Esercitazione di Meccanica 6

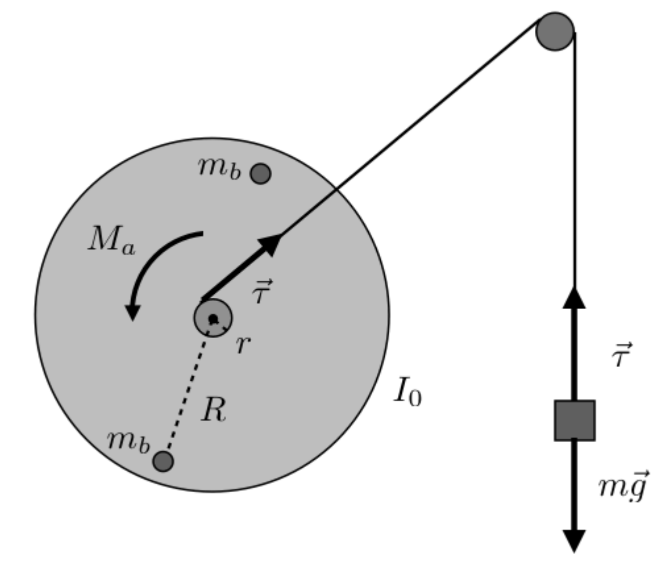
Studio del moto di un volano

Scopo dell'esperienza:

- Studio delle leggi orarie che descrivono il moto di un volano
- Misura del momento di inerzia del volano e delle forze di attrito che ostacolano la rotazione di esso

Equazioni orarie che descrivono il processo:

- caso senza attrito del mezzo significativo



Il sistema studiato e' costituito da un disco metallico di momento di inerzia I_0 vincolato a ruotare intorno ad un asse fisso orizzontale. Sul disco e' fissato un altro disco di raggio r (puleggia) intorno al quale e' avvolto un filo inestensibile e di massa trascurabile. All' altro capo del filo e' appesa, tramite una carrucola, una massa m. Il disco e' soggetto ad attrito radente di momento M_a. E' possibile incrementare il momento di inerzia del disco aggiungendo n coppie di bulloni di massa m_b (in posizione simmetrica rispetto all'asse di rotazione e a distanza R da esso).

La prima e la seconda equazione cardinale della dinamica applicata, rispettivamente, alla massa m e al sistema ruotante rispetto ad un polo posizionato nel suo centro di massa danno

$$mg - \tau = ma$$
$$\tau r - M_a = I_{tot}\alpha = (I_0 + 2nm_bR^2)a/r$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che l'accelerazione angolare del volano e l'accelerazione della massa *m* sono legate fra loro dalla relazione $\alpha r = a$. In questo caso la massa *m* sta scendendo. Ricavando l'accelerazione dalle due equazioni, si ottiene

$$a = \frac{mgr^2 - M_a r}{mr^2 + I_0 + 2nm_b R^2}$$

L'inverso dell'accelerazione si puo' scrivere come una funzione lineare del numero di coppie di bulloni

$$\frac{1}{a} = \frac{mr^2 + I_0}{mgr^2 - M_a r} + n\frac{2m_b R^2}{mgr^2 - M_a r} = A + Bn$$

dove

$$A = \frac{mr^2 + I_0}{mgr^2 - M_a r}$$
$$B = \frac{2m_b R^2}{mgr^2 - M_a r}$$

da cui

$$M_a = mgr - \frac{2m_b R^2}{Br}$$
$$I_0 = 2m_b R^2 \frac{A}{B} - mr^2$$

Quando il filo si e' completamente srotolato, il moto si inverte. Le equazioni rimangono identiche eccetto per il cambio di segno di M_a.

E' possibile ricavare il valore del momento dell'attrito radente studiando la perdita di energia dopo un moto completo di discesa e di risalita della massa *m*. A causa dell'attrito la quota finale h' sara' minore della quota iniziare *h*. La perdita di energia gravitazionale e' pari al lavoro della forza di attrito. Dunque

$$mg(h - h') = mg\Delta h = M_a\theta = M_a\frac{(h + h')}{r} = M_a\frac{(2h - \Delta h)}{r}$$

da cui

$$M_a = \frac{mgr\,{}^{\Delta h}/_{h}}{2 - {}^{\Delta h}/_{h}}$$

- caso con attrito del mezzo

Nelle equazioni del moto vi e' una forza aggiuntiva di tipo dissipativo che e' proporzionale alla velocita' (se siamo in regime laminare). Per comodita' imponiamo che questa forza agisce ad una distanza *r* dall' asse (cio' influenza solo il valore numerico del coefficiente di attrito). Dunque si ha

$mg - \tau = ma$
$r - M_a - M_v = r - M_a - kvr = I_{tot}\alpha = (I_0{}' + 2nm_bR^2)a/r$

L'accelerazione risulta essere

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{mgr^2 - M_ar - kr^2v}{mr^2 + I_0{}' + 2nm_bR^2} = \frac{kr^2}{mr^2 + I_0{}' + 2nm_bR^2}\left(\frac{mgr^2 - M_ar}{kr^2} - v\right) = \frac{1}{\tau}(v_{lim} - v)$$

Questa equazione differenziale per *v* ha soluzione

$$v = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

dove

$$\tau = \frac{mr^2 + I_0{}' + 2nm_bR^2}{kr^2}$$
$$v_{lim} = \frac{mgr^2 - M_ar}{kr^2}$$

Se il moto non e' laminare e la forza di attrito e' proporzionale alla velocita' al quadrato. L'equazione differenziale e' piu' complessa ma puo' ancora essere risolta in modo analitico. Si puo' dimostrare che ha la forma

$$v = v_{lim}\frac{(1 - Ce^{-Dt})}{(1 + Ce^{-Dt})}$$

Apparato sperimentale:

- Volano sul quale e' possibile montare fino a 10 coppie di bulloni e delle palette per aumentare l'attrito del mezzo
- Sensore di rotazione in grado di misurare la posizione della massa m a tempi diversi
- Un metro
- Un calibro ventesimale
- Una bilancia di precisione

Operazioni:

1. ***Configurare il programma di acquisizione e regolare***
    a. la frequenza di campionamento a 50Hz
    b. "risoluzione" a "alto"
    c. "grandezze da visualizzare" a "posizione can1,2"
    d. "tipo di misura lineare" a "puleggia grande guarnizione"
2. ***Fare una rapida verifica di linearita' della misura in posizione.*** Servirsi del metro

3. ***Misurare tutte le masse in gioco.*** Per misurare la massa appesa m, non sganciare la massa dal filo ma portare la bilancia in prossimita' del volano.
4. ***Misurare il raggio r della puleggia e la distanza R dei bulloni dall'asse di rotazione.***
5. ***Misura dell'accelerazione del moto di discesa della massa m in funzione del numero di coppie di bulloni.*** Si consiglia di ripetere ciascuna misura e di determinare la deviazione standard dei valori ottenuti.
6. ***Grafico dell'inverso dell'accelerazione in funzione del numero di coppie di bulloni ed estrazione del momento della forza di attrito e del momento di inerzia.*** Riportare almeno 5-6 punti nel grafico (massimo 8 coppie). Estrarre coefficiente angolare e intercetta con i minimi quadrati e da questi ricavare M_a e $I_{0.}$ Usare g = 9.803 m/s^2. Nel valutare le incertezze, considerare la correlazione tra coefficiente angolare e intercetta.
7. ***Studio della perdita di energia potenziale gravitazionale per effetto dell'attrito.*** Acquisire i dati dell'intero moto del volano (fino a quando il sistema si ferma). Misurare $\Delta h/h$ a tempi diversi.
    - ***a.*** Verificare che $\Delta h/h$ non dipende dal tempo
    - ***b.*** Fare un istogramma dei valori di $\Delta h/h$ ottenuti e ricavare la migliore stima di $\Delta h/h$
    - ***c.*** Estrarre M_a
    - ***d.*** Confrontare questo valore di M_a con quello ottenuto precedentemente.
8. ***Studio del moto del volano in presenza di attrito del mezzo.*** Montare due palette sul volano (simmetriche). Studiare il moto di discesa della massa. Misurare v_{lim}. Stimare k. Fare un grafico in coordinate logaritmiche di v-v_{lim} (solo valori positivi).