

## (5) Legge di svuotamento di un condotto attraverso capillari.

L'ultimo sistema che consideriamo è illustrato nella figura 5.1. Una provetta di sezione  $S$  disposta verticalmente, contiene un liquido che inizialmente la occupa fino ad una quota  $x=h_0$ ,  $x$  essendo la coordinata verticale orientata verso l'alto. Alla quota  $x=0$  è posto un orifizio al quale possono essere collegati tubicini capillari di diverse sezioni e lunghezze. Tra l'orifizio e il capillare è posto un rubinetto che assumiamo inizialmente chiuso. All'istante di tempo  $t=0$  il rubinetto viene aperto ed il liquido inizia a fluire attraverso il capillare. All'uscita dal capillare il liquido cade in un recipiente posto sopra una bilancia che dunque misura la funzione  $m(t)$ , massa di liquido in funzione del tempo. Ci poniamo dunque il problema di prevedere la forma e le caratteristiche della funzione  $m(t)$ , sulla base della dinamica dei fluidi. Per arrivare a  $m(t)$  procederemo nel modo seguente: dopo una breve introduzione su alcune caratteristiche generali dei liquidi, deriveremo le proprietà della dinamica dei cosiddetti **liquidi ideali**; quindi passeremo a considerare il fenomeno della **viscosità** e deriveremo le proprietà del moto dei **liquidi reali** nei due diversi regimi, quello **laminare** e quello **turbolento** o vorticoso; alla fine, riprendendo le caratteristiche ottenute, procederemo a derivare la funzione  $m(t)$  per i casi detti che sarà possibile confrontare con i valori ottenuti sperimentalmente.

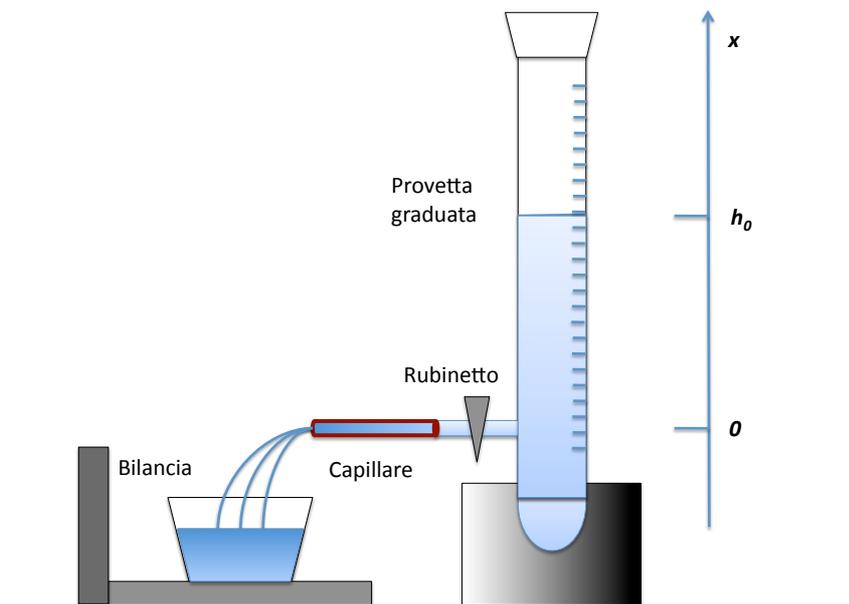


Fig.5.1 Schema dell'apparato per la misura della legge di svuotamento dei capillari.

### 5.1 Generalità sui liquidi: i liquidi ideali.

Le caratteristiche fondamentali che individuano i liquidi, e li differenziano dai gas sono le seguenti: alto grado di mobilità e scorrevolezza tra le parti che lo compongono, sostanziale incompressibilità. I liquidi tendono ad assumere la forma del recipiente nel quale sono contenuti, ma, a differenza dei gas, hanno volume proprio in quanto sono scarsamente comprimibili.

La trattazione sia della statica che della dinamica dei liquidi è basata sulla nozione di volume elementare di liquido  $dV$ : detta  $\rho$  la densità del liquido, il volume elementare ha massa  $dm = \rho dV$ . Su tale volume elementare che immaginiamo per semplicità di forma cubica, agiscono due tipi di forze: le **forze di volume** e le **forze di superficie**.

Consideriamo dapprima le forze di volume. Una generica forza di volume  $dF$  che agisce sull'elemento di volume sarà del tipo:

$$\vec{dF} = \vec{\gamma} dV \quad (5.1)$$

in cui il vettore  $\gamma$  è diverso a seconda del tipo di forza. La caratteristica della forza di volume è dunque quella di essere proporzionale al volume e di non dipendere dal contatto con i volumi vicini. E' dunque essenzialmente dovuta ad una causa esterna al liquido stesso cioè alle condizioni in cui il volume si trova. Due esempi di forze di volume, ambedue proporzionali alla massa, sono la forza peso e la forza centrifuga. Il vettore  $\gamma$  è pari a  $\rho g$  nel caso della forza peso o a  $\rho \omega r$  nel caso della forza centrifuga.

Le forze di superficie sono invece legate al contatto tra un elemento di volume e i suoi vicini. Con riferimento alla superficie di separazione tra due elementi, si potranno sviluppare forze aventi direzione normale alla superficie, o parallela. Nel primo caso si parla di **forze di pressione**, nel secondo, di **sforzi di taglio**. Definiamo la pressione  $p$  e lo sforzo di taglio  $T$  nel modo seguente: dette rispettivamente  $F_n$  e  $F_t$  le componenti normale e tangenziali delle forze di contatto tra due elementi di volume, si ha

$$\begin{aligned} p &= \frac{dF_n}{dS} \\ T &= \frac{dF_t}{dS} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ambedue le grandezze qui definite hanno le dimensioni di una forza per unità di superficie.

Nel caso di un liquido in quiete, si hanno solo forze di pressione. Infatti gli sforzi di taglio intervengono solo quando si hanno dei moti di scorrimento di elementi di liquido rispetto ad altri. D'altro canto le forze di pressione risultano indipendenti dalla direzione della normale all'elemento di liquido considerato e quindi, in virtù di tale proprietà è possibile definire una pressione scalare  $p$ , funzione delle coordinate all'interno del liquido stesso.

Nel caso invece di un liquido in moto, dovranno essere considerati anche gli sforzi di taglio. Chiameremo liquidi ideali quei liquidi che, in moto, presentano sforzi di taglio nulli o trascurabili. Si tratta ovviamente di una schematizzazione di chiaro significato fisico: l'assenza di sforzi di taglio tra elementi di volume contigui, comporta l'assenza di forze di attrito nello scorrimento di strati di liquido contigui. La situazione dei liquidi ideali è dunque in tutto simile a quella del moto di un corpo solido su un supporto liscio privo di attrito: in quel caso l'unica forza tra corpo e supporto è la reazione vincolare normale alla superficie, analogamente in questo caso si hanno solo le forze di pressione normali alla superficie di separazione tra elementi di liquido.

Sulla base delle considerazioni fatte formuliamo dunque le caratteristiche che assumeremo per i liquidi ideali:

→ totale incomprimibilità (la densità è dunque costante in tutto il volume del liquido);

→ assenza di attriti interni ( $T=0$  nel corso del moto del liquido).

La seconda caratteristica è quella cruciale che determina la differenza nel moto in un condotto tra liquidi ideali e reali.

## 5.2 Moto di un liquido ideale in un condotto.

Consideriamo dunque un condotto e un liquido ideale che fluisce in tale condotto. Nella trattazione di tale moto immaginiamo che ogni posizione all'interno del liquido, specificata dalle coordinate  $x$ ,  $y$  e  $z$ , sia caratterizzato da una certa velocità  $\mathbf{v}(x,y,z,t)$ , funzione della posizione e del tempo. In ogni istante di tempo dunque, per ogni posizione vi è un valore univoco di velocità. Tale funzione caratterizza completamente il moto del liquido. In ciascuna posizione transiteranno diversi elementi di volume. Se  $\mathbf{v}$  non dipende esplicitamente dal tempo  $t$ , in ciascuna posizione si avrà sempre la stessa velocità. In tal caso diremo che il moto è **stazionario**.

Vediamo ora alcune proprietà di un tale moto, definendo alcune importanti nozioni.

In primo luogo, il fatto che ad ogni istante di tempo  $t$ , ciascun punto sia caratterizzato ad uno ed un solo vettore velocità, permette di descrivere graficamente il moto del liquido introducendo le nozioni di **linea di flusso** e **tubo di flusso**. Intenderemo con linea di flusso una qualsiasi linea che ha la proprietà che in qualunque punto è tangente al vettore velocità in quel punto. Ad un dato istante di tempo, le linee di flusso non si intersecano. Infatti, se due linee di flusso si intersecassero in un punto, ciò implicherebbe l'esistenza di due vettori di velocità differenti nello stesso punto. Quindi dobbiamo immaginare le linee di flusso come "parallele". A questo punto possiamo prendere un certo numero di tali linee per costruire un tubo di flusso, che delimita dunque una porzione di liquido. Nessun elemento del liquido può passare attraverso il tubo di flusso. La situazione è illustrata nella Fig.5.2.

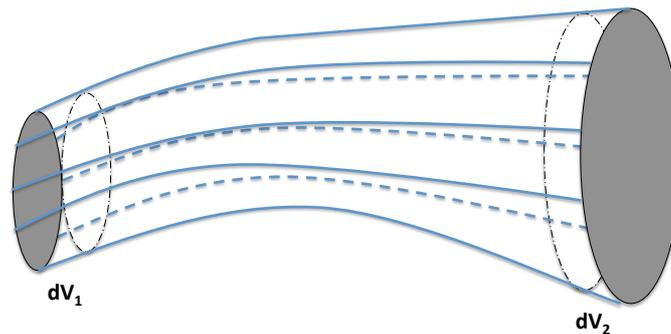


Fig.5.2 Rappresentazione schematica di un tubo di flusso. Sono indicati i volumetti infinitesimi  $dV_1$  e  $dV_2$  di ugual massa collocati alle due estremità del tubo. Per ciascuna estremità sono rappresentate le superfici relative ai tempi  $t$  e  $t+dt$ .

Consideriamo ora il moto di un liquido all'interno di un tubo di flusso. Per esempio possiamo immaginare che tale tubo coincida con le pareti del condotto, ma ciò non è necessario. Consideriamo i due istanti di tempo,  $t$  e  $t+dt$ . Nell'intervallo di tempo  $dt$  che stiamo considerando, il liquido si sarà spostato come in figura. Tutto va come se il volume infinitesimo  $dV_1$  si fosse spostato ad

occupare il volume infinitesimo  $dV_2$ . Le masse  $dm_1$  e  $dm_2$  corrispondenti ai due volumi devono essere uguali se assumiamo che nel condotto non ci sono sorgenti né pozzi, in altre parole se, come abbiamo prima detto, nessun elemento di liquido può transitare attraverso le pareti del tubo di flusso. Dette  $S_1$  ( $S_2$ ) e  $v_1$  ( $v_2$ ) le superfici e le velocità corrispondenti alle posizioni dei due volumi elementari  $dV_1$  e  $dV_2$ , e detta  $\rho$  la densità del liquido, che è costante nell'ipotesi di liquidi ideali, si avrà:

$$\rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt \quad (5.3)$$

che, definendo la **portata volumetrica**

$$Q_V = Sv \quad (5.4)$$

implica la conservazione della portata volumetrica lungo il moto del liquido ideale in un condotto. E' possibile definire in modo analogo la **portata di massa**

$$Q_M = \rho Sv \quad (5.5)$$

che è la quantità che si conserva nel caso in cui la densità non è costante. Si noti che in questo caso abbiamo ipotizzato che la velocità di tutti gli elementi di liquido in una delle sezioni considerate, siano uguali in modulo e parallele. Qualora ciò non fosse realizzato, è possibile comunque definire una portata volumetrica (o di massa), integrando sulla superficie la velocità espressa in funzione della coordinata sulla superficie.

$$Q_V = \int_S v(x,y,z) dS' \quad (5.6)$$

La conservazione della portata implica che in corrispondenza di qualunque restringimento di un condotto (diminuzione della sezione  $S$ ), si ha un aumento di velocità. Utilizzeremo nel seguito questo risultato di estrema generalità in diverse circostanze.

Nel caso in cui il condotto non sia orizzontale, osserviamo che entra in gioco anche la forza peso. Deriviamo dunque una legge generale valida per i liquidi ideali, che permette di individuare una quantità che si conserva nel corso del moto di un liquido ideale in un condotto qualsiasi. Tale legge va sotto il nome di **Teorema di Bernoulli**.

Sempre con riferimento alla figura 5.2 e detta  $z$  la coordinata verticale, consideriamo di nuovo un tubo di flusso e la situazione a due istanti successivi separati da  $dt$ . Come nella discussione precedente osserviamo che tutto va come se il liquido contenuto nel volume  $dV_1$  si trasferisse nel volume  $dV_2$ . Applichiamo a questo processo il teorema dell'energia cinetica. Uguagliamo cioè la variazione dell'energia cinetica nel passaggio dallo stato 1 allo stato 2, al lavoro fatto da tutte le forze che agiscono sul liquido, sia di volume che di superficie.

Unica forza di volume in gioco è la forza peso. Il lavoro fatto dalla forza peso è pari alla variazione dell'energia potenziale cambiata di segno:

$$L_g = -\Delta E_p = (z_1 - z_2) g dm \quad (5.7)$$

Ci si può convincere facilmente che tra le forze di superficie, le uniche che fanno lavoro sul liquido, sono le forze di pressione ai due estremi del tubo di flusso. Infatti, trattandosi di un liquido ideale non si hanno sforzi di taglio, e d'altra parte, le forze di pressioni con le pareti del condotto, pur essendo diverse da 0 non compiono lavoro dato che sono ortogonali alla velocità del liquido stesso. Dette  $p_1$  e  $p_2$  le pressioni del liquido ai volumi  $dV_1$  e  $dV_2$ , il lavoro fatto dalle forze di pressione è dato da:

$$L_p = (p_1 - p_2)dV = (p_1 - p_2) \frac{dm}{\rho} \quad (5.8)$$

La variazione di energia cinetica è data da:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}v_2^2 dm - \frac{1}{2}v_1^2 dm \quad (5.9)$$

per cui, uguagliando la variazione di energia cinetica alla somma dei lavori fatti sul sistema, ed eliminando  $dm$ , otteniamo:

$$\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 = (z_1 - z_2)g + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \quad (5.10)$$

da cui, separando i termini con suffisso 1 da quelli con suffisso 2 l'equazione:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{g\rho} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{g\rho} + z_2 \quad (5.11)$$

che, dovendo valere qualunque siano le posizioni 1 e 2 lungo il condotto, ha il significato di una legge di conservazione. La quantità che si conserva è la somma di tre termini, tutti aventi le dimensioni di una lunghezza. Il primo termine costituisce la cosiddetta **altezza di arresto**, che deve il suo nome alla circostanza di essere pari all'altezza raggiunta da un grave lanciato in alto con velocità  $v$ ; il secondo termine è detto **altezza piezometrica**, il terzo è invece l'altezza propriamente detta, lungo la verticale.

Dunque, ricapitolando, per un liquido ideale, nel moto lungo un condotto di forma qualsiasi, la somma delle tre altezze dette si conserva.

Consideriamo ora due casi particolari, conseguenza del teorema di Bernoulli. Il primo caso è quello illustrato dalla **Fig.5.1** se pensiamo di togliere il capillare e lasciare dunque il liquido fluire direttamente dall'orifizio praticato alla quota  $z=0$ . Prendiamo come posizioni 1 e 2 rispettivamente il pelo del liquido, e l'orifizio. Nelle due posizioni si ha la stessa pressione, pari alla pressione atmosferica. Dunque  $p_1=p_2$ . La (5.11) ci fornisce quindi:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = z_1 \quad (5.12)$$

da cui, ricordando che la portata volumetrica deve conservarsi e che dunque

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (5.13)$$

si ricava la velocità con cui il pelo del liquido scende:

$$\frac{v_1^2}{2g} \left[ \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] = z_1 \quad (5.14)$$

da cui l'equazione differenziale (nell'approssimazione  $S_1 \gg S_2$ )

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} \sqrt{h} \quad (5.15)$$

Nel seguito vedremo che si tratta formalmente della stessa equazione che ci aspettiamo nel caso di svuotamento in regime di moto turbolento, e vedremo la soluzione di tale equazione.

Come seconda conseguenza della (2) consideriamo il caso in cui il condotto sia orizzontale. In tal caso a conservarsi è la quantità:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} \quad (5.16)$$

e quindi nel caso di sezione costante, il liquido fluisce mantenendo la stessa velocità e la stessa pressione. Si noti come questa conclusione sia completamente contraria all'esperienza. Infatti, l'esperienza con i liquidi reali ci dice che il flusso di un liquido in un condotto orizzontale comporta una caduta di pressione, per cui, per mantenere il liquido in movimento occorre fornire dall'esterno la pressione mancante. Vedremo nel seguito come questo risultato emerge in modo del tutto naturale quando si introduce il fenomeno della viscosità.

Anche in questo caso vi è una stretta analogia con il moto di un corpo solido su un piano orizzontale. In quel caso, in assenza di attrito, non occorre compiere lavoro per mantenere il corpo in moto rettilineo ed uniforme. Lo stesso accade per il moto di un liquido ideale in un condotto orizzontale: non occorre fornire una differenza di pressione per mantenerlo in moto stazionario.

### 5.3 Il fenomeno della viscosità.

Per descrivere il fenomeno della viscosità e per definire il coefficiente di viscosità  $\eta$ , è conveniente riferirsi in primo luogo al caso descritto nella **Fig.5.3**: sulla superficie di una "piscina" di profondità  $h$  viene spinta con una forza  $F$  costante, una lastra solida di superficie  $S$ . Sappiamo che per mantenere in moto la lastra (possiamo immaginare una barca) è necessario utilizzare un motore che eserciti la forza necessaria al moto. Nel momento in cui la forza cessasse di agire ci aspettiamo che la barca tenderà a rallentare e quindi fermarsi.

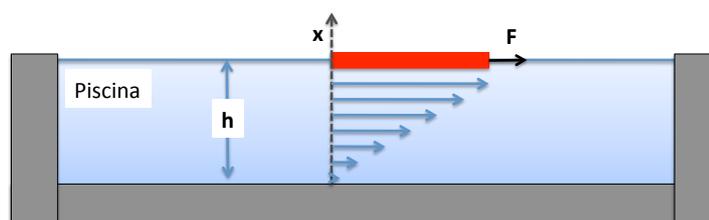


Fig.5.3 Esperimento concettuale per mettere in evidenza il fenomeno della viscosità. La barca che viene spinta sulla superficie della piscina è indicata in rosso. Le frecce indicano le velocità di movimento di ciascun strato elementare di fluido.

Per trattare questo caso immaginiamo il liquido della piscina costituito da una successione di strati che scorrono gli uni sugli altri come in figura. Lo strato superiore è a contatto con la superficie della lastra, quello inferiore con il fondo della piscina. Nel caso di liquido ideale, l'assenza di sforzi di taglio fa sì che nella superficie di contatto tra lastra e strato superiore non vi sia alcuna forza parallela al moto, e dunque la lastra possa muoversi liberamente lasciando in quiete il primo strato e, con lui, tutti gli altri strati. Se invece immaginiamo che vi siano delle forze di taglio parallele al moto, dobbiamo pensare che ciascuno strato, sia sollecitato a muoversi longitudinalmente, dall'azione di trascinamento dello strato ad esso superiore, e che, nello stesso tempo eserciti una forza sullo strato ad esso inferiore. Le due forze sono contrarie in verso e uguali in modulo a meno di infinitesimi. Pertanto ciascuno strato si muoverà di moto uniforme. Lo strato superiore sarà direttamente trascinato dalla lastra, possiamo assumere che sia in quiete rispetto alla lastra e dunque avrà la velocità della lastra  $v$ , lo

strato inferiore sarà invece in quiete con il fondo della piscina e dunque avrà velocità 0, quelli intermedi avranno velocità che andranno da 0 a  $v$ . Quando una schematizzazione di questo tipo è applicabile al nostro sistema, si dice che il moto del liquido si svolge in **regime laminare**. In tale regime è comunque possibile pensare al moto del fluido come ad un moto di strati che scorrono gli uni sugli altri. Per quanto detto, tale regime, pur non essendo “ideale” nel senso che abbiamo detto sopra, rappresenta comunque un regime di moto essenzialmente ordinato. Nel seguito vedremo cosa succede quando le caratteristiche del moto sono tali che nemmeno questa forma di ordine è consentita.

Empiricamente si osserva una relazione di proporzionalità tra la forza con cui viene spinta la barca e la velocità costante da questa assunta

$$v \propto \frac{Fh}{S} \quad (5.17)$$

tipica di un moto caratterizzato da attrito viscoso (vedi cap.3.2). Sempre con riferimento al modello degli strati di liquido prima illustrato, detta  $x$  la coordinata che individua ciascuno strato ( $0 < x < h$ ) ci aspettiamo un andamento lineare della velocità degli strati con la profondità a cui si trovano:

$$v(x) = v \frac{x}{h} \quad (5.18)$$

ovvero

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{h} \quad (5.19)$$

per cui utilizzando la (5.17) espressa per una forza infinitesima  $dF_t$  (utilizziamo qui il suffisso t per indicare il carattere tangenziale della forza) e introducendovi la (5.19) otteniamo

$$dF_t = \eta \frac{dv}{dx} dS \quad (5.20)$$

$$T = \frac{dF_f}{dS} = \eta \frac{dv}{dx}$$

in cui dunque lo sforzo di taglio  $T$  che caratterizza il moto reale del liquido è espresso in funzione di due elementi: un elemento cinematico (la derivata della velocità rispetto a  $x$ ) e uno ( $\eta$ ) che dipende unicamente dalle caratteristiche della lastra e del mezzo. La quantità  $\eta$  è detta **coefficiente di viscosità**. Dalla (5) si capisce il significato di  $\eta$ : per alti valori di  $\eta$  occorre applicare forze molto elevate per ottenere un’alta velocità della lastra; viceversa valori tendenti a 0 di  $\eta$  corrispondono a liquidi quasi ideali, per i quali non è affatto necessaria l’applicazione di una forza. In **Tab.5.1** vengono dati valori di  $\eta$  per alcuni liquidi comuni. L’unità di misura del coefficiente di viscosità nel S.I. è pari a  $\text{Ns/m}^2$  ed è anche detto **Poise**. I valori sono dati per specifici valori della temperatura dei fluidi, dato che il meccanismo della viscosità dipende dalla temperatura.

Materiale	Temperatura (oC)	Viscosità (Ns/m <sup>2</sup> )
Acqua	0	1.8×10 <sup>-3</sup>
	20	1.0×10 <sup>-3</sup>
	100	0.3×10 <sup>-3</sup>
Mercurio	20	1.5×10 <sup>-3</sup>
Olio lubrificante	16	1.1×10 <sup>-1</sup>
Etanolo	20	1.2×10 <sup>-3</sup>
Etere Etilico	20	0.2×10 <sup>-3</sup>
Sangue	37	4.0×10 <sup>-3</sup>

Tab.5.1 Valori dei coefficienti di viscosità per alcuni fluidi a diverse temperature.

#### 5.4 Liquido reale in un condotto cilindrico: la legge di Hagen-Poiseuille.

Applichiamo ora le considerazioni appena fatta a proposito dei liquidi reali in moto in regime laminare, al caso di un condotto orizzontale cilindrico nel quale fluisce un liquido.

Nel caso di un condotto cilindrico di lunghezza  $\Delta l$  e raggio della sezione  $R$ , il modello degli strati che scorrono gli uni sugli altri continua a valere, con l'importante differenza che in questo caso dobbiamo considerare delle corone cilindriche in luogo dei piani. Lo strato a contatto con la parete del condotto sarà fermo ( $v=0$ ), quelli concentrici avranno invece velocità crescenti fino al cilindro infinitesimo centrale che esibirà la velocità massima ( $v=v_{max}$ ). Chiamiamo  $r$  la coordinata radiale, con  $r=0$  al centro del condotto e  $r=R$  sulla parete;  $v(r)$  è la velocità longitudinale del moto laminare dello strato che si trova a distanza  $r$  dal centro del condotto, si tratta di una funzione chiaramente decrescente;  $p$  e  $p'$  sono rispettivamente le pressioni del liquido all'inizio e alla fine del condotto.

Consideriamo dunque il moto del generico strato, corona cilindrica lunga  $\Delta l$  compresa tra i raggi  $r$  e  $r+dr$ . Essendo il moto a velocità costante, la somma delle forze agenti sullo strato deve annullarsi. Le forze in questione sono 2: la forza di pressione che agisce sulle due estremità dello strato, e gli sforzi di taglio dovuti agli strati inferiore e superiore. Le risultante delle forze di pressione sarà data da:

$$(p - p')2\pi r dr \quad (5.21)$$

mentre la risultante delle forze di taglio sarà data dal bilanciamento tra la forza esercitata dallo strato esterno e quella esercitata sullo strato interno:

$$-2\pi r \Delta l \eta \frac{dv}{dr} + 2\pi(r + dr) \Delta l \eta \left( \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr \right) \quad (5.22)$$

in cui abbiamo usato l'espressione (5.20) per caratterizzare lo sforzo di taglio nell'una e nell'altra superficie di separazione. Si noti che essendo la derivata  $dv/dr$  negativa, il primo termine della somma, dovuto al trascinamento dello strato più interno risulta positivo, il secondo, dovuto al trascinamento dello strato più esterno risulta invece negativo.

Sommiamo ora e uguagliamo a 0 la somma delle espressioni (5.21) e (5.22) eliminando il fattore comune  $2\pi dr$  ed trascurando i termini di second'ordine:

$$(p - p')r + \Delta l \eta \frac{dv}{dr} + r \Delta l \eta \frac{d^2v}{dr^2} = 0$$

$$-\Delta p = \frac{\Delta l \eta}{r} \left[ \frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} \right] = \frac{\Delta l \eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right)$$
(5.23)

Siamo pervenuti ad una equazione differenziale del secondo ordine in  $r$  da cui, integrando due volte ricaviamo la funzione  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Procediamo con due integrazioni entrambi per separazione di variabili. La prima:

$$-\Delta p \int_0^r r' dr' = \eta \Delta l \int_0^r \frac{d}{dr'} \left( r' \frac{dv}{dr'} \right)$$

$$-\Delta p \frac{r^2}{2} = \eta \Delta l r \frac{dv}{dr}$$
(5.24)

e la seconda:

$$-\Delta p \frac{r dr}{2} = \eta \Delta l dv$$

$$-\frac{\Delta p}{2 \eta \Delta l} \int_R^r r' dr' = \int_0^{v(r)} dv'$$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4 \eta \Delta l} (R^2 - r^2)$$
(5.25)

Quest'ultima equazione esprime la dipendenza della velocità dello strato infinitesimo dalla sua posizione del condotto, ed è illustrata in modo qualitativo in **Fig.5.4**. A differenza del caso del moto della lastra discusso nel precedente paragrafo, la velocità varia in questo caso quadraticamente con il raggio, e raggiunge il suo valore massimo  $\mathbf{v}_{max}$ , per  $\mathbf{r}=0$ :

$$v_{max} = \frac{\Delta p}{4 \eta \Delta l} R^2$$
(5.26)

A partire dall'ultima delle (5.25), con una ulteriore integrazione sulla generica sezione  $S$ , determiniamo la portata volumetrica del condotto:

$$Q_v = \int_S v dS' = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{2\pi \Delta p}{4 \eta \Delta l} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$= \frac{2\pi \Delta p}{4 \eta \Delta l} \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{2\pi \Delta p}{4 \eta \Delta l} R^4$$
(5.27)

da cui otteniamo la legge di Hagen-Poiseuille che esprime la portata di un condotto cilindrico dove scorre un liquido in regime laminare:

$$Q_v = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta \Delta l} R^4$$
(5.28)

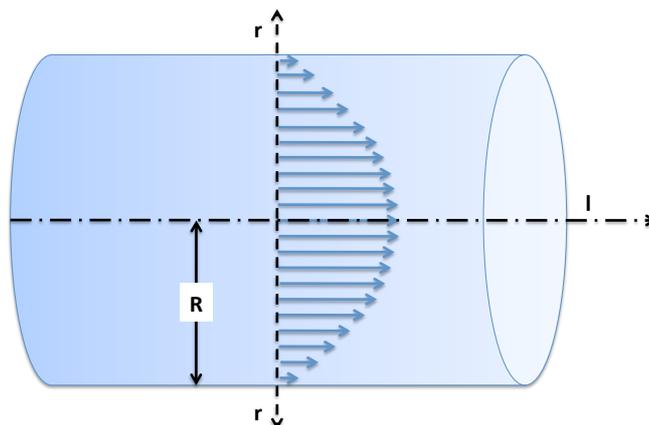


Fig.5.4 Andamento delle velocità delle corone circolari elementari di fluido in funzione del raggio  $r$  della corona. L'andamento è illustrato per il moto di un fluido in un condotto cilindrico.

Facciamo ora alcune considerazioni su questa importante formula. Essa esprime una relazione di proporzionalità tra la cosiddetta **caduta di pressione** tra le due estremità del condotto  $\Delta p$  e la portata del condotto stesso  $Q_v$

$$\Delta p = Z Q_v$$

in cui il coefficiente di proporzionalità  $Z$  è dato da:

$$Z = \frac{8\eta\Delta l}{\pi R^4} \quad (5.29)$$

ed è anche detto **impedenza** del condotto. Il significato dell'impedenza è analogo a quello della resistenza elettrica nella teoria dei circuiti: più elevata è l'impedenza, minore è la portata (analogo della corrente elettrica) che si riesce ad avere per una data caduta di pressione (analogo della differenza di potenziale). L'impedenza dipende dal coefficiente di viscosità del liquido e dalla geometria del condotto. Si noti la dipendenza dalla quarta potenza del raggio del condotto, che mostra come condotti molto sottili (come i capillari) abbiano in generale delle impedenze molto elevate.

### 5.5 Moto laminare e moto turbolento: il numero di Reynolds.

Le considerazioni fatte nei due paragrafi precedenti fino alla derivazione della legge di Hagen-Poiseuille si applicano al caso del moto in regime laminare, un caso in cui, come abbiamo detto, benché il liquido non sia ideale, il suo moto è tuttavia caratterizzato da un certo grado di "ordine". Il fenomeno della viscosità può essere visto come il meccanismo in grado di mantenere "ordinato" questo moto, garantendo un regolare scorrimento tra i volumi del liquido in moto relativo gli uni rispetto agli altri. Tuttavia per un dato liquido, ci aspettiamo che al crescere della velocità, si arrivi ad una situazione nella quale la forza di attrito viscoso tra i due strati non è più sufficiente a contrastare la tendenza dei singoli volumi di fluido a muoversi liberamente in modo disordinato. Per un certo valore di velocità critica si passa dal regime laminare ad un altro che chiameremo **regime vorticoso** o **turbolento**, nel quale dunque un elemento di liquido darà luogo ad un moto vario all'interno del condotto, non più caratterizzabile come stazionario. E' possibile mettere in evidenza sperimentalmente il passaggio dal

moto laminare a quello turbolento iniettando nel condotto filamenti di liquidi colorati e osservando che in un caso un filamento colorato mantiene la sua identità nel corso del moto, mentre nell'altro caso tenderà a frammentarsi.

La trattazione del moto turbolento è chiaramente molto complessa e viene generalmente fatta utilizzando programmi di simulazione al computer. Qui vogliamo solo individuare delle grandezze accessibili sperimentalmente che permettono di caratterizzare il passaggio da un tipo di moto all'altro. A tale scopo introduciamo il **numero di Reynolds**:

$$R_e = \frac{\rho v R}{\eta} \quad (5.30)$$

combinazione adimensionale di alcune caratteristiche del tipo di liquido (la densità  $\rho$  e il coefficiente di viscosità  $\eta$ ) del raggio del condotto  $R$  e della velocità  $v$ . Qualitativamente possiamo pensare  $R_e$  come il rapporto tra le "forze di inerzia" dovute alla velocità e le forze di attrito viscoso. Valori elevati di  $R_e$  corrispondono a situazioni nelle quali la velocità tende a dominare sulla resistenza dovuta alla viscosità. Empiricamente si osserva che per  $R_e > 1000$  si ha la transizione dal moto laminare al moto turbolento. Ciò è equivalente a stabilire un valore della velocità critica pari a:

$$v_{cr} \approx 1000 \frac{\eta}{\rho R} \quad (5.31)$$

Si tratta di una relazione semiquantitativa, più una stima di ordine di grandezza che un valore effettivo in cui cambia il regime. Tuttavia è interessante notare il fatto che la velocità critica è tanto più grande quanto più alta è la viscosità e quanto più piccola è la densità, per cui liquidi leggeri e molto viscosi sono più adatti al moto laminare.

Nel caso di moto turbolento cambia anche la relazione tra caduta di pressione e portata. Tendenzialmente non si ha più una relazione lineare tra le due ma piuttosto una relazione quadratica tra caduta di pressione e velocità. Su base puramente empirica si trova:

$$\Delta p = \frac{\lambda \Delta l}{2R} v^2 \quad (5.32)$$

in cui  $\lambda$  è un parametro avente le dimensioni di una densità, legato al numero di Reynolds dalla:

$$\lambda = 0.16 \rho R_e^{-1/4} \quad (5.33)$$

La relazione (5.32) ci dice che in questo caso, per raddoppiare la velocità del moto occorre quadruplicare la caduta di pressione e non raddoppiarla come nel caso del regime laminare. Dal punto di vista dunque della conduzione il moto laminare è decisamente preferibile a quello turbolento.

## 5.6 Legge di svuotamento di un capillare nel regime laminare e nel regime turbolento.

Abbiamo a questo punto tutti gli strumenti per trattare il caso dello svuotamento del condotto attraverso un capillare, schematizzato nella figura 5.1. Deriveremo la legge di svuotamento nelle seguenti ipotesi: il moto lungo il condotto verticale può essere considerato ideale e quindi segue il teorema di Bernoulli; il moto nel capillare sarà considerato prima laminare poi turbolento: nel primo caso

utilizzeremo la (5.28), nel secondo caso la (5.32). Infine faremo delle considerazioni di carattere sperimentale.

Applichiamo dunque il teorema di Bernoulli nella forma (5.11) tra il pelo dell'acqua (quota  $h$ , sezione  $S$ , pressione atmosferica  $p$ , velocità  $v$ ) nel condotto verticale e il punto di fuoriuscita del liquido dal condotto al capillare (quota 0, sezione  $S'$ , pressione  $p'$  e velocità  $v'$ ):

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = \frac{v'^2}{2g} + \frac{p'}{\rho g} \quad (5.34)$$

$$\rho g h = (p' - p) + \frac{1}{2} \rho (v'^2 - v^2) = (p' - p) + \frac{1}{2} \rho v^2 \left( \left( \frac{v'}{v} \right)^2 - 1 \right)$$

Osserviamo subito che il rapporto  $v'/v$  è pari al rapporto tra la sezione del condotto verticale e quella del capillare, e dunque, dato che nei casi che ci interessano

$$\frac{v'}{v} = \frac{S}{S'} \gg 1 \quad (5.35)$$

possiamo semplificare la (5.34) e ottenere la relazione tra quota  $h$  e velocità  $v$ :

$$h = \frac{p' - p}{\rho g} + \frac{1}{2g} v^2 \left( \frac{S}{S'} \right)^2 \quad (5.36)$$

Nella (5.36) compare la caduta di pressione  $p' - p$  che, come sappiamo è legata alla velocità in modi diversi a seconda se ci troviamo nel regime laminare o turbolento. Una volta specificata tale relazione la (5.36) dà luogo ad una equazione differenziale in  $h$ , essendo infatti  $v = dh/dt$ . Ricaviamo tale equazione nei due casi.

Nel caso del moto laminare usiamo la (5.28). Detto  $r'$  il raggio del capillare,  $v'$  la velocità media nel capillare, e osservato che la caduta di pressione tra gli estremi del capillare è pari a  $p - p'$  (uguale e opposta a quella ai capi del condotto verticale, dato che la pressione in uscita dal capillare non può che essere quella atmosferica), si ha:

$$Q_v = \pi r'^2 v' = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta \Delta l} r'^4 \quad (5.37)$$

$$\Delta p = \frac{8 \eta \Delta l v'}{r'^2} = \frac{8 \eta \Delta l v}{r'^2} \left( \frac{S}{S'} \right)$$

Sostituendo nella (5.36) otteniamo l'equazione differenziale cercata:

$$h = \frac{8 \eta \Delta l}{\rho g r'^2} \left( \frac{S}{S'} \right) \frac{dh}{dt} + \frac{1}{2g} \left( \frac{S}{S'} \right)^2 \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 \quad (5.38)$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare, né riconducibile banalmente ad una equazione lineare. Tuttavia vediamo facilmente che nel caso di moto laminare, finché cioè il numero di Reynolds rimane al di sotto del valore di soglia che abbiamo stabilito essere dell'ordine di 1000, il secondo termine della (5.28) è trascurabile rispetto al primo. Infatti facendo il rapporto tra i due termini e procedendo alle numerose semplificazioni si ottiene:

$$\frac{S}{S'} \frac{\rho r'^2 v}{16 \eta \Delta l} = \frac{\rho r'^2 v'}{16 \eta \Delta l} = \frac{r'}{16 \Delta l} R_e \ll 1 \quad (5.39)$$

se

$$R_e \ll \frac{16 \Delta l}{r'} \approx 1000 \quad (5.40)$$

condizione verificata nel caso di moto laminare, dati i valori di  $\Delta l$  e  $r'$  dei capillari in uso in laboratorio. Dunque nella (5.38) possiamo togliere il secondo addendo a secondo membro e ricavare l'equazione lineare del primo ordine che, definita la costante di tempo  $\tau$

$$\tau = \frac{8\eta\Delta l r^2}{\rho g r'^4} \quad (5.41)$$

è del tipo ben noto:

$$\frac{dh}{h} = -\frac{dt}{\tau} \quad (5.42)$$

e fornisce dunque soluzioni di tipo esponenziale per la legge di svuotamento del condotto attraverso un capillare in regime laminare:

$$h(t) = h_0 e^{-t/\tau} \quad (5.43)$$

La velocità dello svuotamento è parametrizzata dalla costante  $\tau$  e dunque, come atteso, dipende dal tipo di liquido ( $\rho$ ,  $\eta$ ) e dalle caratteristiche geometriche di provetta e capillare ( $\Delta l$ ,  $r$ ,  $r'$ ) oltre che dall'accelerazione di gravità, essendo la gravità in definitiva il motore dello svuotamento.

Nel caso di regime turbolento, sostituiamo la relazione (5.32) nella (5.36):

$$h = \frac{v'^2 \Delta l \lambda}{2\rho g r'} + \frac{v'^2 \left(\frac{S}{S'}\right)^2}{2g} = v'^2 \left(\frac{S}{S'}\right)^2 \left(\frac{\lambda \Delta l}{2\rho g r'} + \frac{1}{2g}\right) = \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{\lambda \Delta l}{\rho r'}\right) v'^2 \left(\frac{S}{S'}\right)^2 \quad (5.44)$$

In questo caso si ha un'equazione del tipo

$$h = \frac{1}{k^2} \left(-\frac{dh}{dt}\right)^2 \quad (5.45)$$

in cui abbiamo definito la costante  $k$  data da:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{\lambda \Delta l}{\rho r'}\right) \left(\frac{S}{S'}\right)^2 \quad (5.46)$$

Si noti che a rigore  $k$  non è una costante, dato che contiene al suo interno il parametro fenomenologico  $\lambda$  definito dalla (5.33) che a sua volta, dipendendo da  $Re$ , può variare nel corso del fenomeno. Data tuttavia la debole dipendenza (alla -1/4) di  $\lambda$  dalla velocità, assumiamo  $k$  costante nel corso del moto. L'equazione (5.45) è ancora di tipo non lineare. Tuttavia in questo caso prendendo la radice di ambo i membri ci si riconduce ad una equazione lineare che risolviamo con il metodo della separazione delle variabili:

$$\begin{aligned} \sqrt{h} &= \frac{1}{k} \left(-\frac{dh}{dt}\right) \\ \int_{h_0}^h \frac{dh'}{\sqrt{h'}} &= -\int_0^t k dt' \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$2\sqrt{h} \Big|_{h_0}^h = -kt$$

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0} - \frac{k}{2} t$$

Come si vede dalla (5.46), la costante  $k$  dipende dalle stesse quantità da cui dipende la costante di tempo  $\tau$  definita per il moto laminare, ed è dunque la grandezza che controlla la velocità di svuotamento.

Ricapitolando, le leggi di svuotamento cercate sono dunque:

→ nel caso di regime laminare la legge (5.43) con la definizione della costante di tempo  $\tau$  (5.41);

→ nel caso di regime vorticoso, l'ultima delle (5.47) con la definizione di costante  $k$  data dalla (5.46).

La Fig.5.5 mostra due esempi di leggi di svuotamento per un set di parametri.

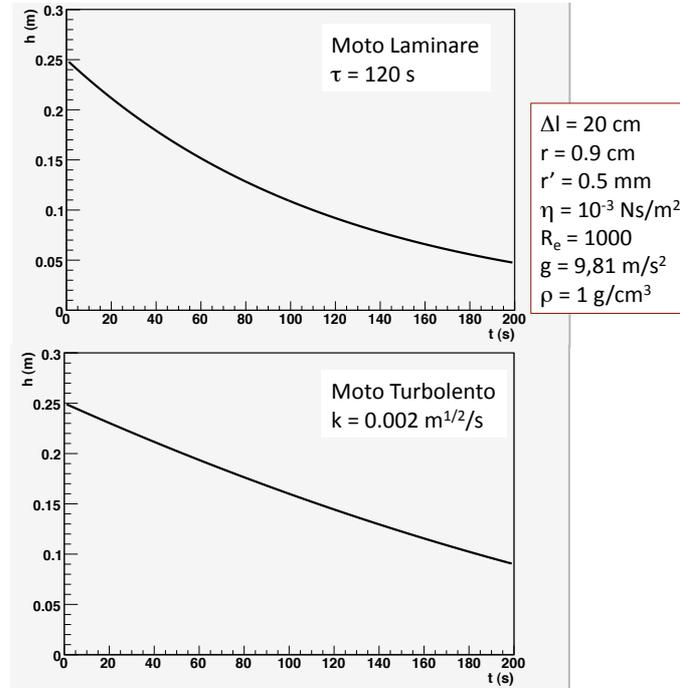


Fig.5.5 Andamento del livello del liquido nella provetta in funzione del tempo per un caso di moto laminare ed uno di moto turbolento. Sono indicati i valori dei parametri usati e quelli delle costanti di tempo  $\tau$  e  $k$  rispettivamente nei due casi.

## 5.7 Considerazioni sperimentali.

Per ognuno dei capillari a disposizione si procederà in laboratorio alla misura della funzione  $m(t)$  definita sopra. E' facile rendersi conto che tale funzione è direttamente collegata alla funzione  $h(t)$  ricavata nel paragrafo precedente per ciascuno dei due regimi possibili. Infatti al generico istante di tempo  $t$ , la quantità di liquido finita nella bilancia sarà pari a quella mancante nel condotto verticale (trascurando il volume del capillare):

$$m(t) = (h_0 - h(t))S\rho \quad (5.48)$$

ovvero, introducendo la quantità

$$m_\infty = h_0 S \rho$$

pari alla massa totale trasferita dal condotto alla bilancia a fine esperimento,

$$h(t) = \frac{1}{S\rho} (m_\infty - m(t)) \quad (5.49)$$

che è la relazione da usare per ricavare la quantità  $h(t)$  da confrontare con la teoria. Dunque occorrerà conoscere  $S$  e  $\rho$  (quest'ultima è la densità dell'acqua) e si dovrà misurare direttamente con la bilancia la massa in funzione del tempo.

Concludiamo osservando che derivando la (28) rispetto al tempo si ottiene una relazione molto interessante:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dh}{dt} \rho S = v(t) \rho S = v'(t) \rho S' = v'(t) \rho \pi r'^2 \quad (5.50)$$

Dalla misura della derivata della quantità misurata dalla bilancia  $m(t)$  si può ottenere la velocità di fuoriuscita dal capillare in funzione del tempo

$$v'(t) = \frac{1}{\pi \rho r'^2} \frac{dm}{dt} \quad (5.51)$$

e da questo, noto il coefficiente di viscosità, il numero di Reynolds in ogni istante dello svuotamento:

$$R_e(t) = \frac{1}{\pi \eta r'} \frac{dm}{dt} \quad (5.52)$$

Dunque la misura diretta di  $dm/dt$  consente di valutare direttamente il regime del moto di svuotamento istante per istante.

