

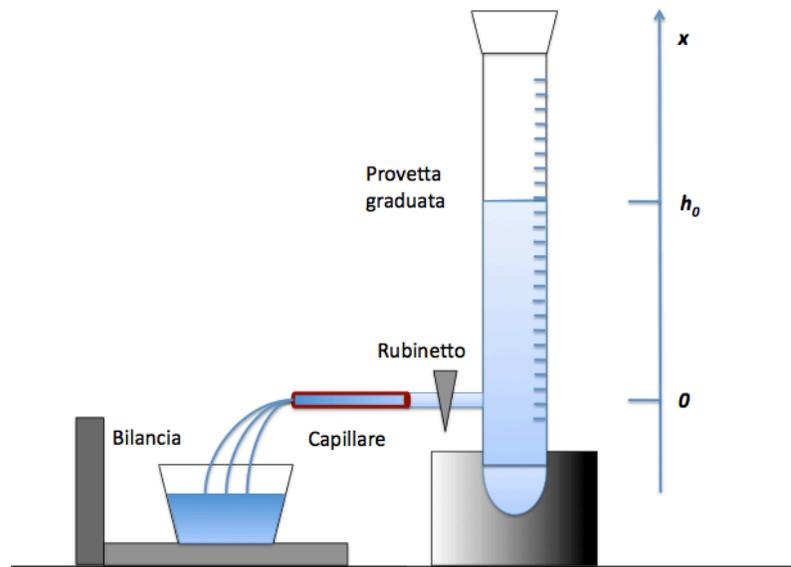
## Esercitazione di Meccanica 6

### Studio dello svuotamento di un tubo attraverso un capillare e misura del coefficiente di viscosità dell'acqua

#### Scopo dell'esperienza:

- Studio delle leggi orarie che descrivono lo svuotamento di un tubo verticale, riempito d'acqua, collegato ad un capillare
- Misura del coefficiente di viscosità dell'acqua

#### Equazioni orarie che descrivono il processo:



Il sistema studiato è quello in figura. Le leggi che descrivono lo svuotamento della provetta graduata si ricavano dall'equazione di Bernoulli e dalla legge di Hagen-Poiseuille. Si ottiene la seguente equazione (vedi dispense)

$$h = -\frac{8\eta\Delta l S_1}{\rho g R^2 S_2} \frac{dh}{dt} + \frac{1}{2g} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \left(\frac{dh}{dt}\right)^2$$

Dove  $h$  rappresenta la quota del pelo del liquido contenuto nella provetta,  $S_1$  e  $S_2$  le sezioni, rispettivamente, del tubo e del capillare.  $\Delta l$  e  $R$  sono la lunghezza e il raggio della sezione circolare del capillare e  $\rho$  la densità del liquido.

La quota  $h$  e la massa  $m$  che fluisce nel capillare sono legate da

$$h(t) = (m_{inf} - m(t))/S\rho$$

dove  $m_{inf}$  e' la massa totale che e' uscita dal capillare (e che riempiva inizialmente la provetta).

A seconda che ci troviamo in regime puramente laminare o turbolento, l'equazione ha soluzioni che hanno forma diversa. In regime laminare il numero di Reynolds deve essere minore di 1000. Il numero di Reynold e'

$$R_e = \frac{\rho v_2 R}{\eta}$$

La velocita' con cui il liquido fluisce attraverso il capillare e' collegata alla variazione di massa di liquido che esce da esso da

$$\frac{dm}{dt} = v_2 S_2 \rho = v_2 \pi R^2 \rho$$

da cui

$$R_e = \frac{1}{\pi \eta R} \frac{dm}{dt}$$

Il rapporto tra i due termini che compaiono nell'equazione da'

$$\frac{v_2^2 \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}{\frac{8\eta\Delta l v_1 S_1}{\rho g R^2 S_2}} = \frac{\rho R^2 v_1 S_1}{16\eta\Delta l S_2} = \frac{\rho R^2 v_2}{16\eta\Delta l} = \frac{1}{16\pi\eta\Delta l} \frac{dm}{dt}$$

dove abbiamo anche usato la conservazione della portata ( $v_1 S_1 = v_2 S_2$ ).

Affinche' si possa trascurare il termine proporzionale al quadrato della velocita' deve dunque valere

$$\frac{1}{16\pi\eta\Delta l} \frac{dm}{dt} \ll 1$$

Sperimentalmente si vede che questa condizione e' soddisfatta per

$$\frac{1}{16\pi\eta\Delta l} \frac{dm}{dt} < 5\%$$

In questa situazione l'equazione differenziale si riduce a

$$h = - \frac{8\eta\Delta l S_1}{\rho g R^2 S_2} \frac{dh}{dt}$$

che ha come soluzione un esponenziale di costante di decadimento

$$\tau = \frac{8\eta\Delta l R_p^2}{\rho g R^4}$$

dove  $R_p$  e' il raggio della provetta. Poiche'  $h(t)$  e' descritto da un esponenziale, anche la sua derivata ( $-v_l$ ) e' descritta da un esponenziale con la stessa costante di tempo. Di conseguenza anche la derivata rispetto al tempo della massa che fluisce attraverso il capillare (vedi sopra) e' descritta dallo stesso esponenziale

$$\frac{dm}{dt} \propto e^{-t/\tau}$$

Nel caso di moto turbolento (non lo dimostriamo)  $h(t)$  segue la seguente equazione

$$\sqrt{h(t)} = C - kt/2$$

Dunque anche la quantita'  $\sqrt{m_{inf} - m(t)}$  ha un andamento lineare in funzione del tempo.

### Apparato sperimentale:

- Provetta, di cui non e' nota la sezione
- Set di capillari di dimensioni diverse. Il diametro non puo' essere misurato e devono essere assunti i valori della tabella a destra (l'incertezza sul diametro e' di 0.010 cm)
- Calibro ventesimale
- Metro
- Bilancia collegata al computer i cui valori misurati vengono acquisiti ed analizzati con *Datastudio*
- Acqua distillata

colore	diametro d [cm]	lunghezza l [cm]
bianco	0.100	20
bianco	0.100	10
bianco	0.100	8.5
marrone	0.140	8.0
bian e marr	0.180	7.5
rosso	0.215	9.9
grigio	0.300	9.5

### Operazioni:

1. **Configurazione dell'acquisizione.** Configurare il programma di acquisizione aggiungendo la bilancia come sensore. Non e' possibile variare il campionamento.
2. **Misura della densita' del liquido a disposizione** utilizzando la bilancia.
3. **Misura della lunghezza dei capillari a disposizione.**
4. **Misura della sezione della provetta.** Procedere in due modi. 1) Per via diretta, misurando il diametro esterno della provetta e lo spessore del vetro con il calibro. 2) Per via indiretta. Riempire una prima volta la provetta e svuotarla completamente (in modo da riempire d'acqua la parte della provetta al di sotto della quota del capillare). Riempire con una certa massa d'acqua la provetta, misurare l'altezza della colonna, rispetto alla quota del capillare e derivare il raggio dalla massa, dall'altezza e dalla densita'. Scegliere la misura con l'incertezza minore.
5. **Misura della massa che fluisce attraverso il capillare in funzione del tempo.** Per ciascun capillare riempire la provetta d'acqua e misurare la massa che finisce nel contenitore sopra alla bilancia. Effettuare piu' acquisizioni nel caso in cui la misura non sia stata sufficientemente stabile (perdita d'acqua, ecc...). Prima di ogni acquisizione, misurare con la bilancia la massa che verra' immessa nella provetta ( $m_{inf}$ )
6. **Grafici.** Per ciascun capillare fare un grafico delle seguenti quantita':

- a.  $m(t)$  vs  $t$  (lineare)
- b.  $(m_{inf}-m(t))/m_{inf}$  vs  $t$  (log)
- c.  $R_e = \frac{1}{\pi\eta R} \frac{dm}{dt}$  vs  $t$  (log)
- d.  $\frac{1}{16\pi\eta\Delta l} \frac{dm}{dt}$  vs  $t$  (log)

Nel calcolare queste quantità, assumere  $\eta=10^{-3}Ns/m^2$ . Per il calcolo della derivata operare in modo numerico, cioè calcolare  $(m(t+\Delta t)-m(t))/\Delta t$ . Per rendere più stabile la misura, usare  $\Delta t > 1$  s. Nello specifico usare  $\Delta t = 10$  s per svuotamenti lenti (ad esempio per capillare bianco) e  $\Delta t = 3$  s per svuotamenti più rapidi (ad esempio per il capillare grigio).

7. **Misura della costante di tempo.** Per ciascun capillare, identificare gli intervalli temporali per cui  $R_e$  sia sufficientemente minore di 1000 (per esempio 500) e valga  $\frac{1}{16\pi\eta\Delta l} \frac{dm}{dt} < 5\%$ . In tale intervallo temporale (se esiste) fare un fit con una retta di  $dm/dt$  in coordinate logaritmiche, ed estrarre la costante di tempo con l'errore. Discutere i fit. Si sceglie di studiare  $dm/dt$  invece di  $(m_{inf} - m(t))$ , perché il primo non dipende dalla determinazione di  $m_{inf}$ .
8. **Misura del coefficiente di viscosità.** Dalla misura della costante di tempo estrarre il coefficiente di viscosità del liquido.
9. **Studio dello svuotamento nel caso di moto turbolento.** Prendere i dati di un capillare per cui  $R_e$  è quasi sempre maggiore di 1000, fare il grafico di  $\sqrt{m_{inf} - m(t)}$  vs  $t$  e verificare che l'andamento sia lineare

**NOTA:** Bisogna buttare via i dati degli ultimi 5 grammi prima che la colonna si svuoti completamente. Infatti cambia la sezione della provetta perché alla fine c'è il tubo a T che si raccorda al capillare. Quindi la sezione aumenta e cambia il tau.