

Esercitazione di Meccanica 2

Misura della costante elastica di una molla e dell'accelerazione di gravità

Scopo dell'esperienza:

- misura della costante elastica di una molla con metodi diversi;
- misura dell'accelerazione di gravità con metodi diversi;

Legge di Hooke ed equazione oraria per una massa appesa con una molla:

La legge di Hooke:

$$F_{el} \propto \Delta x$$

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

In una dimensione abbiamo

$$F = m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale e' la seguente:

$$x = x_0 + A \cos(\omega t + \phi)$$

con la condizione che la pulsazione soddisfi

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Si puo' facilmente dimostrare che il periodo di oscillazione e' collegato alla pulsazione dalla relazione

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Nel caso di una massa appesa ad una molla c'e' un termine in piu' dovuto alla forza peso e il secondo principio della dinamica diventa:

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x} + m\vec{g}$$

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) + mg$$

che ha come soluzione

$$x = x_0 + mg/k + A \cos(\omega t + \phi)$$

Nel caso statico (senza oscillazione, $\dot{x} = 0$ e $\ddot{x} = 0$) la posizione di equilibrio corrisponde a

$$x_{eq} = x_0 + mg / k$$

In questo esperimento non conosciamo la massa totale dell'oscillatore ma solo la massa dei dischi che aggiungiamo. Anche la lunghezza a riposo della molla non è nota poiché la molla comincia ad allungarsi solo con una sollecitazione sufficientemente intensa. Quindi per ricavare la costante elastica e l'accelerazione abbiamo bisogno di almeno due misure di periodo e di allungamento statico con masse diverse.

Dalla misura dei periodi:

$$T_1^2 = 4\pi^2(m_0 + m_1) / k; \quad T_2^2 = 4\pi^2(m_0 + m_2) / k;$$

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2(m_2 - m_1) / k;$$

$$k = 4\pi^2 \frac{m_2 - m_1}{T_2^2 - T_1^2}$$

Una volta misurata k , g può essere ricavata dalla misura delle posizioni di equilibrio:

$$x_{eq1} = x_0 + (m_0 + m_1)g / k; \quad x_{eq2} = x_0 + (m_0 + m_2)g / k$$

$$x_{eq2} - x_{eq1} = (m_2 - m_1)g / k$$

$$g = k \frac{x_{eq2} - x_{eq1}}{m_2 - m_1}$$

da cui (usando l'espressione di k precedentemente ottenuta)

$$g = 4\pi^2 \frac{x_{eq2} - x_{eq1}}{T_2^2 - T_1^2}$$

Più in generale, nel caso si avessero a disposizione più misure di periodo e di posizione di equilibrio ottenute con diverse masse aggiuntive appese, è possibile studiare il loro andamento in funzione della massa.

$$\begin{cases} T^2 = 4\pi^2(m_0 + m) / k = 4\pi^2 m_0 / k + 4\pi^2 m / k = T_0^2 + \alpha_1 m \\ x_{eq} = x_0 + (m_0 + m)g / k = \bar{x}_0 + mg / k = \bar{x}_0 + \alpha_2 m \end{cases}$$

Da T_0^2 è possibile estrarre m_0 , mentre dal rapporto α_2/α_1 si può ricavare g ($g = 4\pi^2 \alpha_2/\alpha_1$).

Apparato sperimentale:

- Una molla appesa al supporto con carta millimetrata per misure di allungamento;
- 10 dischetti che si possono appendere alla molla;

- Bilance per la misura della massa dei 10 dischetti;
- Un cronometro a lettura digitale per le misure di periodo;
- Una squadra per ridurre l' errore di parallasse nella misura di allungamento.



Operazioni:

1. Misurare la massa complessiva di 5 dischetti (segnarsi quali) e di tutti e 10 i dischetti. Fare misure ripetute se necessario.
2. Misurare l'allungamento (posizione di equilibrio) per i 5 dischetti e per i 10 dischetti. Fare misure ripetute se necessario.
3. Misurare il periodo di oscillazione per i 5 dischetti e per i 10 dischetti. Fare in due modi: misurare il tempo complessivo per 5 oscillazioni (50 misure ripetute) e per 50 oscillazioni (5 misure ripetute). Fare l' istogramma per i due set di misure. $T = T_{tot}/5$ (o 50).
4. Ricavare k con l'incertezza, per ciascuna delle due misure di T (5 e 50 oscillazioni). Confrontare i due k ottenuti e commentare l'incertezza.

5. Ricavare g dalla misura di allungamento.
6. Misurare la massa dei 10 pesetti in modo integrato: 1, 1+2, 1+2+3, ... Segnarsi l'ordine. Fare misure ripetute se necessario.
7. Misurare il periodo e l'allungamento aggiungendo via via un dischetto (quindi per 1, 1+2, 1+2+3,...). Per il periodo, fare 20 misure ripetute da 10 oscillazioni.
8. Fare il grafico di T^2 vs m e di x_{eq} vs m .
9. Estrarre α_1 e α_2 con l'incertezza con metodo grafico.
10. Estrarre k da α_1 e g da α_2/α_1 .
11. Estrarre m_0 da retta T^2 vs m . Confrontare il valore ottenuto con quello aspettato (e' possibile misurare direttamente la massa di una parte di m_0).