la notizia ha avuto grande risonanza nella comunità scientifica e anche nei media e si può trovare quindi molto materiale in rete. Ci permettiamo soltanto un paio di suggerimenti

- L’articolo originale, del quale citeremo alcuni numeri: B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, PRL **116**, 061102 (2016), https://dcc.ligo.org/public/0122/P150914/014/LIGO-P150914_Detection_of_GW150914.pdf
- La conferenza a Frascati della ricercatrice Barbara Sciascia, disponibile su YouTube: <https://www.youtube.com/watch?v=RbJsDUiNIV0>.
- Il video di Veritasium sull’assurdità di rivelare le onde gravitazionali, <https://www.youtube.com/watch?v=iphcyNWFD10&t=32s> (niente di ‘assurdo’, ci mancherebbe: solo una espressione colorita per sottolineare la difficoltà di tale misura).

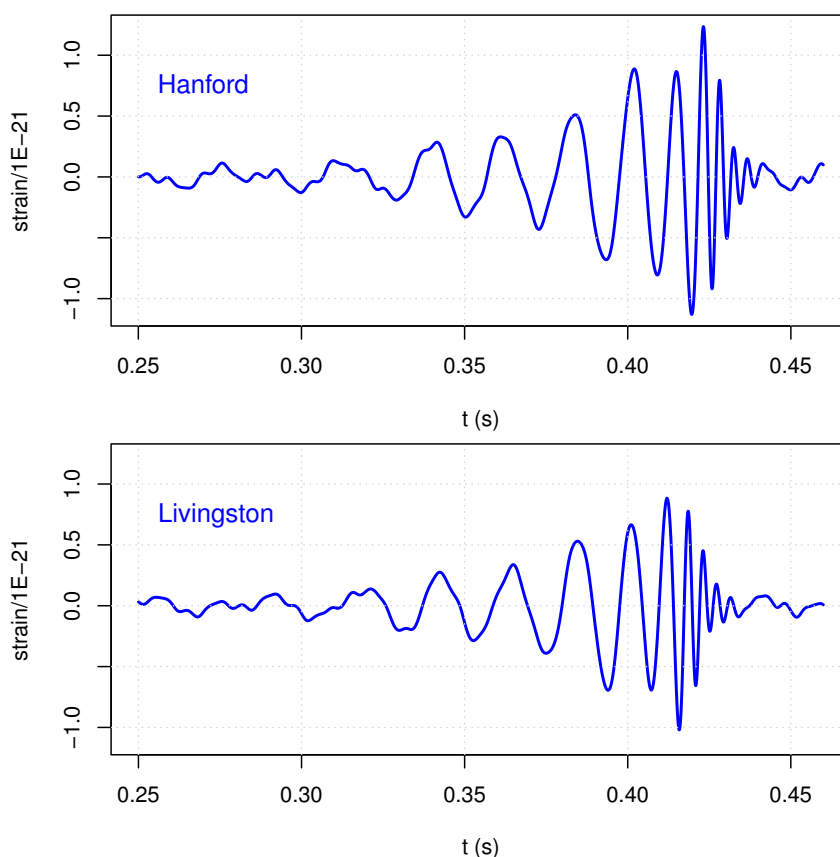


Figura 1.1: Segnali registrati dei due interferometri di Ligo, ove lo ‘strain’ rappresenta la variazione relativa della lunghezza di una ipotetica barra durante l’oscillazione.

a circa 3000 km di distanza uno dall’altro. Sull’ascissa viene riportato il tempo, in secondi, a partire da un istante per noi irrilevante. L’ordinata rappresenta invece la variazione relativa della lunghezza di una ipotetica barra, in unità 10^{-21} . Questo è stato infatti l’ordine di grandezza della variazione relativa dello spazio al passaggio dell’onda, talmente piccola che abbiamo difficoltà a farcene una rappresentazione intuitiva. Per avere un’idea, il diametro della Terra ha oscillato di circa 1.3×10^{-14} m, ovvero di circa le dimensioni di un nucleo di oro— ma chi ha una intuizione delle dimensioni nucleari? O, al contrario, ci si può chiedere quanto dovrebbe essere lunga un’ipotetica barra per avere una oscillazione di circa un millimetro, conto che lasciamo come esercizio.

Al di là delle questioni ‘tecniche’, che sono invero questioni ‘fisiche’, riguardanti i rivelatori e tutte le perturbazioni che possono soffocare il segnale, cerchiamo di capire cosa si può imparare dalle oscillazioni di figura 1.1. Al passare del tempo, inizialmente le ampiezze aumentano, mentre le creste delle oscillazioni si fanno più ‘fitte’, ad indicare frequenze che aumentano nel tempo. Poi i segnali si spengono rapidamente e le ultime piccole oscillazioni sono, come lo erano le primissime, dominate dal ‘rumore.’

I segnali delle due antenne non sono identici, sia perché la loro sensibilità non è la stessa, sia perché il segnale delle onde è sovrapposto a rumore, proprio di ciascuna antenna. Inoltre si nota una piccola differenza temporale fra le creste, dovuta alla velocità finita delle onde (e difatti da tale informazione è stato possibile ricavare, in modo seppur approssimativo, direzione e verso di propagazione delle onde).

Passiamo finalmente alle domande fisiche più interessanti. Come facciamo ad affermare che si tratta veramente di onde gravitazionali? Cosa possiamo dire sul fenomeno che le ha prodotte? Quali informazioni quantitative portano sull’ipotetica fusione fra due buchi neri? È chiaro infatti che, nonostante la rivelazione sia ritenuta di portata storica, si capisce bene che non ha l’immediatezza delle lune di Giove o delle fasi di Venere osservate da Galileo,² tanto per fare degli esempi famosi che hanno rivoluzionato il nostro

²Vedi ad esempio

https://it.wikipedia.org/wiki/Satelliti_medicei

<http://www.amastrofili.org/Doc/Corsi/Unitre/lez01-algalileo.htm>

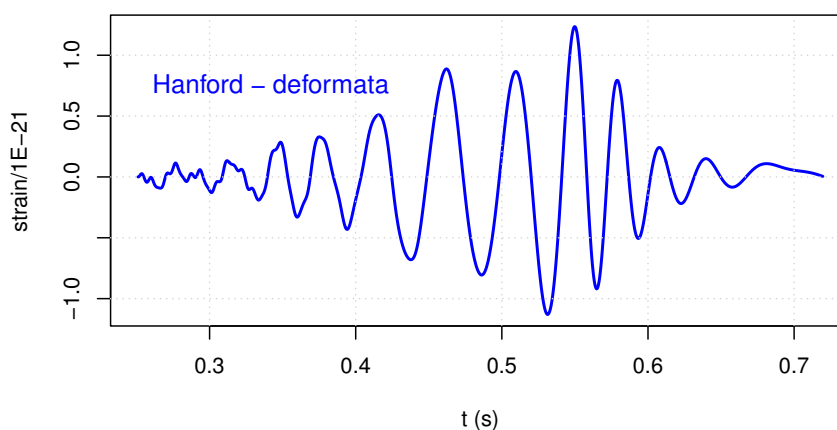


Figura 1.2: Oscillazione ottenuta manipolando al computer quella in alto di figura 1.1.

modo di vedere il mondo. In questo caso le oscillazioni rivelate da LIGO, estratte dal contesto sul tipo di fenomeni che potrebbe averle causate e sulla risposta degli interferometri ai possibili segnali che potrebbero solleccitarli, ci dicono poco o niente.

Per capire meglio, confrontiamo l'oscillazione in alto di figura 1.1 con quella di figura 1.2. E immaginiamo che ci venga assicurato che anch'essa è stata rivelata dall'interferometro di Hanford di LIGO. Mentre un profano potrebbe pensare che si tratti anche in questo caso di un'onda gravitazionale, un esperto scarterebbe subito questa *ipotesi*, ritenendo molto più probabile che si tratti di semplice vibrazione di natura 'terrestre'. In effetti basta aspettare abbastanza e le possibili sorgenti di rumore possono produrre le forme più variegate. Il motivo per cui le oscillazioni di figura 1.1 inducono a credere fortemente all'*ipotesi onde gravitazionali* è duplice. Innanzitutto il fatto che le due oscillazioni sono state registrate su due interferometri a grande distanza (ma oscillazioni simili possono anche verificarsi per puro caso!). C'è poi il fatto che la forma delle oscillazioni ha una spiegazione fisica compatibile con fenomeni astrofisici che si ritiene possano accadere nell'universo, in quanto legati ad altre osservazioni e a teorie che le legano. Infatti la Scienza non è una collezione di fatti isolati, bensì una 'rete' di fatti e ipotesi, via via corroborate dal verificarsi di previsioni che dipendono da ipotesi formulate per spiegare quanto osservato precedentemente. Detto con le parole di Poincaré,

La scienza è fatta di dati, come una casa di pietre.

Ma un ammasso di dati non è scienza più di quanto un mucchio di pietre sia una casa.

L'ipotesi fisica che potrebbe spiegare le oscillazioni di figura 1.1 è, come detto, quella di una collisione fra due buchi neri, i quali si fondono per dar luogo a un nuovo buco nero. E tale processo è, detto alla buona, 'esotermico,' come tante 'fusioni' che avvengono nella chimica, anche se con scale di energia dissipata mostruosamente diverse da quelle delle reazioni fra atomi e molecole. Come conseguenza la massa del buco risultante è inferiore alla somma dei buchi neri che si sono fusi. L'energia associata alla massa mancante (in virtù della famosa $E = mc^2$ di Einstein) è stata infatti irraggiata, proprio sotto forma di onde gravitazionali. Ne valuteremo l'entità fra breve.

1.2 Dati e ipotesi che li spiegano

Ricapitolando, le oscillazioni di figura 1.1 rappresentano i dati sperimentali, ovvero quanto 'effettivamente' rivelato dagli interferometri (in realtà non sono propriamente i dati 'grezzi', ma diciamo che sono molto vicini ad essi). Il nostro interesse è risalire ai fenomeni che possono averli prodotti. Detto altrimenti, dobbiamo risalire dagli *effetti* osservati alla *causa* che ne è responsabile. Questo è il processo mentale che sta dietro al processo di misura. A volte, ma raramente, possiamo associare a ciascuna causa un particolare effetto, e risalire quindi in modo univoco dall'effetto alla causa. Ma nella maggior parte dei casi non è così, anche in misure che eseguiamo quotidianamente.

Se ad esempio poniamo una mela su una bilancia *digitale*, tanto per eliminare incertezze dovute alla lettura di *scale analogiche*, e consideriamo il valore m di massa una *grandezza fisica* che possa variare

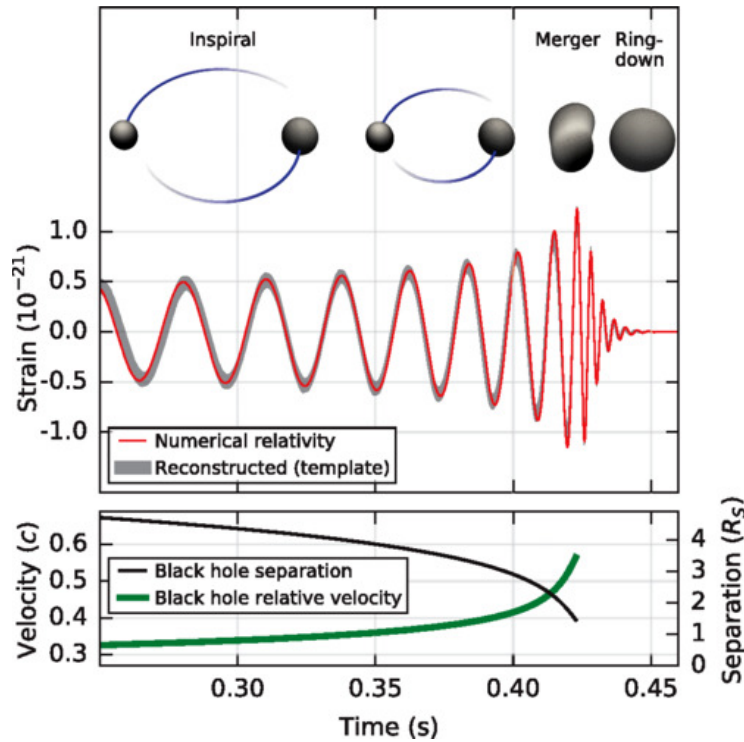


Figura 1.3: Schema di modello teorico in grado di render conto delle oscillazioni di figura 1.1.

con continuità (ottima ipotesi, finché non scendiamo a livello atomico), ci possono essere una infinità di valori compatibili con il numero letto sul display, ad esempio 115 (grammi). Queste considerazioni sembrano ridicole, ed effettivamente lo sono, se il valore di massa della mela in questione ci serve per pagare il fruttivendolo o per fare l'inventario delle calorie ingerite durante il giorno. Non è così se si tratta di grandezze fisiche dalle quali dipendono le *nostre conoscenze del mondo* (quello che va sotto il nome di *Scienza*, e che non va confuso con *il Mondo!*). Oppure se il valore può essere critico per il funzionamento di un importante dispositivo – la ricerca della precisione fine a sé stessa è solo una perdita di tempo!

Tornando ai segnali registrati dagli interferometri di LIGO, la causa più banale è quella di una vibrazioni del sistema, anche se gli sperimentatori hanno preso un gran numero di sofisticati accorgimenti per ridurre l'effetto, almeno in un certo intervallo di frequenza. L'altra causa è un effettiva onda gravitazionale che ha fatto oscillare al suo passaggio i 'bracci' dell'interferometro. O per essere più precisi, un'onda gravitazionale che si aggiunge a un rumore irriducibile, in quanto qualche piccolissima vibrazione è pur sempre presente nel sistema anche durante il passaggio dell'onda. Il modello di fusione dei due buchi neri è rappresentato schematicamente in figura 1.3, presa dall'articolo del febbraio 2016 della Collaborazione LIGO-Virgo (vedi nota 1): a mano a mano che i due buchi neri si avvicinano, essi ruotano sempre più vorticosamente intorno al centro di massa comune, poi c'è il botto – e che botto! – intorno $t = 0.42s$ nella scala della figura (come si legge dalla figura, nel modello la velocità di impatto supera la metà della velocità della luce!).

Si noti inoltre come le oscillazioni di questa figura differiscono da quelle di figura 1.1, soprattutto fino intorno a 0.35 s, ovvero quando è grande lo spazio fra creste consecutive. Questo è dovuto al fatto che gli interferometri attuali sono poco sensibili e molto 'rumorosi' a basse frequenze, e quindi le onde gravitazionali associate alle prime rotazioni dei buchi neri sono rivelate con grande difficoltà (come rozza analogia, si pensi al nostro orecchio, che rivela bene onde acustiche intorno alle frequenze della voce umana, per perdere gradualmente sensibilità a basse e alte frequenze).

Va da sé che se l'*effetto osservato*, ovvero le due oscillazioni quasi simultanee nei due interferometri, non può essere prodotto da una delle due ipotesi, rimane in gioco soltanto l'altra. Ma purtroppo non è così. In questo caso nessuna delle due ipotesi può essere esclusa con *assoluta certezza*. Ciò nonostante gli esperti protendono a *credere fortemente* all'ipotesi del collasso fra i due buchi neri (a cui si sovrappone un minimo di fondo irriducibile). Ma l'articolo di LIGO-Virgo non riporta direttamente – e, come impareremo, a ragione – un valore di probabilità, come indicatore del grado di credenza di un'ipotesi rispetto all'altro.

Viene invece dato un numero che indica come dobbiamo cambiare le nostre credenze sulle due ipotesi, che possono differire da esperto a esperto, per questioni personali e culturali. Tale numero è cosiddetto *fattore di Bayes* (o *Bayes factor*, ‘BF’, anche se qualcuno dice che lo si dovrebbe chiamare *Bayes-Turing factor*³).

1.2.1 Fattore di Bayes e aggiornamento del rapporto di probabilità

Affronteremo al momento debito l’*inferenza probabilistica* e il ruolo del fattore di Bayes (BF) nel farci cambiare il nostro grado di convincimento sulle diverse ipotesi alla luce delle osservazioni sperimentali. Ci permettiamo di illustrare tale ‘fattore’ già in questa introduzione, in quanto il suo significato e il suo uso sono alquanto intuitivi, mentre la sua valutazione in applicazioni non banali può essere estremamente complicata – e questo ci porta a un altro aspetto che si incontra quanto “si fa Scienza”: credere ai numeri forniti da ricercatori e che difficilmente potremo riprodurre, in quanto essi si basano sulla conoscenza dettagliata della fisica che si sta studiando, dei rivelatori e delle procedure di analisi.⁴

Affermare che crediamo allo stesso modo a due ipotesi alternative, che indichiamo H_1 e H_2 , è equivalente a dire che riteniamo $P(H_1 | I_0)/P(H_2 | I_0) = 1$, ove $P()$ sta per probabilità e quanto è a destra barra verticale ‘|’ indica lo stato della nostra conoscenza, *informazione*, che ci porta a tale affermazione (si noti come le ipotesi H_1 e H_2 possono anche non essere mutuamente esclusive ed esaustive, come vedremo a tempo debito).

Ma potremmo credere a H_1 molto meno di quanto crediamo a H_2 . Ad esempio H_2 potrebbe essere 1000 volte più credibile di H_1 , ovvero $P(H_1 | I_0)/P(H_2 | I_0) = 1/1000$.

Ora il fattore di Bayes è un numero che ci dice quanto i dati, visti come una ulteriore informazione che si aggiunge a quella preesistente, ‘spingono verso una delle due ipotesi rispetto all’altra’. Tecnicamente *il rapporto delle probabilità alla luce dei dati sperimentali si ottiene moltiplicando il rapporto iniziale per tale fattore*:

$$\frac{P(H_1 | I_0, \text{dati})}{P(H_2 | I_0, \text{dati})} = \text{BF}(H_1, H_2, \text{dati}) \times \frac{P(H_1 | I_0)}{P(H_2 | I_0)},$$

ove $\text{BF}(H_1, H_2, \text{dati})$ è dato dal rapporto fra le probabilità di osservare tali ‘dati’ alla luce di (“condizionatamente a”) ciascuna delle due ipotesi:

$$\text{BF}(H_1, H_2, \text{dati}) = \frac{P(\text{dati} | H_1)}{P(\text{dati} | H_2)}.$$

Anche se il calcolo di tale fattore può essere molto complicato, una volta che noi *ci fidiamo* di chi ha fatto i conti, la sua applicazione al fine di cambiare la nostra propensione in favore di una delle due ipotesi è una questione di aritmetica elementare (e se ci si pensa bene, sono innumerevoli le situazioni in cui ci troviamo in condizioni analoghe, *mutando* la nostra *opinione* e *prendendo decisioni* in base a numeri calcolati da altri).

Nel caso di ipotesi che ritenevamo inizialmente equiprobabili, un BF di 1000 o di 1/1000 ci fa cambiare decisamente opinione, in quanto il rapporto fra le probabilità cambierà di un fattore mille verso l’una o l’altra ipotesi. Se invece H_1 era 1000 volte meno credibile di H_2 , un BF di 1000 ci porta a un giudizio di indifferenza fra le due ipotesi. Un BF di un milione, invece, ci porta a ribaltare il nostro giudizio.

Ora, fatta questa premessa, si capisce come il BF di circa 10^{125} – tale è il numero valutato dai ricercatori di LIGO-Virgo! – in favore delle onde gravitazionali dovute a un collasso fra due buchi neri ci faccia escludere *praticamente* l’ipotesi di rumore, anche se magari possiamo nutrire dei dubbi sull’esattezza di tale numero. Infatti, anche se esso fosse stato sovrastimato di qualche miliardo di miliardo di volte, rimarrebbe pur sempre superiore a 10^{100} . Insomma, seppur davamo all’ipotesi rappresentata dalla figura 1.3 una possibilità remota, i dati ci portano a cambiare radicalmente la nostra opinione – *gli scienziati non dovrebbero mai essere dogmatici*, anche se è ragionevole che tanto la nuova ipotesi era inizialmente poco credibile tanto più convincenti devo essere le prove. Questo è, detto alla buona, il ruolo del fattore di Bayes.

³Vedi ad esempio <https://arxiv.org/abs/1609.01668>, in particolare nota 1 a pagina 2.

⁴Ad esempio, anche se può sembrare solo un divertente aneddoto, dopo la rivelazione dei segnali di figura 1.1 una delle ipotesi sulla quale i ricercatori di LIGO-Virgo hanno investigato, fino ad escluderla, è stata quella di falsi segnali iniettati da qualcuno allo scopo screditare la collaborazione, oppure di favorire i teorici che avevano previsto i fenomeni a cui le oscillazioni osservate erano riconducibili.

Al contrario, se qualcuno si rifiuta di credere ideologicamente a tale eventualità, insisterà a sostenere che non esistono nell'universo eventi di questo tipo e che i ricercatori di LIGO e Virgo si sono inventato tutto (come chi crede che l'uomo non sia mai andato sulla Luna e che siamo stati ingannati dalla NASA).

1.3 Conoscenza, modelli e parametri dei modelli

A questo punto, fidandoci di chi ne sa più di noi di astrofisica, buchi neri, del comportamento degli interferometri per onde gravitazionali e dei rumori ai quali essi possono essere soggetti, siamo propensi a credere che le oscillazioni di figura 1.1 siano da attribuire all'ipotesi illustrata in figura 1.3.

Ma questa ipotesi non è 'precisa', nel senso che non è caratterizzata da valori esatti delle masse dei buchi neri, dalla loro distanza da noi, dai loro parametri orbitali, e così via. In altri termini, l'ipotesi "onde gravitazionali dovute a collasso di due buchi neri (più rumore)" rappresenta una *infinità di ipotesi*, date da 'tanti' punti nello spazio multidimensionale dei parametri del modello. E anche l'ipotesi "solo rumore" ha tanti parametri, in questo caso legati ai modelli di rumore presi in considerazione dagli esperti dalla collaborazione LIGO-Virgo. E, come il fattore di Bayes, ci indica verso quale delle due *ipotesi complesse* protendere alla luce dei dati sperimentali, così è possibile costruire, usando la teoria delle probabilità, 'simili rapporti' che ci dicono quali valori dei parametri sono favoriti dai dati, *sotto l'assunzione* che si tratti dell'ipotesi selezionata dal fattore di Bayes.

Senza poter entrare nei dettagli, in quanto si tratterebbe di anticipare quanto diremo a proposito della cosiddetta *inferenza parametrica*, diciamo semplicemente che, alla luce dell'analisi delle oscillazioni osservate in LIGO, alcuni (intervalli di) valori dei parametri saranno più credibili di altri. Ecco alcuni dei *parametri* riportati nello storico articolo di LIGO-Virgo (vedi riferimento nella nota 1):

- l'evento è avvenuto 410^{+160}_{-180} Mpc (megaparsec) da noi, ovvero, e riducendo anche il risultato alle cifre che ci sembrano più *significative*, $1.3^{+0.5}_{-0.6}$ miliardi di anni luce;
- le masse dei due buchi neri erano pari a 36^{+5}_{-4} e 29 ± 4 masse solari;
- la massa del buco nero risultante è stata pari a 62 ± 4 masse solari;
- l'energia irraggiata sotto forma di onde gravitazionali è equivalente a 3.0 ± 0.5 masse solari,⁵ ovvero, usando la famosa $E = mc^2$, $(5.4 \pm 0.9) \times 10^{47}$ J;
- infine, se come *ordine di grandezza* dell'intervallo temporale durante il quale tale energia è stata emessa usiamo mezzo secondo (vedi figura 1.3), otteniamo una potenza intorno a 10^{48} W. (Per dare un senso a questo numero si pensi che il Sole irradia circa 4×10^{26} W!)

La notazione $x \pm \Delta x$ dei *valori numerici* delle *grandezze fisiche* sta ad indicare che x è il valore numerico *più probabile*, mentre l'intervallo $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ definisce un *intervallo di probabilità* ("credible interval", nell'articolo originale) del 90% (la notazione $x^{+\Delta x}_{-\Delta x}$ sta ad indicare invece un intervallo asimmetrico intorno a x).

Ricapitolando quanto detto in questi paragrafi, e con l'aiuto dello schema di figura 1.4, possiamo dire, molto sommariamente, che *fare scienza* si riduca a confrontare la credibilità delle diverse ipotesi di lavoro, siano esse discrete, come quando confrontiamo diverse teorie, o continue, come quando siamo interessati al valore di grandezze fisiche che *postuliamo* possano assumere valori con *continuità* (e senza dimenticare che questa è spesso solo una *nostra convenienza*, come quando siamo interessati a masse e lunghezze di oggetti e trattiamo tali grandezze come continue, pur sapendo che la materia è discontinua a livello microscopico).

Il motivo fondamentale per il quale in Fisica, e in tutte le scienze, ci troviamo in condizioni di incertezza è che diverse ipotesi (discrete o continue) possono dar luogo, seppur con diverse probabilità, alle stesse osservazioni sperimentali. Ne segue quindi che, avendo effettuato delle osservazioni, ci sono diverse ipotesi (discrete o continue), a cui esse possono essere fatte risalire. O in altri termini, siamo in condizioni di incertezza sulla *causa* responsabile di un certo effetto, come illustrato nella figura 1.5 che illustra quello

⁵A proposito, se cerchiamo su wikipedia i valori della massa del Sole e della velocità della luce, troviamo rispettivamente $(1.98855 \pm 0.00025) \times 10^{30}$ kg e 299792458 m/s, quest'ultima senza *incertezza*, in quanto *assunta tale* (come è noto, oggi giorno è il metro ad essere unità secondaria, legato all'unità di tempo e alla velocità della luce nel vuoto). Si noti come la notazione 1.98855 ± 0.00025 con cui è riportata l'incertezza sulla massa del Sole ha un significato diverso di quello con il quale sono riportate le incertezze delle grandezze fisiche legate alle onde gravitazionali, riportate nel testo. Nel caso della massa del Sole, tale intervallo può essere interpretato come un intervallo di probabilità al 68%, come impareremo nel seguito [e vedremo anche che, con tutto rispetto per gli amici e colleghi di LIGO e Virgo, quello *non è il modo ottimale per riportare il risultato con due soli numeri* (o tre, nel caso di intervalli asimmetrici)].

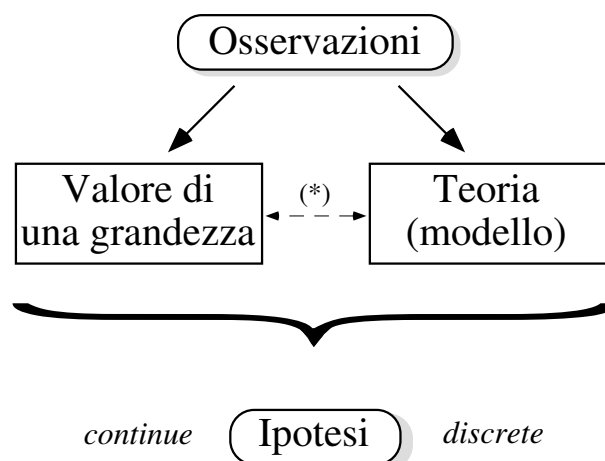


Figura 1.4: Dalle osservazioni alle ipotesi. La relazione fra valore della grandezza e teoria sta ad indicare che in genere le grandezze hanno significato soltanto all'interno di una teoria o un modello.

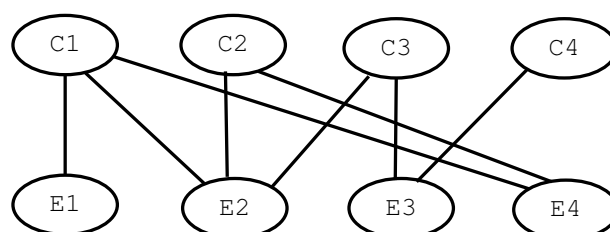


Figura 1.5: Dalle cause agli effetti e dagli effetti alle cause. Mentre E_1 è un caso ideale di un effetto che può provenire da una sola causa, in genere ci troviamo nella condizione di E_2 che non è possibile associare con certezza a una sola causa.

che Poincaré chiamava *il problema essenziale del metodo sperimentale*

“Ora questi sono classificati come probabilità delle cause, e sono i più interessanti di tutti per le applicazioni scientifiche. Immaginate che io giochi a écarté con un signore che io reputi perfettamente onesto. Qual è la probabilità che estragga un Re? È 1/8. Questa è un problema di probabilità degli effetti. Immaginate che io giochi con un signore che non conosco. Lui ha estratto una carta dieci volte e per sei volte gli è venuto un Re. Qual è la probabilità che sia un baro? Questo è un problema di probabilità delle cause. Si può dire che questo sia il problema essenziale del metodo sperimentale.”

E si può dire che lo scopo principale di questo testo sia quello di mostrare come affrontare in modo quantitativo tale problema.

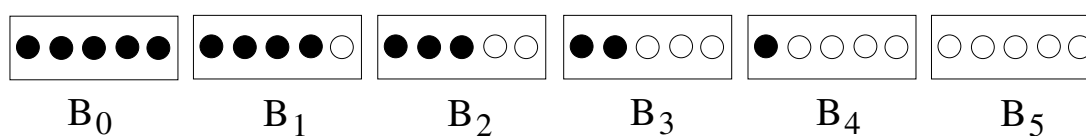


Figura 1.6: Le sei scatole dell'esperimento giocattolo descritto nel testo. Rispetto allo schema generale di figura 1.5, ora abbiamo sei possibili cause (B_{0-5}) e due possibili effetti (W e B, per White e Black). Si noti come, mentre le cause B_{1-4} possono dare sia bianco che nero, qualsiasi sequenza di colore osserveremo non ci porterà mai a una condizione di certezza rispetto a questa ipotesi, B_0 può dare solo nero, mentre B_5 può dare solo bianco. Quindi queste due ipotesi sono *falsificabili*, ma non sarà mai possibile affermare che sono le cause vere delle delle sequenze osservate, in quanto B_{1-4} non sono *falsificabili*.

1.4 L'esperimento 'giocattolo' delle sei scatole

Per illustrare quanto appena detto consideriamo un *toy experiment* costituito da sei scatole, ciascuna con cinque palline, bianche o nere. Il pedice che contraddistingue ciascuna scatola indica il contenuto di palline bianche, essendo le restanti nere (vedi figura 1.6). Quindi la scatola B_0 (B da 'box') è composta da sole palline nere, B_1 da una bianca e una quattro nere, e così via.

Come è abbastanza ovvio, la probabilità di pescare una pallina bianca (W da 'white') effettuando una estrazione 'a caso' dipende dalla composizione delle scatole. Essa vale 0 – *impossibilità* – per B_0 , mentre va a 1 – *certezza* – per B_5 . In genere

$$P(W|B_i) = \frac{i}{5}.$$

Ma non è a questo elementare problema di calcolo delle probabilità a cui siamo interessati – elementare anche perché oggigiorno problemini del genere si incontrano veramente fin dalle scuole elementari.

Se prendiamo una scatola a caso, e ipotizziamo che nulla all'esterno ne tradisca il contenuto (almeno a chi deve rispondere ai quesiti che seguiranno) siamo in condizioni di incertezza su due importanti questioni:

- Quale scatola abbiamo preso?
- Se effettuiamo una estrazione a caso, che colore pescheremo?

Non essendoci alcun motivo per ritenere una delle scatole più probabile delle altre, o un colore più probabile dell'altro, non possiamo che affermare di essere in *condizione di indifferenza* rispetto alle ipotesi di interesse, ovvero formuleremo un giudizio di equiprobabilità fra le diverse possibilità. Ne segue, indicando con C_i i colori possibili

$$\begin{aligned} P(B_i|I_0) &= 1/6 \\ P(C_i|I_0) &= 1/2. \end{aligned}$$

Immaginiamo ora di aver effettuato una estrazione, di aver osservato bianco e di *reinserire* la pallina nella scatola, in modo tale da *ripristinare la composizione iniziale*. La questione che si pone è come cambiano le probabilità di interesse, ovvero quanto valgono $P(B_i|I_0, W^{(1)})$ e $P(C_i|I_0, W^{(1)})$.

La risposta più facile è che $P(B_0|I_0, W^{(1)})$ si annulla, ovvero l'ipotesi B_0 è *falsificata* dall'osservazione sperimentale in quanto, usando il linguaggio di Poincaré, tale causa non può generare l'effetto osservato. Meno banali sono le risposte alle altre domande.

Ad esempio, tolti coloro che hanno idee strane sulle 'palline nere ritardatarie', la cui probabilità aumenterebbe per "mettersi in paro con le leggi della probabilità" (espressioni orripilante che *probabilmente* avrete già sentito), la maggior parte delle persone, confidando nell'intuizione e in facile aritmetica, dicono

- "La probabilità delle altre cinque scatole passa a un quinto, in quanto l'effetto dell'estrazione è stato solo quello di togliere dallo spazio delle possibilità la scatola B_0 ."
- "La probabilità di bianco alla seconda estrazione diventa $15/25 = 3/5$, o 60%, in quanto ora rimangono in gioco 25 palline, di cui 15 bianche e 10 nere."

Entrambe le risposte sono *errate*, e questo dovrebbe mettere in guardia sull'uso dell'intuizione, la quale può essere fallace nelle questioni probabilistiche a cui siamo interessati.

Un semplice modo per rendersi conto dell'errore è pensare a un grande numero di estrazioni dalla stessa scatola, seguite da reintroduzione, le quali danno sempre luogo a una pallina bianca. Dopo 20, 50 o 100 osservazioni consecutive dello stesso colore cominceremo a *credere fortemente*, fino ad essere *praticamente certi*, di avere sorteggiato inizialmente B_5 , con tutte palline bianche, anche se l'unica *certezza logica* è che non si tratta di B_0 ! Come conseguenza di questo convincimento, saremo praticamente certi di estrarre ancora una pallina bianca alla prossima estrazione.

È altresì chiaro che se se dopo una lunga sequenze di palline bianche arriviamo a tali gradi di convincimento, ci deve essere 'qualcosa' in ogni estrazione che 'ci spinge' nella direzione delle scatole con alta proporzione di palline bianche. E quindi anche la sola informazione della prima pallina bianca deve cambiare il nostro giudizio di equiprobabilità rispetto alle cinque composizioni ritenute ugualmente possibili. In particolare riterremo più probabili le scatole che hanno una alto numero di palline bianche, rispetto a quelle che ne hanno un piccolo numero.

Ma se le composizioni con maggiore percentuale di palline bianche sono più probabili di quelle con minore percentuale, bisognerà tenerne conto quando si tratta di valutare la probabilità della prossima

bianca. Ne segue quindi che $P(W^{(2)} | I_0, W^{(1)}) > 3/5$. Per il momento ci accontentiamo di questo risultato e vedremo nel seguito come valutare questa probabilità.

Avendo introdotto precedentemente il fattore di Bayes, ce lo possiamo facilmente calcolare per tutte le coppie di ipotesi di interesse. Tali possibili fattori valgono infatti

$$BF(B_i, B_j, W^{(1)}) = \frac{P(W^{(1)} | B_i)}{P(W^{(1)} | B_j)} = \frac{P(W | B_i)}{P(W | B_j)},$$

ove nell'ultimo rapporto abbiamo tolto l'indicazione dell'estrazione, in quanto *condizionatamente* alla composizione della scatola, la probabilità di bianco e di nero è costante. Otteniamo quindi

$$BF(B_i, B_j, W^{(1)}) = \frac{P(W | B_i)}{P(W | B_j)} = \frac{i/5}{j/5} = \frac{i}{j}.$$

Ad esempio B_5 diventa 5 volte più credibile di B_1 , B_4 due volte più credibile di B_2 , e così via. E, in particolare, le 5 ipotesi ancora possibili, B_{1-5} , diventano *infinitamente più credibili* di B_0 , falsificata dall'osservazione empirica.

Una volta calcolati i fattori di Bayes per tutte le possibili coppie di ipotesi avremo tutti i possibili rapporti di probabilità e, imponendo che la probabilità totale sia unitaria, possiamo valutare tutte le probabilità di interesse.⁶ Ad esempio, dopo una sequenza di 100 bianche l'ipotesi B_5 diventa 5 miliardi di volte più credibile di B_4 e 10^{70} volte più credibile di B_1 . Ma B_5 non è da ritenersi *certa*, come B_1 non è *impossibile*. Lo saranno al più per tutti i *fini pratici*. Ma consideriamo questo conto un semplice esercizio matematico, in questo capitolo introduttivo dedicato a considerazioni metodologiche su come si possa fare *Scienza in condizione di incertezza*.

1.5 Valore vero e valore misurato. Errore e incertezza.

A volte si usa il termine *valore vero* per indicare, come dice il nome, quello 'vero' di una certa grandezza fisica. In realtà, per come abbiamo impostato lo schema di apprendimento, si tratta semplicemente di un *parametro di un modello*, come ciascuno dei lati di un oggetto a forma di parallelepipedo del quale siamo interessati a valutare il volume. È chiaro infatti che il parallelepipedo della Geometria rappresenta solo un modello della realtà, in quanto, se andiamo a ingrandire i dettagli, troveremo che le facce opposte non sono 'perfettamente parallele', i lati supposti uguali non sono tali, e così via, fino ad arrivare alla considerazione che la materia è corpuscolare a livello microscopico. Ma per la maggior parte dei nostri scopi un modello del genere è più che soddisfacente.

Una volta stabilito il modello, usando opportuni *strumenti*, effettuiamo una o più misure, elaboriamo opportunamente i dati e arriviamo finalmente a un *risultato della misura* che rappresenta la nostra 'migliore stima' della grandezza di interesse, ovvero del parametro del modello, o, se vogliamo, del valore vero. La differenza fra il risultato della misura e il 'valore vero' rappresenta l'*errore* di misura. Ma va da sé che non conosceremo mai l'esatta entità dell'errore, in quanto ciò implicherebbe conoscere con certezza anche il valore vero (e in questi casi non ha nemmeno senso effettuare la misura, a meno che non la facciamo per *calibrare* uno strumento).

Diverso è invece il concetto di *incertezza*, che, seguendo le raccomandazioni ISO⁷ rappresenta "*un parametro che caratterizza la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando*", ma che per essere correttamente interpretato ha bisogno di essere definito più precisamente, come ad esempio abbiamo visto nei risultati di LIGO-Virgo sulle onde gravitazionali.

1.6 Dalle masse dei buchi neri alle masse misurate sulle bilance

Le cause di incertezza di un risultato di misura possono essere molteplici e le passeremo in rassegna nel seguito, seguendo quello che chiamiamo confidenzialmente il "decalogo ISO". Per ora facciamo un piccolo

⁶Ecco altre osservazioni basate sui fattori di Bayes, nel caso dell'osservazione di una sequenza di palline bianche; a ogni nuova estrazione H_5 diventa 5 volte più credibile di H_1 e H_4 due volte più credibile di H_2 ; a ogni nuova estrazione la credibilità di H_i diventa meno credibile di un fattore $i/5$; per n grande la probabilità di H_5 tende a 1 e la probabilità delle altre scatole va come $(i/5)^n$.

⁷Si tratta della "Guida all'espressione dell'incertezza di misura", alla quale faremo spesso riferimento nel seguito.

esempio, considerando una misura che effettuiamo correntemente, come quella di una massa effettuata con l'ausilio di una bilancia commerciale del tipo riportato in figura 1.7.

Tale misura si basa sul *principio di misura* dell'equilibrio fra due forze (per cominciare): la forza peso, diretta verso il basso, e la forza elastica della molla, diretta verso l'alto:

$$mg - k\Delta x = 0.$$

L'accorciamento della molla rispetto alla posizione di equilibrio in assenza di massa esterna applicata viene poi convertito in una rotazione dell'ago attraverso dispositivi meccanici, seguito dalla *nostra lettura* della posizione finale dell'ago:



Figura 1.7: Esempio di bilancia pesa persone.

$$\Delta x \rightarrow \theta \rightarrow \text{lettura}.$$

Quello a cui siamo interessati è passare dal valore letto a m . Questa è una operazione che facciamo con tanta familiarità che qualcuno potrebbe pensare ingenuamente che sullo strumento noi *vediamo la massa*, o che il valore letto sulla scala rappresenti il valore vero della massa.

In realtà, come abbiamo discusso ampiamente, m è soltanto un parametro di un nostro modello di realtà. E dal valore di questo parametro al valore letto c'è un ulteriore modello, quello di funzionamento dello strumento.

Quello a cui siamo interessati è schematizzabile nel modo seguente

$$\text{lettura} \xrightarrow{g, k, \text{"etc."} \dots} m$$

ed è quindi chiaro il motivo per il quale siamo in condizione di incertezza sul valore di m :

- g dipende dalla posizione esatta dove è collocata la bilancia, e non è, banalmente, GM_T/R_T^2 , con M_T e R_T massa e raggio della Terra, come si potrebbe pensare ingenuamente. Difatti:
 - la Terra non è sferica, e nemmeno perfettamente ellissoidale: la sua forma è... tautologica (geoide), a causa delle disomogenia di massa;
 - non ci troviamo esattamente sulla 'superficie terrestre';
 - bisogna tener conto dell'effetto centrifugo, in quanto siamo in un sistema di riferimento non inerziale;
 - e se vogliamo essere pignoli bisogna tener conto anche dell'effetto della Luna.

(Siamo d'accordo che preoccuparsi di questi effetti è ridicolo, se m ci serve per controllare il nostro peso, ma stiamo parlando in generale, avendo già in mente possibili misure di importanti grandezze fisiche.)

- Poi, schematizzare l'equilibrio fra soltanto due forze può essere semplicistico anche per applicazioni tecnico-commerciali: abbiamo dimenticato la spinta di Archimede, se la misura era effettuata in aria.
- Passando poi a k , in genere non conosciamo il suo valore 'esatto', e questa incertezza si rifletterà in qualche modo su m . Poi k potrebbe dipendere dalla temperatura e quindi avremo altre incertezze dovute alla non perfetta conoscenza della temperatura e/o alla dipendenza di k dalla stessa.
- Poi dovremo tener conto che il punto di arresto dell'ago della bilancia sarà influenzato da parametri costruttivi della bilancia e da piccoli attriti.
- Infine, avendo la bilancia mostrata in figura una scala a *lettura analogica*, ci sarà una ulteriore componente all'incertezza dovuta alla nostra valutazione della posizione dell'ago fra le tacche graduate.

La storia potrebbe continuare ancora. La terminiamo riassumendo molto schematicamente quanto detto attraverso i diagrammi di figura 1.8, facendo notare come la freccia associata al Modello vada sempre dall'alto verso il basso, anche quando le frecce probabilistico induttive vanno dal basso verso l'alto, ad indicare che l'incertezza è sul valore della massa. Infatti, i nostri modelli di realtà, sia sul fenomeno fisico

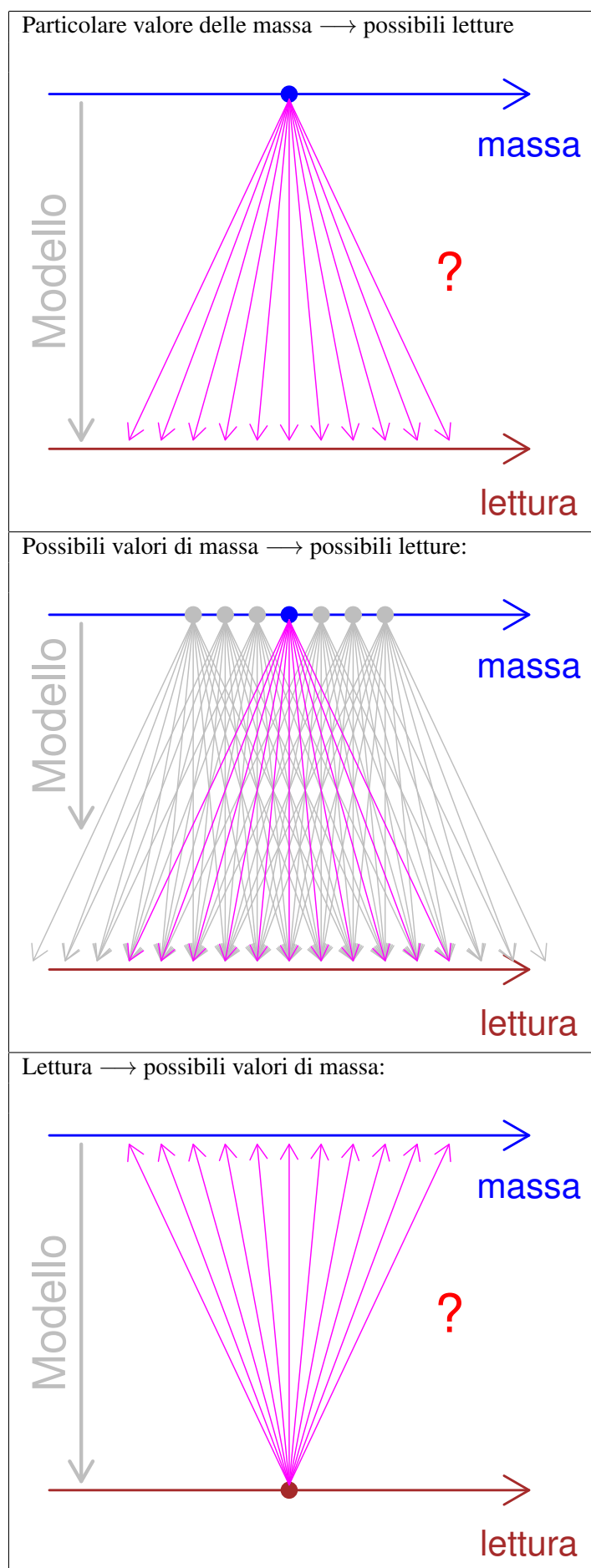


Figura 1.8: Dal parametro del modello al valore letto, e ritorno

di interesse che concernenti le questioni strumentali, sono ‘sempre’ (o almeno così ci sembra) deduttivi: dalle cause agli effetti, ovvero dalle ipotesi di base alle loro conseguenze, siano esse deterministiche che probabilistiche.

1.7 Quale ‘metodo scientifico’? Diffidare dei cliché

Terminiamo questa introduzione con alcune considerazioni, che mettono in chiaro cose già dette esplicitamente nei vari paragrafi.

Innanzitutto, nonostante ci sia ancora qualcuno che ancora annovera la Fisica fra le cosiddette ‘scienze esatte’, facendo presupporre che siano esatti sia i metodi che i risultati, abbiamo visto come siamo praticamente sempre in condizioni di incertezza e quindi bisogna imparare a convivere con affermazioni probabilistiche. Infatti, come scriveva un grande fisico moderno (riportiamo la citazione direttamente in inglese),

*“To make progress in understanding, we must remain modest and allow that we do not know.
Nothing is certain or proved beyond all doubt. [...] The statements of science are not of what is true and what is not true, but statements of what is known to different degrees of certainty.”*
(Richard Feynman)

Poi si sente che il metodo scientifico è basato sugli *esperimenti ripetuti*, definizione che classificherebbe i risultati di LIGO-Virgo sullo storico evento del 14 settembre 2015 come non scientifici. Chi potrà mai ripetere tale esperimento? Chi potrà mai fare un viaggio nello spazio-tempo e verificare che quei due buchi neri siano veramente collassati? O metterli su una bilancia e misurarne la massa? In realtà, come abbiamo visto, si tratta solo di un modello, del quale valutiamo, con incertezze quantificate, i loro parametri. Il motivo per cui tale modello è credibile è che esso è legato ad una grande quantità di dati, legati da altri modelli. In altre parole, è la visione d’insieme che rende credibili i particolari. E quando arriva una notizia che distrugge il quadro generale è più facile che essa sia falsa, piuttosto che il quadro generale sia improvvisamente falsificato. Ma non perché i fisici dei fenomeni fondamentali siano conservatori. Anzi, il loro sommo piacere sarebbe trovare fenomeni nuovi, descritti da teorie innovative, le quali spieghino, seppur come approssimazione, i modelli precedenti.

Legato a questo concetto degli esperimenti ripetuti c’è la vecchia idea secondo cui il “valore vero” è quello che si ottiene da un numero estremamente grande di misure (“per n che va a infinito”) effettuata con “strumenti infinitamente giusti”, ovvero esenti da *errori sistematici* (concetto su cui torneremo in dettaglio nel seguito). È chiaro che questo approccio non ha molto senso. Come facciamo ad esser *certi* che lo strumento sia esente da errori sistematici? E, a parte la questione dell’“ n che va a infinito” (“per n che va a infinito siamo tutti morti”, diceva qualcuno), anche un grande numero di misure sulla stessa grandezza fisica spesso è infattibile, e non solo per i collapsi di buchi neri. Infatti siamo spesso interessati a grandezze che variano con il tempo, e ogni valore osservato sugli strumenti è dovuto a un diverso valore della grandezza di interesse. Ciò nonostante, costruendo un opportuno modello che tiene conto anche della variabilità dei parametri con il tempo, riusciamo a fare affermazione probabilistiche anche sul valore delle grandezza fisica per tempi in cui non sono state effettuate osservazioni. Tutta l’astronomia, ad esempio, è basata su modelli del genere, tali che ci fanno dire “dove sta Mercurio” (con una opportuna incertezza) anche quando è dall’altra parte del Sole e quindi a noi invisibile.

L’importanza di fare Scienza per modelli sembra fosse ben chiara anche a Galileo, come si evince da questo passo del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*:

“La cognizione d’un solo effetto acquistata per le sue cause ci apre l’intelletto a ’ntendere ed assicurarci d’altri effetti senza bisogno di ricorrere alle esperienze.”
(Galileo Galilei)

Avere ben in mente il *modello di Mondo* a cui si fa riferimento, usualmente suddiviso in tanti modelli in qualche modo interconnessi che rappresentano le varie discipline scientifiche, non solo ci permette di aggiornare la nostra conoscenza sui parametri dei vari modelli e di fare osservazioni future (anche queste con inevitabili incertezze), ma ci permette anche di pianificare opportunamente le nostre ricerche. Infatti,

mediante calcoli analitici e/o simulazioni al computer, è possibile capire quali sono le osservazioni dalle quali si impara di più, e quelle che ci permettono di selezionare un modello rispetto a un altro. Oppure quali effettuare con maggiore *accuratezza* e sulle quali investire più tempo e denaro. Questo è il motivo per cui nella fisica di frontiera si effettuano misure di precisione. Ma non per il gusto della precisione in sé, quanto perché, confrontando i risultati con previsioni teoriche alternative è possibile fare progressi nella comprensione del mondo che ci circonda.

Un altro comune cliché è legato alla *falsificazione*, che alcuni ritengono essere un punto saldo del progresso scientifico. Abbiamo visto come non esiste alcun motivo di invocare tale *principio*, in quanto va da sé che una causa che non può produrre un effetto è automaticamente falsificata nel caso tale effetto venga osservato. Ma esistono anche ipotesi che, dal punto di vista strettamente logico non sono falsificabili, come ad esempio le composizioni B_{1-4} nell’esperimento giocattolo delle sei scatole. Il fatto che noi possiamo arrivare, alla luce delle osservazioni empiriche, ad associare un valore di probabilità vicinissimo a 1 per una ipotesi, e di conseguenza probabilità piccolissime (‘virtualmente nulle’) per le altre, è tutt’altra storia.

L’esperimento giocattolo delle sei scatole ci illustra anche un ulteriore punto che vogliamo affrontare. Come abbiamo visto, nota la composizione, siamo in genere incerti sull’esito dell’estrazione (le scatole con tutte bianche e tutte nere sono da ritenersi casi limite). Possiamo quindi vedere la *probabilità* di Bianco come una *proprietà fisica* della scatola, una sorta di *propensione* di tale scatola a dare Bianco anziché Nero. In questo semplice caso tale propensione è semplicemente data dalla proporzione di palline bianche. Ne segue che, al momento di quantificare il *nostro grado di fiducia*, useremo tale valore di propensione, *di cui ci riteniamo certi*.

Ma quando siamo incerti sul contenuto della scatola, come nella situazione iniziale del nostro giochino, noi affermiamo che Bianco e Nero sono equiprobabili semplicemente da una analisi di una simmetria di informazione, non avendo alcun motivo razionale per ritenere il Bianco più probabile del Nero. Un altro modo di ragionare è che stiamo mediando su tutti i possibili valori di propensione. (E si noti come nessuno ha problemi nel valutare le probabilità iniziali di Bianco e Nero in 50%, anche se non c’è nessuna scatola che abbia il 50% di palline bianche e altrettanto di nero!) Poi, quando cominciamo ad effettuare le estrazioni con reintroduzioni, siamo tutti d’accordo che le nuove informazioni devono cambiare, in qualche modo, sia la probabilità delle varie composizioni che la probabilità di Bianco e Nero alla prossima estrazione, anche se il contenuto della scatola è rimasto immutato, e anche se magari non riusciamo, facendo uso della sola intuizione, a capire come le probabilità debbano cambiare. Insomma, tali probabilità non sono nella scatola, bensì nella nostra mente. Questo è il significato della cosiddetta *probabilità soggettiva*, della quale abbiamo implicitamente fatto largo uso durante questa introduzione, anche se abbiamo atteso fino alla fine prima di nominarla esplicitamente, in quanto sappiamo per esperienza che tale concetto può essere facilmente frainteso. Assolutamente niente di arbitrario, ma semplicemente un *indice di credibilità* di qualsiasi cosa rispetto alla quale siamo in condizione di incertezza (vedi figura 1.9), indipendentemente dal fatto che si tratti della pallina bianca che andremo ad estrarre, o della composizione ignota della scatola che abbiamo sorteggiato; che una temperatura sia compresa fra 20 e 21 gradi centigradi; o che la somma delle masse iniziali dei buchi neri dell’evento del 14 settembre 2015 sia maggiore di 67 masse solari.

E nemmeno ha interesse che l’ipotesi in esame sia *verificabile*, come quando ci interessiamo al colore della pallina estratta o alla composizione della scatola, o *non verificabile*, come le masse dei buchi neri, o la maggior parte delle grandezze fisiche di interesse. Ad esempio, leggiamo su Wikipedia che allo stato attuale delle ricerche la massa del bosone di Higgs vale $(125.35 \pm 0.15) \text{ GeV}/c^2$, ovvero (133.59 ± 0.16) volte la massa del protone, il quale a sua volta ha una massa di $(1.67262171 \pm 0.00000029) \times 10^{-27} \text{ kg}$, ove le incertezze sono *interpretabili come* (la questione è un po’ sottile) intervalli al 68% di probabilità, come impareremo nel seguito. Ma non ha senso parlare dell’assoluta verificabilità di queste grandezze fisiche.⁸

C’è poi un altro aspetto interessante che si capisce bene con le sei scatole. È ovvio che una incertezza sulla composizione è equivalente a una incertezza sull’indice i che la contraddistingue e quindi sulla proporzione di palline bianche $i/5$, alla quale abbiamo associato il concetto di *probabilità fisica* (propensione), che scriveremo come $\pi_i = i/5$. In altri termini, π è semplicemente un parametro del nostro modello, come

⁸Si noti che anche nel giochino delle sei scatole noi possiamo valutare la probabilità delle varie composizioni, anche se chi organizza il gioco ci fa poi la cattiveria di rimischiare le scatole senza lasciarci la possibilità di controllare. Ma si capisce che, se ad esempio avevamo una probabilità di H_5 del 73%, tale resterà il nostro grado di fiducia che *quella scatola avesse* 5 palline bianche, indipendentemente dal fatto che non lo potremo mai verificare.

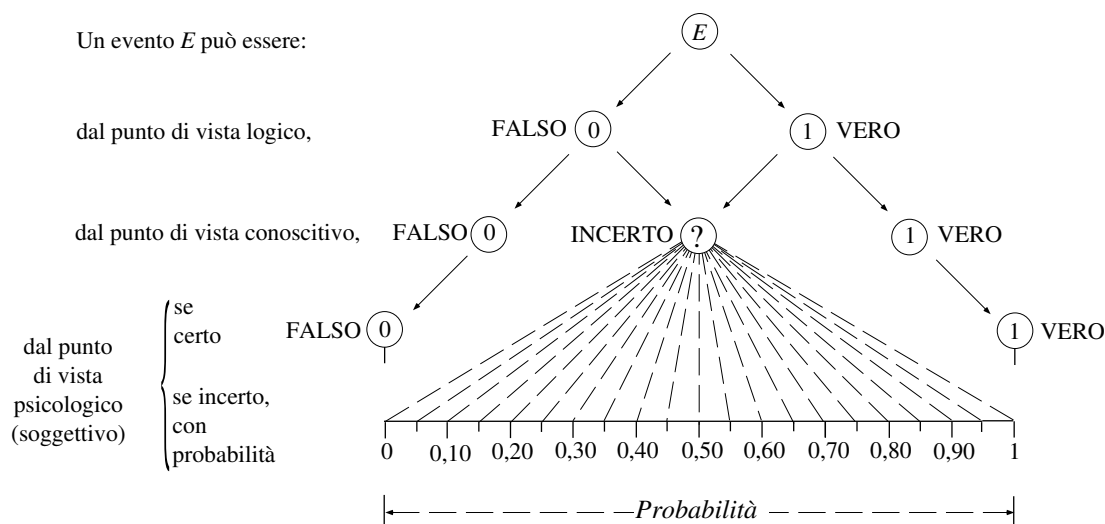


Figura 1.9: Diagramma di Bruno de Finetti: vero, falso e probabile. Il diagramma sintetizza molto bene lo schema logico che porta al concetto di probabilità: innanzitutto c'è da premettere che con il termine *evento* intenderemo qualsiasi affermazione - o proposizione - della quale sia verificabile il contenuto di verità, almeno in linea di principio. Se l'evento è ben definito esso può essere, da un *punto di vista logico*, vero o falso. L'affermazione può riferirsi indifferentemente al passato, al presente o al futuro, ad esempio: a) “pioveva a Roma il giorno della battaglia di Waterloo”; b) “nel prossimo lancio di un dado uscirà la faccia con il numero 5”; c) “avendo letto sulla mia bilancia 10.05 g, la massa dell'oggetto risulterà essere compresa fra 10.03 e 10.07 g qualora essa sia misurata con una bilancia di altissima precisione e perfettamente calibrata”. In tutti gli esempi riportati siamo, *dal punto di vista conoscitivo*, in condizioni di incertezza. A ciascuno di questi eventi possiamo attribuire un certo livello di probabilità a seconda delle conoscenze che si hanno sull'evento. Ad esempio, se invece di pioggia a Roma si fosse interessati a tale evento a Milano o a Palermo, la valutazione di probabilità sarebbe stata diversa. Lo stesso vale se si viene a sapere che la battaglia di Waterloo è avvenuta a luglio. Per queste ragioni viene introdotto il concetto di probabilità, come misura del grado di credibilità di un evento incerto.

lo sono una massa o una lunghezza. E così come, quando siamo incerti sui valori di masse e lunghezze, possiamo usare la teoria della probabilità per quantificare quali (intervalli di) valori ci sembrano più o meno credibili, possiamo usare tale teoria per quantificare la nostra credenza su ciascuno dei possibili valori questo parametro π .

Se poi immaginiamo di aumentare il numeri di scatole, da sei a mille, o a un milione, etc. il parametro π sarà a mano a mano *approssimabile* ad un numero reale nell'intervallo fra 0 e 1. Ne segue che, in analogia ai risultati di LIGO-Virgo mostrati precedentemente, possiamo dire che un certo π è nell'intervallo 0.750 ± 0.015 al 90% di probabilità. Importanti esempi grandezze fisiche di questo genere sono le *efficienze dei rivelatori* e i cosiddetti *branching ratio* delle particelle elementari instabili (come quando si dice che “il bosone di Higgs, secondo il Modello Standard delle particelle elementari, decade in $b\bar{b}$ con probabilità di circa il 58%”, ove $b\bar{b}$ sta per un quark b e la sua antiparticella).

Infine, per concludere, vogliamo far notare che anche la propensione di un sistema a comportarsi in un certo modo può in principio variare con il tempo. Quindi, come ha poco senso dire che il ‘valore vero’ di una grandezza fisica è quello che si ottiene mediante un numero ‘infinito’ di misure, così non c'è alcuna necessità di legare la probabilità fisica a un numero infinito di prove effettuate nelle stesse condizioni.