<u>**Laboratorio di Meccanica, A.A. 2014-2015. Prova in Itinere 29/05/2015**</u>

(1) Abbiamo a disposizione sei dadi: 5 regolari, per i quali tutte le facce sono equiprobabili, e l'altro truccato, con impresso il numero 1 su tutte le facce.

Estraiamo a caso uno dei sei dadi, lo lanciamo e otteniamo 1.
Quale e' la probabilita' che si tratti del dado truccato?

(2) Il numero medio di automobili che passa sulla tangenziale di Roma dalle 3 alle 4 di notte e' pari a una al minuto per senso di marcia.
Per consentire i lavori di rifacimento del manto stradale, i vigili urbani chiudono uno dei sensi di marcia per un minuto ogni 10 tra le 3 e le 4 di notte (dunque sei volte in tutto).

a) Calcolare la probabilita' che una o piu' macchine debbano fermarsi a causa dei lavori per uno qualunque degli stop di un minuto.
b) Calcolare la probabilita' che nessuna macchina si fermi a causa dei lavori.

Nota: assumere che il fenomeno sia poissoniano.

(3) Uno sperimentatore ha a disposizione un termometro digitale e vuole determinarne le caratteristiche. Nota che l'ultimo digit che riporta lo strumento corrisponde a 0.001 ^{0}C. Esegue poi 1000 misure di temperatura in una stanza a temperatura controllata, dove cioe' la temperatura e' constante e vale T = (24.000 +/- 0.001) ^{0}C. Da queste misure ottiene una media di 24.002 ^{0}C e una deviazione standard campionaria di 0.100 ^{0}C.
Cosa puo' dire circa gli errori di sensibilita', di precisione e di accuratezza dello strumento?

(4) Per studiare l'inquinamento in un lago un team di ricercatori misura la concentrazione di cromo esavalente nelle acque ottenendo le seguenti 4 misure:

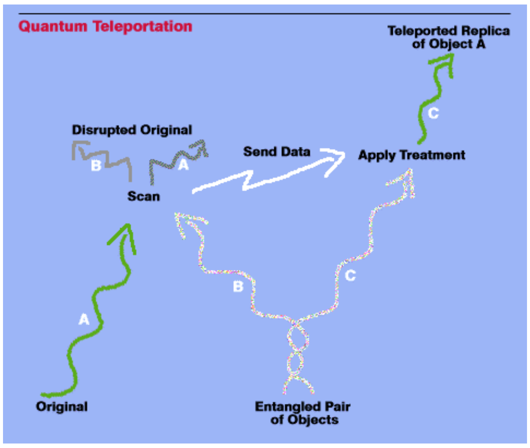
0.046 mg/l
0.043 mg/l
0.050 mg/l
0.041 mg/l

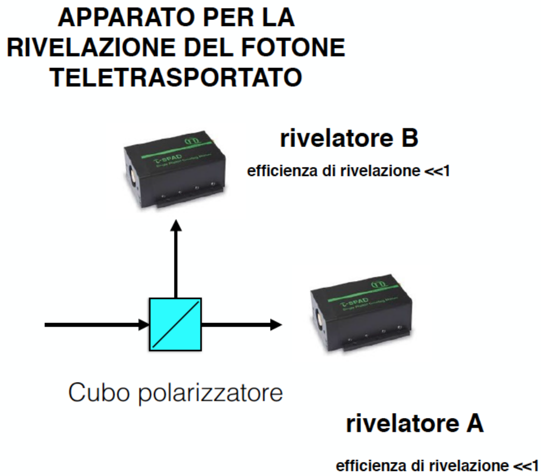
Nel 1958 l'Organizzazione Mondiale della Sanità consigliò una concentrazione massima ammissibile per il cromo esavalente di 0.05 mg/l nell'acqua potabile, sulla base di misure di salvaguardia per la salute.

Le autorità competenti affermano che queste misure dimostrano che il lago è inquinato con un livello di accettabilità pari al 99.5%.

Concordi con questa affermazione?

(5, facoltativo) Da Wikipedia, l'enciclopedia libera: *"Il teletrasporto quantistico è una tecnica nell'ambito dell'informatica quantistica che permette, sotto certe restrizioni, di trasferire uno stato quantistico in un punto arbitrariamente lontano."*





Un esperimento di ottica quantistica ha come scopo la verifica del teletrasporto quantistico dello stato di un singolo fotone. Va quindi misurata la "fedeltà" (fidelity) dello stato teletrasportato rispetto allo stato iniziale, definita come la probabilità di ottenere lo stato corretto alla fine del protocollo di teletrasporto.

A tale scopo si adopera il seguente apparato: ogni singolo fotone teletrasportato viene analizzato con un cubo polarizzatore. Il fotone, quando passa per il cubo polarizzatore, finisce sul rivelatore A o sul rivelatore B ma non viene quasi mai rivelato perché l'efficienza dei due rivelatori è molto piccola. Quando il fotone viene registrato dal rivelatore A il suo stato è corretto, quando viene registrato dal rivelatore B il suo stato non è corretto.

Si ripete il teletrasporto un numero molto grande di volte essendo l'efficienza complessiva dei rivelatori adoperati molta bassa (ma uguale fra di loro). Alla fine dell'esperimento sono stati misurati 1327 fotoni dal rivelatore A e 271 dal rivelatore B.

a) Quanto vale la "fidelity" raggiunta sperimentalmente?

Per stabilire che il teletrasporto è avvenuto quantisticamente il valore della fidelity deve essere maggiore di 2/3.

b) E' stato raggiunto l'obiettivo di dimostrare la natura quantistica nell'esperimento sopra descritto?

Soluzioni:

(1)
le probabilita' a priori sono:
p(dado regolare) = 5/6
p(dado truccato) = 1/6

le likelihood sono:
p(1/dado regolare) = 1/6
p(1/dado truccato) = 1

quindi

p(dado truccato/1) = p(1/dado truccato) * p(dado truccato) / (p(1/dado truccato) * p(dado truccato) + p(1/dado regolare) * p(dado regolare)) = 1/6 / (1/6 + 5/6 *1/6) = 0.55

(2)
La rate corrisponde a 1/min quindi il tempo medio e' di 1 min.

Nell'istante in cui il vigile ferma il traffico la densita' di probabilita' del tempo di attesa prima che passi un'automobile e' un esponenziale del tipo f(t) = 1/tau * exp(-t/tau)

a) Per calcolare la probabilita' che almeno una automobile debba fermarsi integriamo la densita' di probabilita' tra 0 e un minuto (=tau). dunque F(1min) = 1-exp(-1) = 63.2%. In alternativa, possiamo calcolare la probabilita' nel regime dei conteggi che risulta essere P(x>0) = 1 – P(0) = 1 – exp(-1) = 63.2%

b) in un'ora i vigili fermeranno il traffico 6 volte. Si tratta dunque di sei tentativi e per ciascuno di essi nessuna macchina si deve fermare cioe' non deve capitare l'evento la cui probabilita' e' stata calcolata nel punto a). Usiamo la probabilita' binomiale in cui n=0, N=6 e p=F(1min). Da cui
p(0/N,p) = (1-p)^6 = 0.368^6 = 0.25%

(3)
La sensibilita' dello strumento e' pari a 0.001 ^{0}C.
Grazie all'elevato numero di misure la devizione standard campionaria approssima bene la deviazione standard della misura. L'errore di precisione dunque corrisponde a 0.100 ^{0}C.
Il risultato della misura e' pari a 24.002 +/- 0.100 / sqrt(1000) gradi = 24.002 +/- 0.003 ^{0}C. Essa e' compatibile con la temperatura della stanza entro una sigma. Quindi non vi e' evidenza di errore di accuratezza.

(4)
La media aritmetica delle quattro misure e' pari a 45.0 mg/l. La deviazione standard campionaria e' pari a 3.9 mg/l.

Per fare il test di ipotesi usiamo la seguente variabile:

zeta = (C_{meas} - C_{OMS})/s/sqrt(N) = 2.56

che e' una t-student con 3 gradi di liberta'. Facciamo un test a una coda. Le tabelle sono pero' per un test a due code, il valore cercato corrisponde ad un alpha = 99%. L'intervallo e' quindi pari a

zeta < 5.84

Il valore ottenuto cade dentro l'intervallo e quindi non si puo' affermare che il lago e' inquinato.

(5)
a) I conteggi misurati dai due rivelatori sono marginalmente correlate poiche' l'efficienza di essi e' molto piccola. Dunque possiamo descriverli con due variabili poissoniane nel limite gaussiano.

Quindi la fidelity vale f = 1327/(1327+271) = 83.0%

L'errore si puo' calcolare con la propagazione dell'errore perche' le due variabili sono praticamente scorrelate.

$$\delta F = \sqrt{\left(\frac{\delta F}{\delta n_A}\right)^2 \delta \mathrm{n_A}^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta n_B}\right)^2 \delta \mathrm{n_B}^2} = \sqrt{\left(\frac{n_B}{(n_A+n_B)^2}\right)^2 n_A + \left(\frac{n_A}{(n_A+n_B)^2}\right)^2 n_B} = \sqrt{\frac{n_A n_B}{(n_B+n_B)^3}} = 0.009$$

f = (83.0 +/- 0.9)%

b) Facciamo un test a una coda assumendo la distribuzione di f gaussiana. Quindi

zeta = (0.83 – 0.667) / 0.009 > 5

Dunque i indicano che c'e' stato teletrasporto e la natura quantistica dell'esperimento e' dimostrata.