15.6

Torniamo ad energia potenziale e forze.
In generale $E_p(\vec{r})$. Componenti della forza: $F_x = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$, $F_y = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}y$, $F_z = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}z$ e $F_r = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}r$ (quando la forza ha una simmetria radiale la forza radiale è di maggior interesse delle componenti cartesiane della forza). Esempio gravitazionale (conti lasciati come esercizio)::

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{311}$$

$$F_r = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{GMm}{r^2} \tag{312}$$

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,x = -\frac{GMm}{r^3}\,x \tag{313}$$

$$F_y = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,y = -\frac{GMm}{r^3}\,y \tag{314}$$

$$F_z = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,z = -\frac{GMm}{r^3}\,z \tag{315}$$

Dalle (313)-(315) otteniamo

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\,\vec{r} \tag{316}$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} \tag{317}$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r} \tag{318}$$

in quanto, per definizione, il versore $\hat{r}$ è pari a vettore $\vec{r}$ diviso il suo modulo.
Ovviamente le (316) e (318) sono assolutamente equivalenti e il cubo al denominatore nella (316) non deve trarre in inganno.

15.7

Problemi

1. Scaldabagno da 80 litri, potenza 1000 W: quanto impiega a scaldare l'acqua da 20 ^{o}C a 60 ^{o}?

2. Per riscaldare un corpo da 10 a 20 gradi sono necessari 1000 J, calcolare la capacità termica del corpo sia in J/^{o}C che in cal/^{o}C [nota: data l'equivalenza fra Joule e calorie, capacità termiche e calori specifici possono essere espressi sia facendo riferimento ai Joule che alle calorie].

3. Il calore specifico dell'alluminio vale 0.21 cal/g ^{o}C. Calcolarne il valore in J/kg ^{o}C.

4. Si immege un blocco di alluminio, di massa 100 g ed inizialmente a 80 gradi in 200 g di acqua inizialmente a 20 gradi. Si calcoli la temperatura finale di equilibrio (si trascuri il contributo del recipiente allo scambio termico).

5. Risolvere il problema precedente assumendo che il recipiente dell'acqua abbia una capacità termica di 50 cal.

6. Si vuole condizionare un piccolo locale in cui ci sono dei computer e accessori che consumano in totale 2000 W. Calcolare la potenza del condizionatore in Btu

7. Cosa si modifica la soluzione del problema precedente se consideriamo che nel locale ci lavorano 5 persone?

8. Fare i conti dettagliati del primo esempio del par. 15.5 e risolvere i problemini che lo segue.

9. Calcolare la potenza in MW di una macchina da corsa da 900 HP.

10. Una caldaia ha una potenza termica di 20000 kcal/h. Calcolare quanto vale il flusso massimo di acqua (in litri/minuto) a 50 gradi che essa riesce a fornire se l'acqua che entra nella caldaia ha una temperatura di 15 gradi.

16 Lunedi 7/5, 16:00–18:00

16.1

Calore latente di fusione e di evaporazione. Durante una transizione di fase (acqua-ghiaccio, acqua-vapore) il sistema assorbe/cede calore senza cambiare la temperatura (esempio quotidiano acqua: che bolle in attesa che ci si decida a buttare giù la pasta). Valori per l'acqua: fusione $\lambda = 80\,\mathrm{cal/g}$; ebollizione: $\lambda = 540\,\mathrm{cal/g}$.

Esempio: 10 g di chiaccio a -10 ^{o}C in 50 g acqua a 20 ^{o}C: $\rightarrow$ temperatura di equilibrio (altra informazione necessaria: calore specifico del ghiaccio, circa 1/2 di quello dell'acqua). Il calore ceduto dai 50 g di acqua inizialmente a 20 ^{o}C serve a: innalzare la temperatura del ghiaccio da $T_g = -10\,^o$C a $0\,^o$C; far fondere il ghiaccio; innalzare la temperatura del'acqua ottenuta dalla fusione del ghiaccio da $0\,^o$C a T_e. In totale abbiamo quindi

$$c_A\, M(T_e - T_A) + c_g\, M_g\,(0 - T_g) + \lambda M_g + c_A\, M_g\,(T_e - 0) \;=\; 0\,, \qquad (319)$$

ovvero

$$c_A\, M(T_A - T_e) = c_g\, M_g\,(0 - T_g) + \lambda M_g + c_A\, M_g\,(T_e - 0)\,, \qquad (320)$$

con c_A e c_g calori specifici di acqua e ghiaccio. Si ottiene $T_e = 2.5\,^o$C. L'acqua a temperatura ambiente ha perso 885 cal, delle quali: 50 sono servite a scaldare il ghiaccio, 800 a farlo fondere e 25 per portarlo a 2.5 ^{o}C

16.2

Velocità di termalizzazione.
Le equazioni che abbiamo visto precedentemente, basate sul principio zero della termodinamica e sul fatto ci considerare corpi che costituiscono un sistema isolato ci forniscono la temperatura di equilibrio, ma non ci danno alcuna informazione su quanto ci mette il sistema a raggiungere l'equilibrio.

Termalizzazione verso una temperatura T_f di un corpo di capacità termica 'infinita' (es. T_f ambiente costante). Dato il coefficiente di 'dispersione termica'[9] η e lo sbalzo termico $(T_f - T)$ istantaneo fra la temperatura asintotica e quella del corpo che si stà termalizzando, il calore trasferito in dt vale

$$\mathrm{d}Q \;=\; \eta\,(T_f - T)\,\mathrm{d}t, \qquad (321)$$

ovvero

$$C\mathrm{d}T \;=\; \eta\,(T_f - T)\,\mathrm{d}t, \qquad (322)$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\eta}{c\,M}\,(T_f - T)\,. \qquad (323)$$

[9] Chiamiamo così la costante η che compare nella (321) e seguenti. Essa è legata a superficie di contatto A, spessore dello strato isolante Δx e *conducibilità termica* del materiale λ secondo la seguente formula:

$$\eta = \lambda \frac{A}{\Delta x}\,.$$

Le dimensioni di η sono quindi cal/(grado $\cdot$ secondo), ovvero anche Watt/grado. Le dimensioni della conducibilità termica sono invece cal/(grado $\cdot$ metro $\cdot$ secondo)

$\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ ha, chiaramente il significato di 'velocità di termalizzazione'. Si nota che essa è proporzionale, istante per istante dalla differenza di temperatura rispetto a quella finale, è anche proporzionale a $\eta/C = \eta/cM$, una costante che ha le dimensioni dell'inverso di un tempo (semplice controllo dimensionale).

16.2.1 Potenza dei termosifoni

Se siamo interessati alla potenza dissipata da un corpo che tende a termalizzarsi, basta riscrivere la (321) come

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \eta\,(T_f - T) \tag{324}$$

$$P = \eta_w\,(T_f - T), \tag{325}$$

ove η_w è l'analoga di η, ma espressa in Watt/grado. Per avere un ordine di grandezza delle potenze in gioco, cerchiamo su un sito di costruttore di termosifone le specifiche tecniche. Ad esempio, su `http://www.faral.com/italiano/id2.htm` leggiamo che gli elementi da 88 cm dissipano 163 Watt/elemento per $\Delta T = 50\,^o$C, ovvero $\eta_w = 3.3\,\mathrm{W}/^o\mathrm{C}$. Vi vede inoltre che con buona approssimazione, a parità si tipo di elemento, η_W scala circa con l'altezza degli elementi (si confronti con la formula che lega η alla conducibilità termica e alla geometria degli elementi e si cerchi di farsi un'idea del perché).

16.2.2 Soluzione della (323) — primo approccio

La (323) ci dice che la velocità di termalizzazione è proporzionale alla 'distanza' dalla temperatura di equilibrio. Quindi è massima all'inizio e tende a zero asintoticamente (ovvio: quando il corpo si e' termalizzato la sua temperatura cessa di variare).

Se introduciamo $\theta = T - T_f$, possiamo riscrivere la (323) come

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\eta}{c\,M}\,\theta = -\alpha\theta\,, \tag{326}$$

avendo chiamato α il fattore di proporzionalità $\eta/c\,M$ (si ragioni sul significato del segno meno, voluto — altrimenti poteva definire θ con il segno opposto!). Quanto vale $\theta(t)$? Ovvero qual'è la funzione tale che la sua derivata, istante per istante, è proporzionale a valore della funzione in quell'istante? Una volta trovato $\theta(t)$, otteniamo, banalmente, $T(t) = \theta(t) + T_f$. Ci ritorneremo.