

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA
" LA SAPIENZA "

Dipartimento di Fisica

Servizio Fotostampa Dispense

Corso di Esperimentazione di Fisica 2
a.a. 1998-99

Metodologia Sperimentale
parte 2^a

M. ALESSIO - S. IMPROTA

Misure in corrente continua
Misure in corrente alternata
Oscilloscopio a raggi catodici

€ 5.27

16 / 10.200

Servizio Fotostampa Dispense
Ottobre 1998

ALESSIO - IMPROTA

Misure in corrente continua

Prof.ri Alessio - Improta

Esperimentazione di Fisica 2

CAP. I CORRENTE CONTINUAI. Considerazioni generali

Si definisce "circuito elettrico" un insieme di elementi collegati tra loro allo scopo di trasferire energia elettrica.

Gli elementi ideali fondamentali di un circuito elettrico si dividono in due categorie: elementi passivi ed elementi attivi.

Elementi passivi: sono quelli che dissipano od immagazzinano energia (resistori, condensatori, induttori). Per essi valgono le relazioni:

$$V = RI \quad V = \frac{1}{C} \int_0^t I dt \quad V = L \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

e le inverse:

$$I = \frac{V}{R} \quad I = C \frac{dV}{dt} \quad I = \frac{1}{L} \int_0^t V dt \quad (2)$$

dove si è indicato con :

V: la differenza di potenziale ai capi dell'elemento considerato

I: l'intensità della corrente che attraversa l'elemento stesso

R: la resistenza

C: la capacità

L: il coefficiente di autoinduzione (o induttanza)

t: la variabile tempo

Elementi attivi (generatori di tensione, generatori di corrente): forniscono energia agli elementi passivi inseriti nei circuiti di cui fanno parte.

Generatore ideale di tensione

E' una sorgente di energia capace di fornire ai propri terminali una d.d.p. V_0 costante indipendentemente dalla resistenza di carico R che alimenta e quindi dall'intensità I_R della corrente che circola nel circuito (v. fig.1).

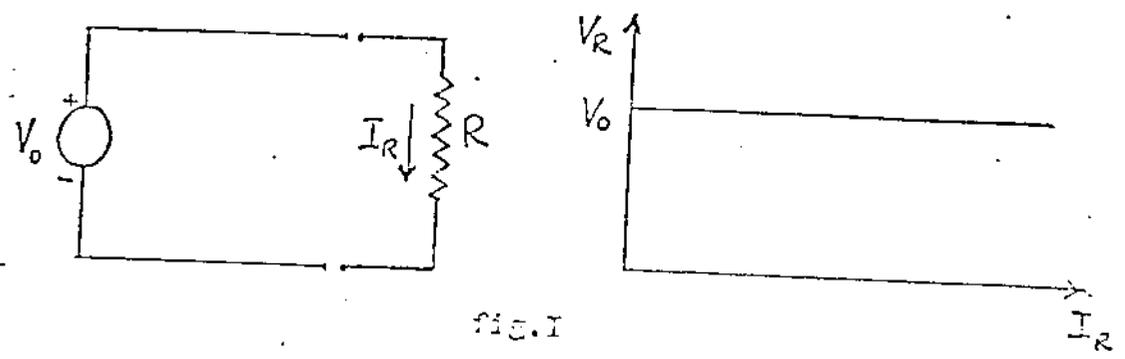


fig.1

Generatore ideale di corrente

E' una sorgente di energia capace di erogare una corrente di intensità I_0 costante, indipendentemente dalla resistenza di carico R che alimenta e quindi dalla d.d.p. V_R presente ai capi di R (v. fig.2).

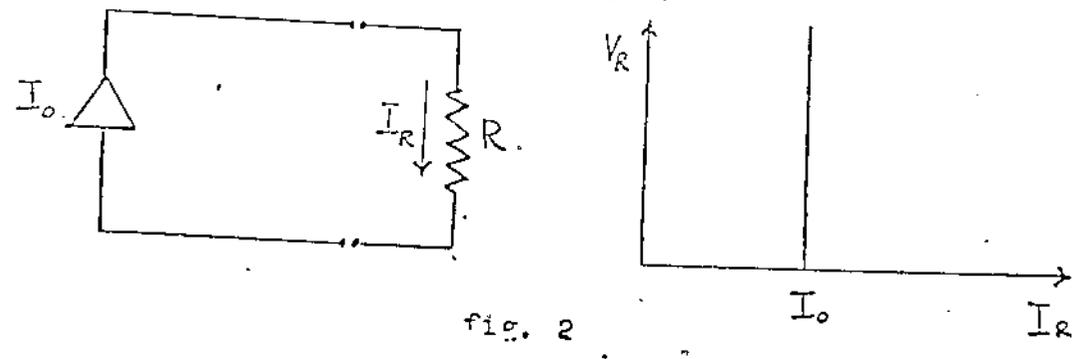


fig. 2

Risolvere un circuito significa determinare tensione e corrente in ciascun punto del circuito stesso; a ciò si può giungere mediante l'applicazione dei principi di Kirchhoff (§ 2.2) oppure ricorrendo a metodi da essi derivati.

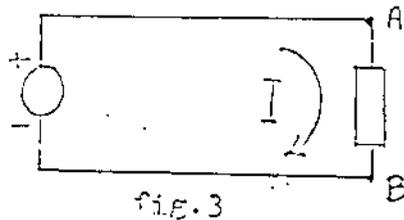
Oltre agli elementi attivi già definiti, anche gli elementi ^{passivi} di un circuito verranno dapprima considerati come

elementi ideali (per es. con il simbolo R si indicheranno resistenze puramente ohmiche), facendo inoltre l'ipotesi che essi non varino nè col tempo nè con lo stimolo applicato (tensione o corrente). Ciò comporta che le equazioni differenziali che si ottengono risolvendo un circuito contenente questi elementi sono lineari ed a coefficienti costanti.

2 - Cenni di teoria dei circuiti in c.c.

2.1 - Legge di Ohm

E' noto che un conduttore ai cui capi è applicata una differenza di potenziale (d.d.p.) $V_A - V_B$ è percorso da una corrente di intensità I (fig. 3)



Si può verificare ponendo in serie nel circuito un misuratore di corrente, che al variare della d.d.p. $V_A - V_B$ il rapporto $\frac{V_A - V_B}{I}$ rimane costante:

$$\frac{V_A - V_B}{I} = \text{cost}$$

A questa costante, caratteristica della natura, dello stato fisico e delle dimensioni del conduttore si dà il nome di "resistenza elettrica" *

* La resistenza si può anche definire come il rapporto tra la potenza W dissipata (cioè trasformata in calore) dal conduttore ed il quadrato dell'intensità di corrente:

$$\frac{W}{I^2} = \text{cost} = R$$

Questa definizione vale sia per i circuiti percorsi da correnti alternate sia per quelli percorsi da correnti continue.

e la si indica con R . La relazione precedente si scrive allora

$$\frac{V_A - V_B}{I} = R$$

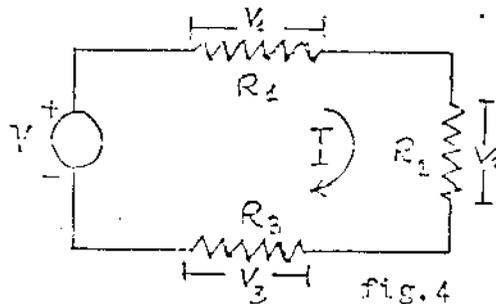
ovvero
$$V_A - V_B = RI \quad (\text{legge di Ohm}). \quad (3)$$

Esempi di applicazione della legge di Ohm:

a) Circuito serie

Più componenti elettrici si dicono disposti in serie quando sono percorsi dalla stessa corrente.

Consideriamo per esempio il caso di un circuito formato da un generatore di tensione con tre resistori in serie (fig. 4)



Applicando la legge di Ohm ai capi delle tre resistenze ed usando i simboli in figura si ha:

$$V_1 = R_1 I \quad V_2 = R_2 I \quad V_3 = R_3 I \quad (4)$$

dove I è la corrente che circola nel circuito. Essendo V la tensione ai capi del generatore deve risultare

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (5)$$

Dalla (5) e dalle (4) si ottiene

$$V = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I \quad (6)$$

Si può allora definire una resistenza equivalente R fornita dalla

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \quad (7)$$

e più in generale $R = \sum_i R_i \quad (8)$

cioè la resistenza equivalente di un circuito con un certo numero di resistori connessi in serie è la somma di tutte le resistenze di essi.

b) Circuito parallelo

Più componenti elettrici si dicono disposti in parallelo quando la differenza di potenziale ai loro capi è la stessa per tutti. Considerando per esempio il caso del circuito costituito da un generatore con tre resistori in parallelo (fig. 5)

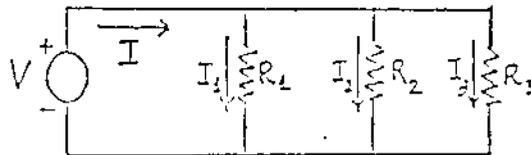


fig.5

Indicando con V tale differenza di potenziale, la corrente in ogni resistore si ottiene mediante la legge di Ohm:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \quad I_2 = \frac{V}{R_2} \quad I_3 = \frac{V}{R_3} \quad (9)$$

In questo caso la somma delle correnti eguaglia la corrente I erogata dal generatore

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (10)$$

coerentemente con una legge generale dei circuiti (1^a legge di Kirchhoff, § 2.2). Dalla (10) e dalle (9) si ha allora:

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{V}{R} \quad (11)$$

Si può definire quindi anche in questo caso una resistenza equivalente R la cui espressione è fornita dalla

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (12)$$

e più in generale

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (13)$$

cioè l'inverso della resistenza equivalente è uguale alla somma degli inversi delle resistenze presenti nel circuito parallelo.

Se i resistori in parallelo sono due, R_1 ed R_2 , con resistenze, si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

cioè

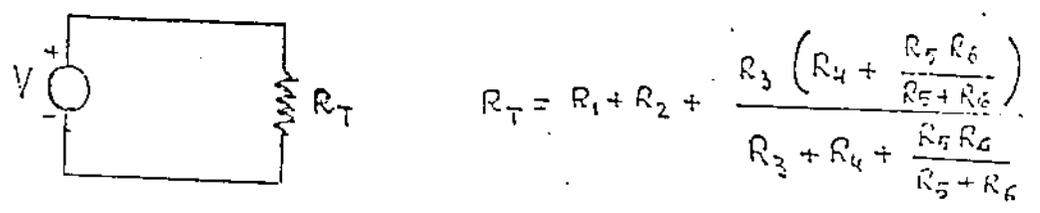
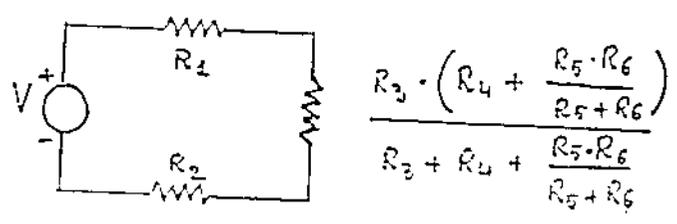
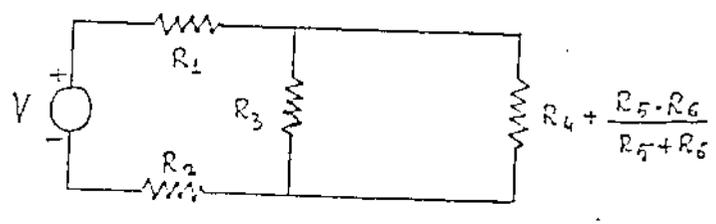
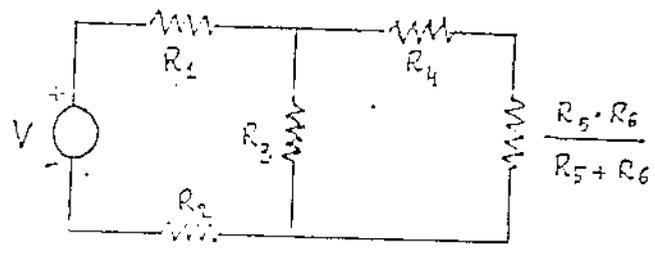
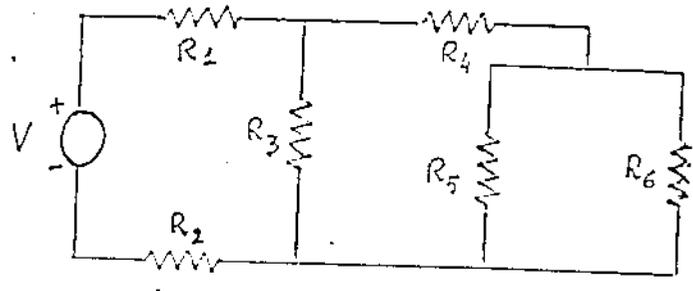
$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{R_2}{1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

Essendo il denominatore un numero sempre maggiore di 1, R risulta sempre minore sia di R_1 che di R_2 ; questo risultato si può estendere affermando in generale che la resistenza equivalente di un circuito costituito da un numero qualsiasi di resistori in parallelo è sempre minore di ciascuna resistenza del circuito.

c) Rete

Una connessione di circuiti serie e parallelo si chiama rete. Nei due esempi che seguono e che riguardano due semplici reti comprendenti ciascuna un solo generatore, si mostra come si possa, mediante l'applicazione della (6) e della (13), calcolare la resistenza equivalente dell'intera rete vista dagli estremi del generatore.

Esempio 1:



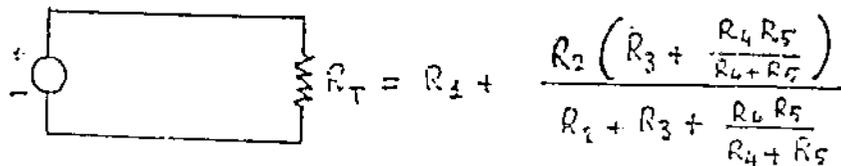
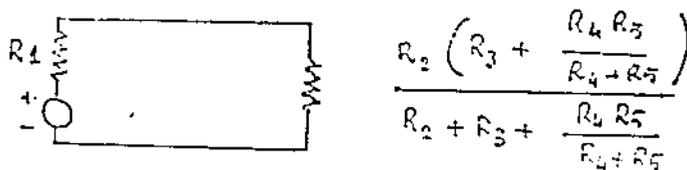
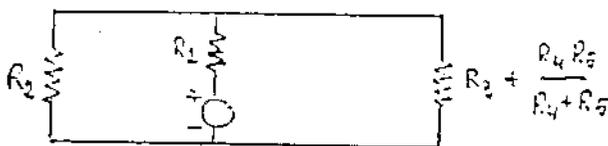
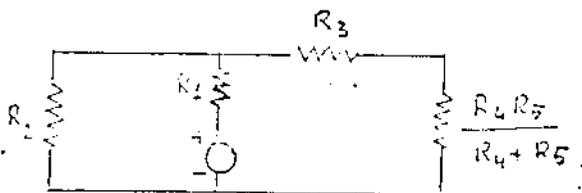
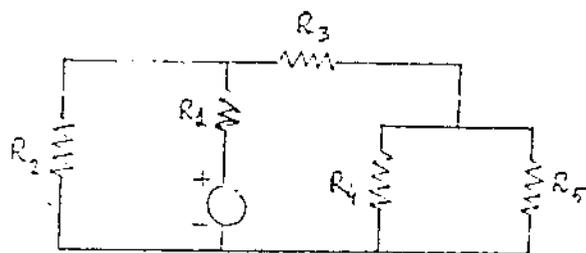
Considerando un circuito la cui resistenze abbiano questi valori:

$$R_1 = 5\Omega, \quad R_2 = 5\Omega, \quad R_3 = 15\Omega, \quad R_4 = 10\Omega, \quad R_5 = 10\Omega, \quad R_6 = 10\Omega$$

si otterrebbe quindi per R_T il valore

$$R_T = 5 + 5 + \frac{15 \left(10 + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} \right)}{15 + 10 + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10}} = 17,5 \Omega$$

Esempio 2



2.2 - Principi di Kirchhoff

Prima di enunciare i principi di Kirchhoff osserviamo che una rete qualunque di conduttori si può sempre pensare costituita dalla combinazione di due elementi base: i nodi e le maglie (fig 6).

Per nodo si intende un punto in cui convergono più di due conduttori. Per definire una maglia si pensi di partire da un nodo e di muoversi lungo i conduttori della rete in modo da ritornare al punto di partenza senza percorrere mai più di una volta ogni conduttore; un percorso di questo genere si chiama maglia.

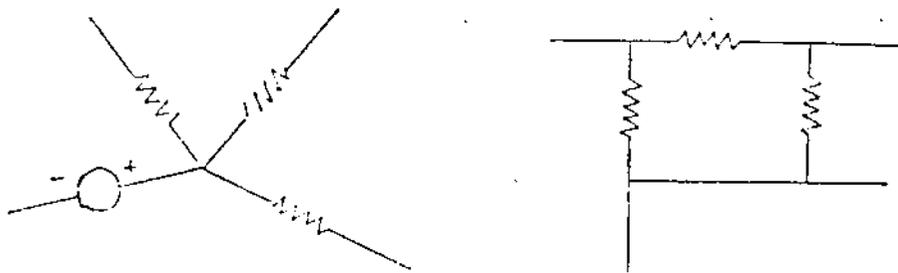


fig.6

Primo principio di Kirchhoff

La somma algebrica delle correnti confluenti in un nodo di un circuito elettrico è sempre nulla:

$$\sum_k I_k = 0 \quad (14)$$

La somma algebrica si intende eseguita considerando positive le correnti che entrano nel nodo e negative quelle che ne escono, o viceversa.

Questa legge deriva dal fatto che la quantità di carica elettrica che arriva al nodo in un certo intervallo di tempo deve essere uguale a quella che si allontana da esso nello stesso intervallo perchè altrimenti si avrebbe un accumulo o una perdita continua di carica nel nodo.

Secondo principio di Kirchhoff

Lungo una qualsiasi maglia di un circuito elettrico è nulla la somma di tutte le d.d.p. ai capi degli elementi che la costituiscono:

$$\sum_i V_i = 0 \quad (15)$$

Il secondo principio si può anche scrivere nella forma

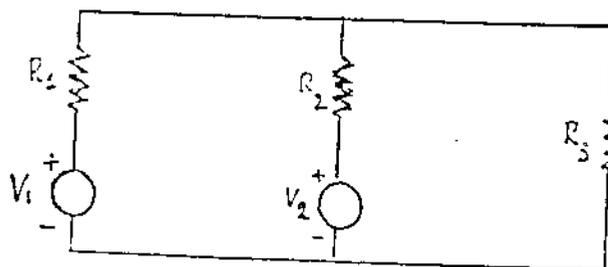
$$\sum_v V_v = \sum_j R_j I_j \quad (16)$$

relazione che si ottiene fissando un verso arbitrario per la I , e considerando positive le d.d.p. coerenti con il verso ~~positivo~~ della corrente, negative nel caso contrario.

Questa legge deriva immediatamente dalla applicazione della legge di Ohm ai singoli rami che costituiscono la maglia.

Esempio di applicazione dei principi di Kirchhoff.

Si consideri il circuito di fig 7 .



$$\begin{aligned} V_1 &= 9 \text{ V} \\ V_2 &= 11,5 \text{ V} \\ R_1 &= 1 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 2,2 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 1 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

fig.7

Per risolvere la rete in questione basta trovare il valore delle correnti che percorrono i singoli rami. A tale scopo si applica il primo principio di Kirchhoff stabilendo arbitrariamente i versi delle correnti che confluiscono in un nodo, per es. assumendo positive le correnti entranti e negative quelle uscenti (fig 8)

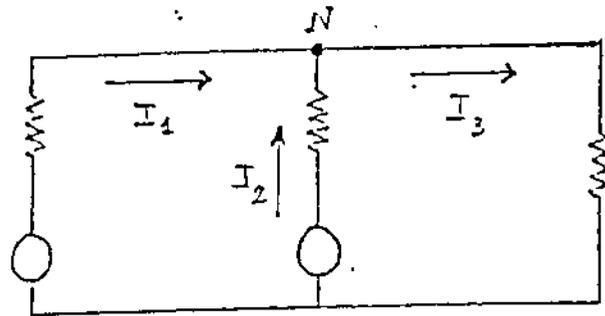


fig. 8

Si applica quindi il secondo principio di Kirchhoff, scegliendo ad arbitrio un verso positivo di percorrenza delle maglie e considerando col segno + quelle d.d.p. dei generatori che tendono a far circolare corrente nel verso scelto e quei prodotti RI per i quali il verso di I è concorde con quello di percorrenza fissato. Da ciò segue (fig 9)

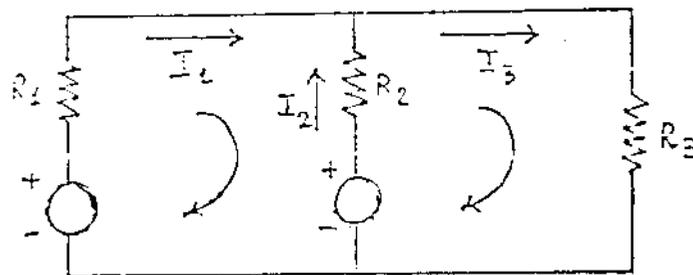


fig. 9

$$\begin{cases} V_1 - V_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2 \\ V_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \end{cases}$$

e tenendo conto della (14) si ha:

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = V_1 - V_2$$

$$R_3 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 = V_2$$

da cui:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 - V_2 & -R_2 \\ V_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & -R_2 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & V_1 - V_2 \\ R_3 & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & -R_2 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}$$

che con la

$$I_3 = I_1 + I_2$$

forniscono le correnti circolanti nel circuito. Sostituendo al posto di V_1, R_1, R_2, R_3 i valori dati si trova:

$$I_1 = 4,5 \text{ mA} \quad I_2 = 0,0 \text{ mA} \quad I_3 = 4,5 \text{ mA}$$

L'applicazione dei principi di Kirchhoff dà luogo a vari metodi di risoluzione dei circuiti. In particolare dal 2° principio deriva il cosiddetto "metodo delle maglie" che consiste nel fissare le correnti di maglia con verso arbitrario e nello scrivere il secondo principio

$$\sum_k V_k = \sum_j R_j I_j$$

considerando col segno positivo:

- le d.d.p. dei generatori che tendono a far circolare la corrente di maglia nel verso prefissato;
- i prodotti RI per i quali il verso di I è concorde con quello della corrente di maglia

$$V_1 - V_2 = (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2$$

$$V_2 = -R_2 I_1 + (R_2 + R_3) I_2$$

Quindi

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 - V_2 & -R_2 \\ V_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}$$

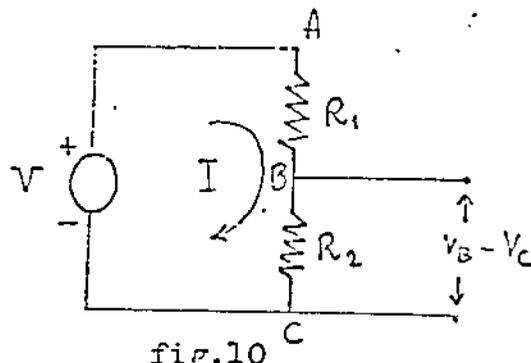
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & V_1 - V_2 \\ -R_2 & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}$$

Le intensità delle correnti che effettivamente scorrono nei singoli rami sono coincidenti con le correnti di maglia per tutti i rami non comuni a due maglie contigue; per i rami comuni esse sono date dalla somma algebrica delle intensità.

Si considerino ora, come ulteriori applicazioni delle leggi di Ohm e di Kirchhoff, i due esempi seguenti che si riferiscono a circuiti particolarmente importanti:

Esempio 1:

Determinare la d.d.p. ai capi della resistenza R_2 nel circuito in fig. 10 (partitore ohmico di tensione).



$$I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

fig.10

quindi

$$V_B - V_C = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V$$

come si vede, al variare di R_2 da 0 a ∞ , la d.d.p. fra i punti B e C varia da zero a V .

Esempio 2:

Trovare quale condizione debbono verificare R_1 , R_2 , R_3 ed R_4 nel circuito in fig. 11 (ponte di Wheatstone) perchè in R non circoli corrente

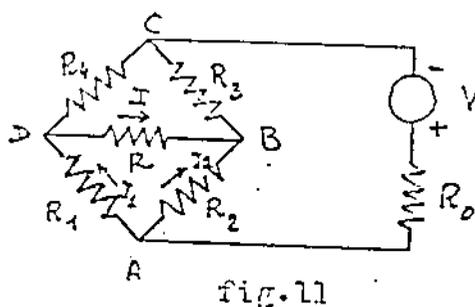


fig.11

Poichè

$$I = \frac{V_B - V_D}{R}$$

deve risultare $V_B = V_D$, ovvero

$$V_A - V_B = V_A - V_D$$

Da ciò segue che si deve avere:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2$$

Se in R non circola corrente si ha inoltre:

$$I_1 = \frac{V_C - V_A}{R_1 + R_4} \quad I_2 = \frac{V_C - V_A}{R_2 + R_3}$$

Sostituendo nella espressione precedente e semplificando si trova:

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad (17)$$

2.3 - Teorema di sovrapposizione

Se in un circuito lineare agiscono simultaneamente diversi generatori, la corrente totale prodotta in un generico ramo è la somma delle correnti che sarebbero prodotte dai singoli generatori se ciascuno di essi agisse isolatamente.

Questo teorema deriva dalla linearità delle leggi che esprimono i principi di Kirchhoff.

Esempio:

Trovare il valore dell'intensità ^{corrente} di I_3 in R_3 nel circuito di fig. 12

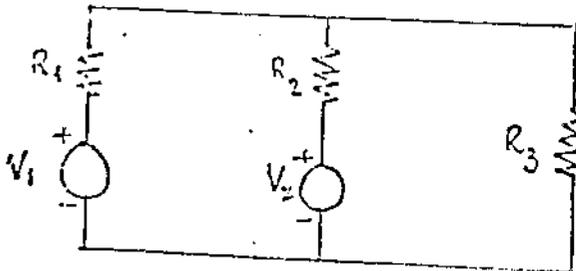


fig. 12

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 2,2 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 1 \text{ k}\Omega \\ V_1 &= 9 \text{ V} \\ V_2 &= 4,5 \text{ V} \end{aligned}$$

Lo studio della rete data si riconduce a quello delle reti (a) e (b) in fig. 13

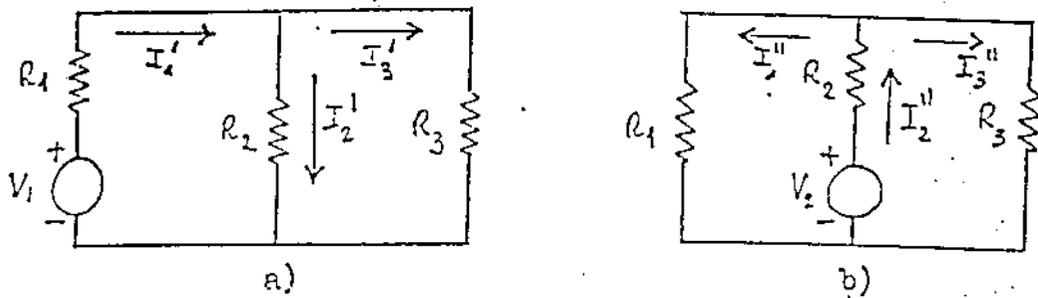


fig.13

Nella rete (a), la corrente erogata dal generatore di d.d.p.

V_1 è

$$I_4' = \frac{V_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

Avendo poi

$$R_2 I_2' = R_3 I_3'$$

e anche

$$I_4' = I_2' + I_3'$$

eliminando I_2' dalle due ultime relazioni si ottiene

$$I_3' = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_4'$$

Nella rete (b) la corrente erogata dal generatore di d.d.p.

V_2 è

$$I_2'' = \frac{V_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}$$

ed inoltre

$$I_3'' = I_2'' \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

La corrente I_3 si ottiene, per il teorema di sovrapposizione, sommando algebricamente le due correnti così trovate:

$$I_3 = I_3' + I_3''$$

Eseguendo i calcoli con i valori assegnati all'inizio si trova

$$I_2 = 4,5 \text{ mA}$$

2.4 - Teorema di reciprocità

Se un generatore in un punto A di un circuito fa passare la corrente I_A in un punto B dello stesso circuito, lo stesso generatore situato in B fa passare la corrente I_B in A.

2.5 - Circuiti equivalenti

L'analisi di circuiti elettrici può essere facilitata sostituendo interamente o in parte una rete con un circuito equivalente che, per lo scopo che ci si propone, ha le stesse caratteristiche dell'originale. Questo procedimento è stato già esemplificato nei circuiti serie e parallelo; saranno ora esposti due teoremi che consentono di schematizzare un intero circuito attivo, lineare, comunque complesso ed a struttura incognita, con un circuito di due soli elementi.

2.6 - Teorema di Thévenin

Qualsiasi circuito elettrico lineare attivo può essere schematizzato con un circuito costituito da un generatore ideale di tensione V_0 e da una resistenza R_0 in serie con esso.

Fissati due punti A e B del circuito dato, V_0 (tensione equivalente) è la d.d.p. esistente tra A e B ed R_0 (resistenza equivalente) è la resistenza che il circuito presenta tra A e B (fig 14) nelle condizioni in cui tutti i generatori ideali di tensione sono sostituiti con tratti di "corto circuito" e i generatori ideali di corrente sono aperti.

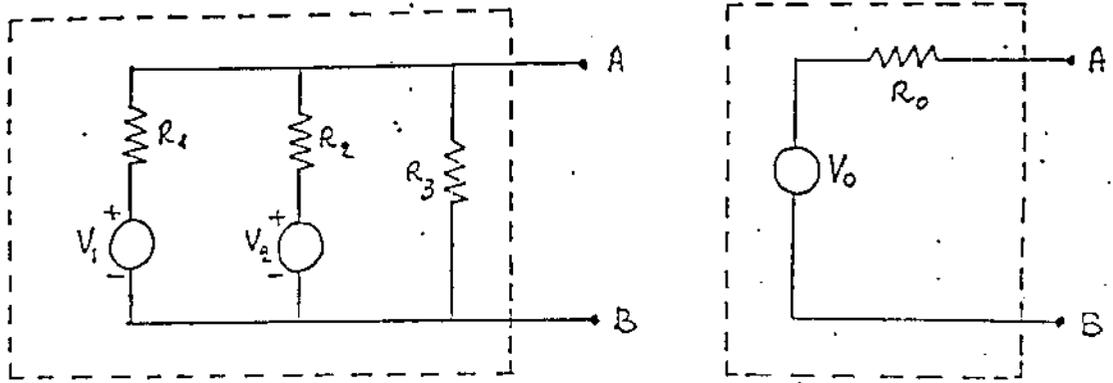


fig.14

Ne segue che se tra i punti A e B si inserisce un nuovo ramo di resistenza R , in esso passa una corrente I data dalla relazione

$$I = \frac{V_0}{R + R_0} \quad (18)$$

La resistenza equivalente R_0 si può determinare come rapporto tra la d.d.p. V_0 (detta anche "tensione a vuoto" per rimarcare il fatto che essa è la d.d.p. esistente tra A e B nel circuito originario, senza l'inserimento di alcun nuovo ramo) e la corrente I_0 (detta "corrente di corto circuito") che circola in un ramo di resistenza nulla mediante il quale A venga connesso con B.

Risulta infatti (fig 15)

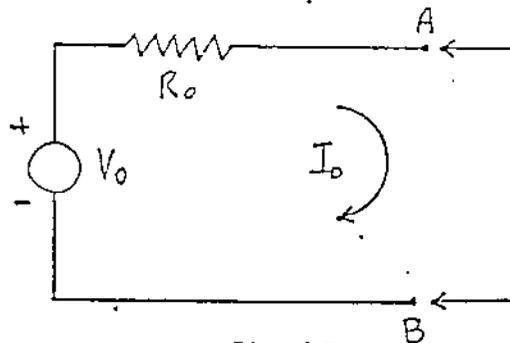


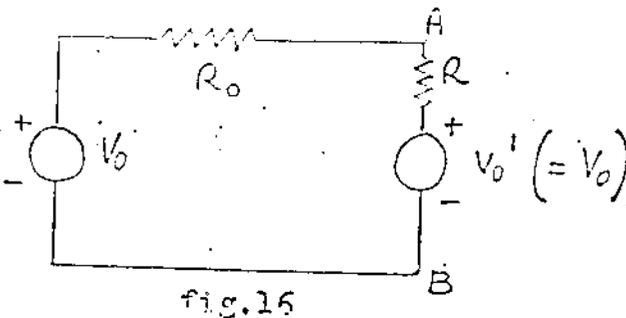
fig.15

$$I_0 = \frac{V_0}{R_0} \quad \text{da cui} \quad R_0 = \frac{V_0}{I_0}$$

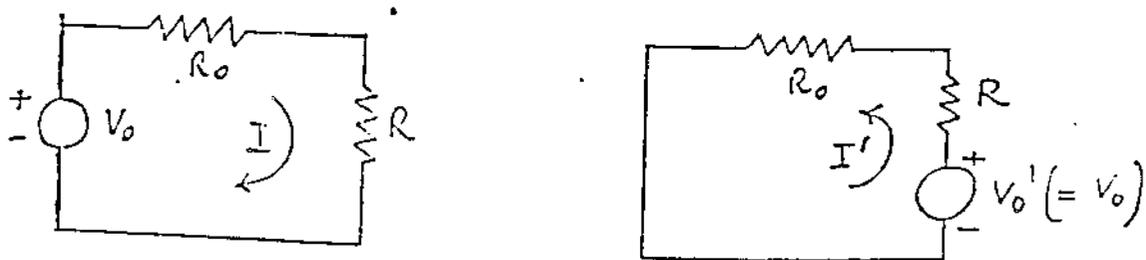
Mediante un amperometro (§ 4.2) ed un voltmetro (§ 4.3) è possibile quindi costruire, tenendo conto delle eventuali correzioni da apportare alle misure (§§ 4.2.3. e 4.3.2) il circuito equivalente di un qualsiasi circuito lineare attivo

"visto" da due determinati punti di esso. Nel caso in cui sia nota la struttura del circuito la resistenza R_0 tra i punti A e B si può anche calcolare: essa infatti coincide con la resistenza del circuito (passivo) ottenuto cortocircuitando tutti i generatori di tensione e tagliando uno dei collegamenti col circuito di ciascun generatore di corrente.

Per dimostrare la (18), che è l'espressione algebrica del teorema di Thevenin, si può ricorrere al teorema di sovrapposizione: si supponga di porre in serie alla resistenza R del ramo aggiunto tra A e B un generatore la cui tensione V_0 sia uguale a quella esistente a vuoto tra A e B (fig 16)



La corrente circolante in tali condizioni, che è nulla, deve uguagliare, per il teorema di sovrapposizione, la somma di quella, I , circolante per effetto del solo generatore di d.d.p. V_0 e di quella, I' , circolante per effetto del solo generatore di d.d.p. V_0 (fig 17)



$$0 = I + I'$$

Fissato convenzionalmente come positivo il verso orario di circolazione della corrente, poichè $I' = -\frac{V_0'}{R+R_0} = -\frac{V_0}{R+R_0}$ risulta $I = \frac{V_0}{R+R_0}$

Esempio 1 :

Dato il circuito in fig 18 a), si calcoli l'intensità I_R della corrente nella resistenza R connessa tra i punti A e B di esso (fig 18 b)

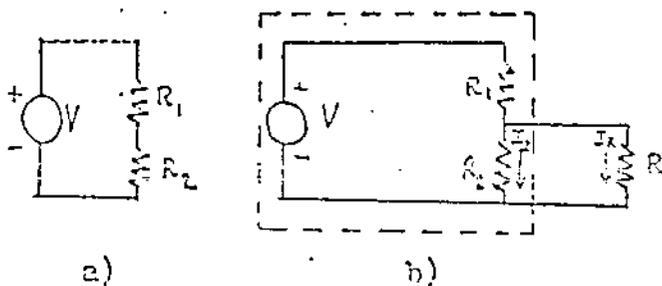


fig.18

Applicando il teorema di Thevenin si ottiene immediatamente

$$I_R = \frac{V_0}{R+R_0}$$

dove $V_0 = \frac{V}{R_1+R_2} \cdot R_2$. $\left(\frac{V}{R_1+R_2}\right)$ è l'intensità della corrente circolante nel circuito di fig a)

ed $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$. $\left(\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.

Lo stesso risultato si può ottenere, più laboriosamente, mediante l'applicazione delle leggi di Ohm e di Kirchhoff, infatti, per la legge di Ohm si ha:

$$I = \frac{V}{R_1 + \frac{R \cdot R_2}{R+R_2}}$$

e per i principi di Kirchhoff

$$\begin{aligned} I_2 R_2 &= I_R R \\ I &= I_R + I_2 \end{aligned}$$

da cui

$$I = I_R \left(1 + \frac{R}{R_2}\right) = I_R \frac{R_2+R}{R_2}$$

Confrontando le due espressioni ottenute per la I si ha

$$I_R \frac{R_2 + R}{R_2} = \frac{V}{R_1 + \frac{R R_2}{R + R_2}}$$

da cui

$$I_R = \frac{V \frac{R_2}{R + R_2}}{R_1 + \frac{R \cdot R_2}{R + R_2}} = \frac{V R_2}{R_1(R + R_2) + R R_2} = \frac{V R_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{V \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

esponendo

$$V_0 = V \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

si ritrova

$$I_R = \frac{V_0}{R + R_0}$$

Esempio 2:

Dato il circuito in fig 19 (ponte di Wheatstone) si determini l'intensità I_5 della corrente che circola nella resistenza R_5 del ramo aggiunto tra A e B.

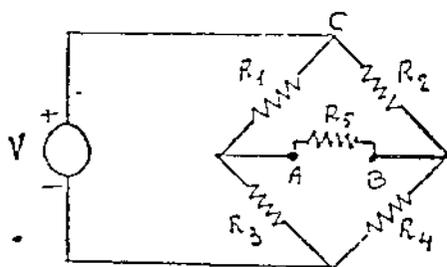


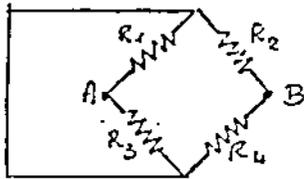
fig.19

Per il teorema di Thevenin

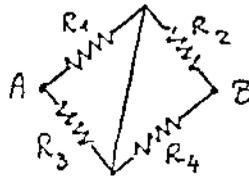
$$I_5 = \frac{V_0}{R_0 + R_5}$$

Si tratta di determinare R_0 e V_0 :

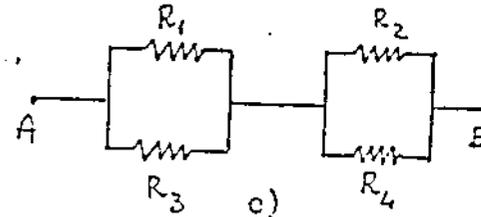
Per trovare R_0 conviene rappresentare il circuito dato in maniera diversa (v., successivamente, le fig 20 a, b, d)



a)



b)



c)

fig. 20

evidenziando in tal modo che R_0 è

$$R_0 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

Per trovare V_0 , che è uguale alla d.d.p. $V_A - V_B$ esistente tra A e B nel circuito originario, si osserva che essa uguaglia la differenza tra $V_A - V_C$ e $V_B - V_C$. Dette quindi I_1 e I_2 le correnti in R_1 (ed R_3) e in R_2 (ed R_4) si ha

$$V_0 = I_1 R_1 - I_2 R_2 = \frac{V}{R_1 + R_3} R_1 - \frac{V}{R_2 + R_4} R_2$$

2.7: - Teorema di Norton

Qualsiasi circuito elettrico lineare attivo può essere schematizzato con un circuito costituito da un generatore di corrente I_0 e da una resistenza R_0 in parallelo ad esso.

Fissati due punti A e B del circuito dato, I_0 (corrente equivalente) è la corrente di corto circuito tra A e B ed R_0 è la resistenza equivalente già definita nel teorema di Thevenin (fig 21)

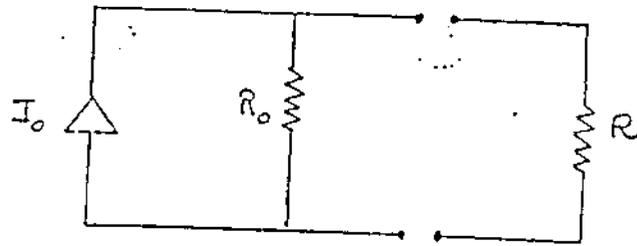


fig. 21

Questa seconda forma di circuito equivalente, utile quando, come per es. nei circuiti a transistori, ha interesse considerare generatori di corrente, è coerente con la schematizzazione di Thevenin.

Infatti, nel circuito di fig. 21, deve essere (con ovvi simboli)

$$I_{R_0} R_0 = I_R R$$

da cui

$$I_{R_0} = I_R \frac{R}{R_0}$$

Essendo

$$I_0 = I_{R_0} + I_R$$

si ottiene quindi

$$I_0 = I_R \left(1 + \frac{R}{R_0} \right)$$

dalla quale, indicando ancora con V_0 la tensione equivalente secondo Thevenin, si ricava

$$V_0 = I_0 R_0 = I_R (R + R_0) \quad (19)$$

da cui

$$I_R = \frac{V_0}{R + R_0}$$

come afferma il teorema di Thevenin.

Dalla (19) si può ricavare

$$I_R = I_0 \frac{R_0}{R + R_0}$$

e quindi
$$V_{R_i} = I_R \cdot R = I_0 \frac{R_0 \cdot R}{R + R_0}$$

che è l'espressione algebrica del teorema di Norton e che si può anche scrivere

$$V_R = V_0 \frac{R}{R + R_0}$$

2.6 - Trasferimento di potenza da un generatore ad un carico

Dato il circuito in fig 22

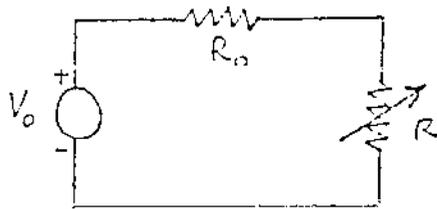


fig. 22

dove R_0 è compresa la resistenza interna del generatore ed R rappresenta la resistenza di carico, la potenza W dissipata dall'intero circuito è

$$W = V_0 \cdot \frac{V_0}{R + R_0} = \frac{V_0^2}{R + R_0}$$

mentre la potenza W_u effettivamente utilizzata è quella dissipata dal carico R :

$$W_u = \left(\frac{V_0}{R + R_0} \right)^2 \cdot R = \frac{V_0^2 \cdot R}{(R + R_0)^2}$$

W_u è quindi funzione della resistenza di carico R ed in particolare presenta un massimo per $R = R_0$ che è uguale alla metà della potenza dissipata in totale. Infatti

$$\frac{\partial W_u}{\partial R} = V_0^2 \frac{R_0 - R}{(R_0 + R)^3}$$

La condizione $\frac{\partial W_u}{\partial R} = 0$ comporta $R = R_0$

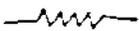
per cui

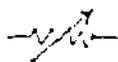
$$(W_u)_{\text{MAX}} = \frac{V_0^2}{4R_0} = \frac{1}{2} W_{(R=R_0)} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{2R_0}$$

3 - Elementi reali di circuito elettrico

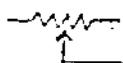
3.I - Resistori

Un resistore è un elemento di circuito dotato di uno specifico valore di resistenza. Questi valori vanno da pochi ohm (Ω) o frazione di ohm fino a migliaia di ohm ($k\Omega$) e milioni di ohm ($M\Omega$). I simboli convenzionali usati per una resistenza sono i seguenti:


resistenza
fissa



resistenza
variabili



potenziometro

fig. 23

reostato

I resistori possono essere costruiti in modo differente:

resistori a filo

per un filo conduttore vale la seguente legge (2^a legge di Ohm)

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

dove ρ è una costante caratteristica della sostanza di cui è fatto il filo, che prende il nome di resistenza specifica o resistività, l è la lunghezza e S la sezione del filo.

Avvolgendo in spire il filo di lunghezza l e sezione S costante è possibile realizzare delle resistenze ad alta precisione purchè la sostanza usata abbia una ρ abbastanza indipendente dalla temperatura; materiali molto usati sono manganese, costantana, argentana.

resistori a pellicola

sono ottenuti depositando una sottile pellicola metallica oppure un sottile strato di granuli di carbone su un supporto cilindrico isolante. La resistenza dipende dallo spessore della pellicola. Poichè è difficile depositare pellicole di spessore rigorosamente costante questo tipo di resistore non

è molto preciso, ma presenta il vantaggio di non risentire di effetti capacitivi ed induttivi presenti invece nei resistori a filo.

resistori ad impasto

sono ottenuti comprimendo il carbone in granuli in forma di cilindro insieme con altre sostanze isolanti. Si possono ottenere in questo modo resistenze molto elevate

Sulla superficie esterna dei resistori a pellicola e ad impasto vengono di solito tracciate bande colorate che permettono di conoscere il valore in ohm della resistenza mediante un "codice dei colori" (v. fig 24).

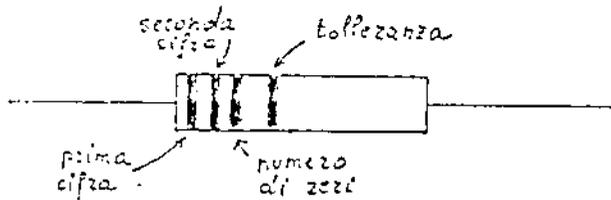


fig. 24

colore	numero
Nero	0
Marrone	1
Rosso	2
Arancio	3
Giallo	4
Verde	5
Azzurro	6
Viola	7
Grigio	8
Bianco	9

La banda più vicina all'estremità del resistore rappresenta la prima cifra significativa, la seconda banda la seconda cifra significativa, e la terza banda il numero degli zeri da aggiungere alle prime due cifre significative secondo il codice sopra citato. Per esempio un resistore le cui bande han-

no in ordine i colori giallo, violetto, e arancio, ha una resistenza di 47.000Ω .

Resistenze con valori compresi tra 1 e 10Ω sono indicate con una terza banda dorata mentre una terza banda color argento indica resistenze comprese tra $0,1$ e 1Ω .

La quarta banda, che può aver colore marrone, rosso, oro o argento, indica la tolleranza sul valore indicato dalle prime tre bande. Il colore marrone indica una tolleranza di $\pm 1\%$; il colore rosso una tolleranza di $\pm 2\%$; il colore oro una tolleranza di $\pm 5\%$, l'argento di $\pm 10\%$.

Se la quarta banda è assente, la tolleranza è del $\pm 20\%$.

Indicando le bande con le lettere a,b,c,d, come in figura 25

si può scrivere allora
$$\begin{cases} R = (10a + b) \cdot 10^c \\ \Delta R = \frac{1}{100} \cdot d \cdot R \end{cases}$$

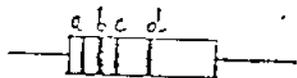


fig. 25

Un'eventuale quinta banda indica la precisione di R dopo un certo numero di ore funzionamento; per un tipo di resistori molto diffuso la precisione ^{da 1000 a 10000 ore} viene indicata nel modo seguente:

marrone	1.0%
rosso	0.1%
arancio	0.01%
giallo	0.001%

Su alcuni resistori è indicato anche il valore della capacità del resistore stesso.

Le dimensioni del resistore sono legate alla potenza massima che è capace di dissipare senza un apprezzabile aumento di temperatura causato dall'effetto Joule. Valori tipici di questa potenza massima sono $1 W$, $1/2 W$ e $1/4 W$, ai quali corrispondono ovviamente valori decrescenti delle dimensioni del resistore.

Può essere utile inserire in un circuito elementi con valori di resistenza variabili. Si parla allora di "reostati", che

hanno due terminali, e di "potenziometri" con tre terminali (v. fig 23).

Nella misura di resistenze e nel loro impiego bisogna tener conto di due possibili fonti di errore:

- resistenza delle connessioni e dei contatti, che assume importanza relativamente a resistenze basse, e cattivo isolamento dei terminali, che può dar luogo a fenomeni di dispersione perturbativi nel caso in cui si vogliano realizzare resistenze elevate.
- capacità non infinita e induttanza non nulla del resistore, le quali tuttavia, come già detto, non vengono per ora prese in considerazione.

3.2 - Condensatori

I condensatori possono avere capacità fissa o variabile. Quelli a capacità fissa più diffusamente usati sono:

- condensatori a carta o a mica, costituiti da due sottili fogli metallici separati da un sottile strato di isolante, o dielettrico, come la carta o la mica. Questo insieme viene arrotolato in modo da fargli assumere forma cilindrica, ricoperto di isolante e dotato, per le connessioni, di due fili metallici collegati ciascuno con una delle armature. Per aumentare la capacità il dielettrico deve essere ^{il} più sottile possibile; in tal modo però si riduce la massima tensione che può essere applicata senza che l'isolante sia danneggiato dall'intenso campo elettrico. Inoltre, il piccolo spessore e la grande superficie dell'isolante aumentano la "resistenza di perdita" tra le armature.

I condensatori a dielettrico di carta o di mica sono disponibili con capacità variabili da 0,001 a 1 μ F e possono essere usati in circuiti in cui la tensione massima è dell'ordine delle centinaia di V.

- condensatori a ceramica ed a film di plastica, realizzati depositando le armature in forma di sottile strato metallico direttamente sul dielettrico. I dielettrici di plastica hanno resistività molto alta, cioè resistenza di perdita molto piccola. L'elevata costante dielettrica di molte ceramiche consente di ottenere ^{notevoli} capacità con piccole dimensioni del condensatore.

- condensatori elettrolitici, costituiti da un foglio metallico ossidato immerso in una pasta o soluzione conduttrice. Il sottile strato di ossido è il dielettrico tra il foglio metallico e la soluzione, e proprio il suo piccolo spessore consente di raggiungere elevati valori di capacità (da 1 a 10³ μ F).

Ettavia la tensione applicata non può superare pochi V, ed il foglio metallico non deve mai assumere potenziale negativo rispetto alla soluzione, altrimenti lo strato di ossido viene danneggiato da effetti elettrolitici.

I condensatori a capacità variabile sono di solito costituiti da due insiemi di strati metallici alternati, uno fisso e l'altro rotante intorno ad un asse in modo da poter variare l'area della superficie affacciata degli strati. Poichè il dielettrico è l'aria è necessario lasciare tra le armature una certa distanza affinchè ruotando non si tocchino. Il valore massimo della capacità ottenibile non supera all'incirca i $500 \mu\text{F}$. Il valore minimo della capacità, quando gli strati non sono sovrapposti, si aggira intorno a $10 \mu\text{F}$.

I condensatori variabili "trimmer" usano un dielettrico di mica; vengono di solito regolati per mezzo di un giravite e sono comunemente usati quando la capacità deve essere variata solo raramente. I valori di capacità ottenibili sono pressappoco gli stessi che per i condensatori variabili che hanno come dielettrico l'aria.

I simboli convenzionalmente usati per i condensatori sono rappresentati in fig 26

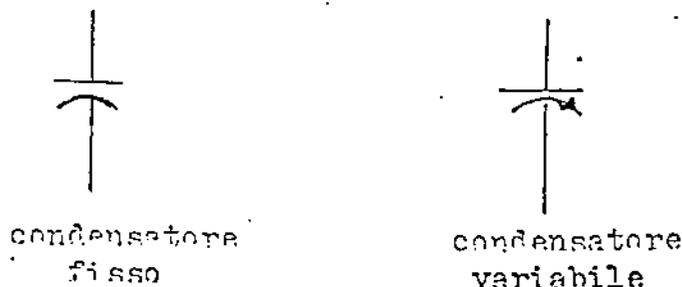


fig. 26

Il segno curvo rappresenta il terminale negativo nel caso di condensatori elettrolitici e l'armatura esterna nei condensatori a carta o a mica; questa convenzione può essere utile per commettere correttamente i condensatori, anche se per i condensatori a carta e a mica la polarità della tensione applicata è indifferente.

3.3 - Induttori

Sono costituiti da molte spire di filo conduttore, ciascuna isolata dalle adiacenti, avvolte su un supporto. Circuiti elettronici ad alta frequenza impiegano spesso in-
 fuori ^{le cui} induttanze sono ⁻⁶ dell'ordine di 10^{-6} H che possono essere realizzate dall'avvolgimento di poche spire su un supporto del diametro di circa 1 cm. Qualche decina di spire dà valori di induttanza intorno a 10^{-3} H. Induttanze fino a parecchie centinaia di henry, da usarsi a basse frequenze, sono ottenute avvolgendo molte centinaia di spire su un nucleo di materiale ferromagnetico, in particolare ferro. Questo nucleo è sovente laminato allo scopo di interrompere le correnti indotte da variazioni del flusso di induzione magnetica; questo accorgimento riduce le perdite per effetto Joule. Per lo stesso motivo, - e cioè per diminuire le perdite causate da correnti parassite, per frequenze elevate vengono usati induttori con nucleo di ferrite, che è un materiale ferromagnetico ad alta resistività.

Gli induttori a ferrite non sono usati a basse frequenze perchè le proprietà magnetiche di questo materiale non sono altrettanto favorevoli quanto quelle del ferro.

I simboli convenzionalmente usati per gli induttori sono rappresentati in fig 27

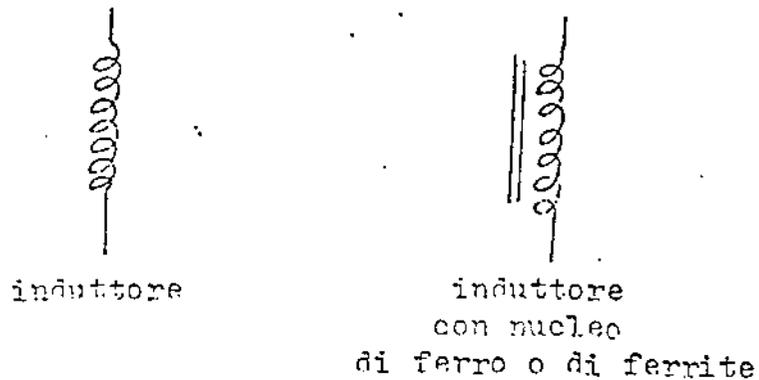


fig. 27

Si possono ottenere induttanze variabili muovendo una parte dell'avvolgimento rispetto all'altra, ma componenti di questo tipo sono raramente usati; la maggior parte degli induttori sono a capacità fissa.

3.4/5- Generatori reali

Un generatore reale di tensione può essere schematizzato mediante la serie di un generatore ideale di tensione V_0 e di un resistore di resistenza e che è la resistenza interna del generatore (fig 28a).

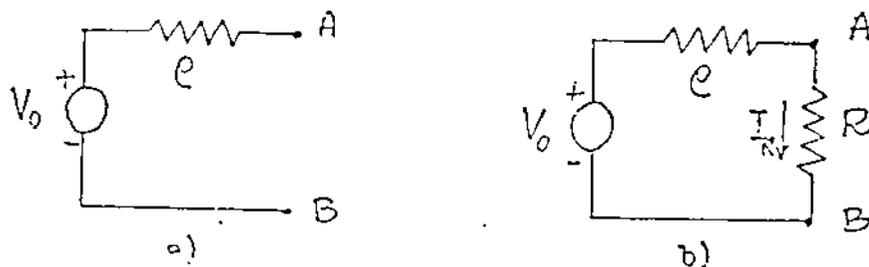


fig. 28

A differenza di quanto accade nel caso del generatore ideale di tensione ($\oint l$), la d.d.p. V_R ai capi A, B del generatore reale quando tra essi è inserito un carico R (fig 28 b) dipende dal carico stesso; se I_R è la corrente che circola a carico R inserito e V_0 la d.d.p. tra i capi del generatore a circuito aperto si ha infatti

$$I_R = \frac{V_0}{\rho + R} \quad ; \quad V_R = I_R \cdot R = V_0 \frac{R}{\rho + R} = V_0 \frac{1}{\frac{\rho}{R} + 1}$$

da cui si vede che un generatore reale di tensione approssima un generatore ideale per il quale $V = V_0 = \text{cost.}$ tanto meglio quanto più la resistenza di carico R è grande rispetto alla resistenza interna ρ .

Gli andamenti di V in funzione di I_R , di $\frac{\rho}{R}$ e di R sono rappresentati nelle figt 29 a), b), c).

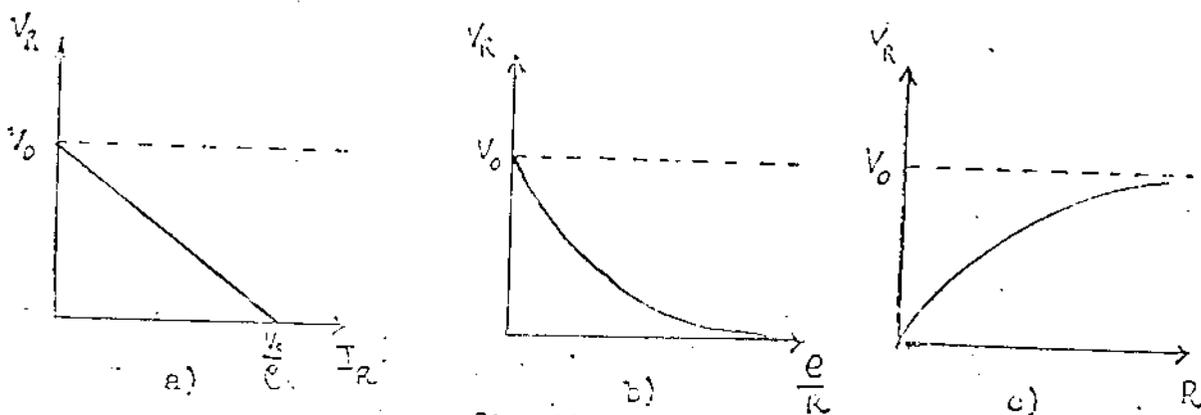


fig. 29

Si definisce forza elettromotrice (f.e.m.) di un generatore reale di tensione la d.d.p. presente tra i capi del generatore a circuito aperto (nella simbologia qui adottata, V_0).

I generatori reali di tensione sono sistemi mediante i quali si realizza la trasformazione in energia elettrica di energia di altra natura (meccanica, chimica, termica, ecc).

La pila costituisce un esempio di generatore in cui energia chimica viene trasformata in energia elettrica; il simbolo convenzionalmente adottato per la pila è rappresentato in fig 30 / in cui il tratto più lungo e sottile rappresenta il polo positivo e quello più corto e spesso il polo negativo.



fig. 30

Un generatore reale di corrente può essere schematizzato mediante il parallelo di un generatore ^{ideale} di corrente e di una resistenza e che è la resistenza interna del generatore (fig 31a)

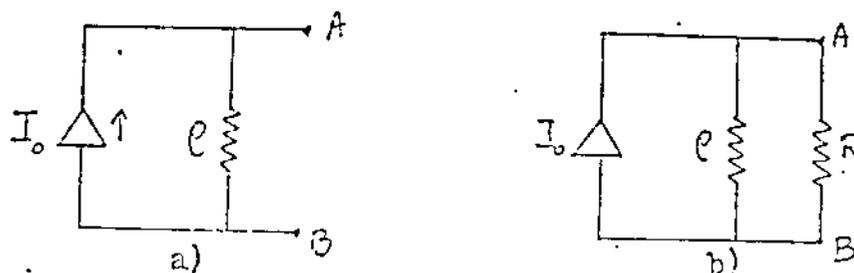


fig. 31.

L'intensità della corrente che un generatore reale di corrente è capace di far circolare in una resistenza R inserita tra i suoi terminali (fig 31 b) dipende da R . Dette I_e e I_R le correnti in e ed R si ha infatti

$$I_0 = I_e + I_R$$

$$I_e \cdot e = I_R \cdot R$$

da cui

$$I_R = I_0 \frac{e}{e+R} = I_0 \frac{1}{1 + \frac{R}{e}}$$

Come si vede, un generatore reale di corrente approssima un generatore ideale (per il quale $I_R = I_0 = \text{cost.}$) tanto meglio quanto più la resistenza interna e è grande rispetto alla resistenza di carico R .

Gli andamenti di I_R in funzione di V_R (d.d.p. ai capi di R), di $\frac{R}{e}$ e di R sono rappresentati nelle fig 32 a), b) e c).

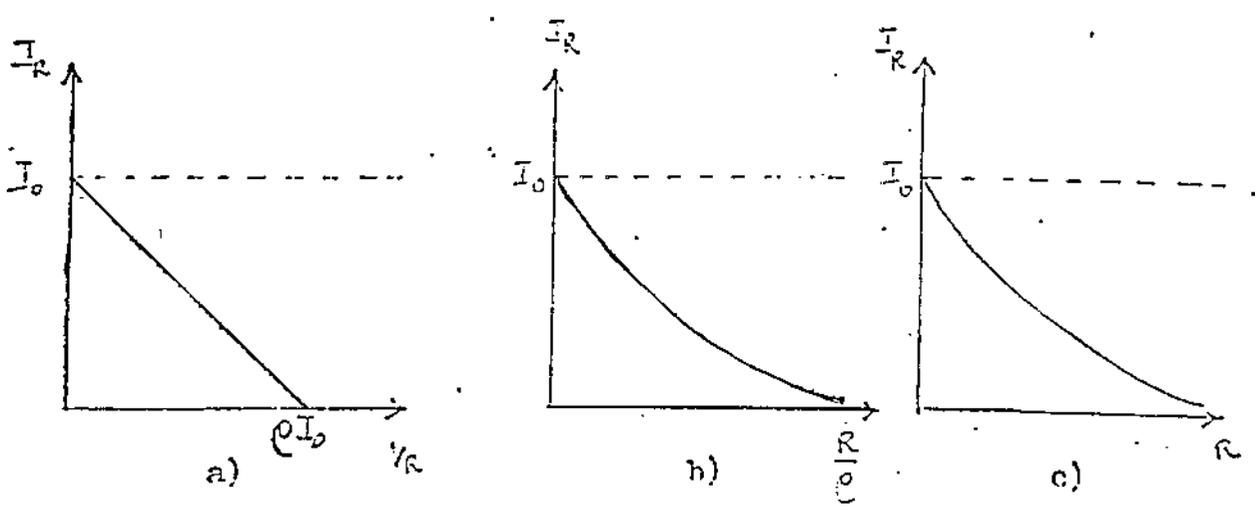


fig.32

4 - Misure in corrente continua

4.1 - Moto dell'equipaggio mobile di uno strumento di misura

L'equipaggio mobile di uno strumento di misura si può considerare un corpo rigido girevole intorno a un asse verticale fisso, per cui il suo moto è descritto dall'equazione

$$J\ddot{\theta} = M \quad (20)$$

dove:

J è il momento d'inerzia dell'equipaggio mobile rispetto all'asse di rotazione

$\ddot{\theta}$ è l'accelerazione angolare, essendo θ l'angolo di rotazione dalla posizione di equilibrio

M è il momento risultante, rispetto all'asse di rotazione, delle forze agenti.

Tale momento risultante ha tre componenti:

- I) momento della coppia deviatrice, che in uno strumento per misura di corrente è funzione dell'intensità I della corrente da misurare: $f(I)$

2) momento della coppia elastica di richiamo che tende a far tornare l'equipaggio mobile nella posizione di equilibrio: $-C\Theta$, con C costante

3) momento della coppia di forze che schematizza lo smorzamento sia meccanico (da parte del mezzo in cui si muove l'equipaggio mobile), sia elettromagnetico (24.2.6b); essendo proporzionale alla velocità angolare tale momento può scriversi $-\beta\dot{\Theta}$, con β costante.

La (20) si può quindi scrivere

$$J\ddot{\Theta} + \beta\dot{\Theta} + C\Theta = f(I) \quad (21)$$

In condizioni di equilibrio

$$C\Theta_0 = f(I) \quad \text{da cui} \quad \Theta_0 = \frac{1}{C} f(I)$$

quindi, in condizioni di equilibrio, l'angolo Θ_0 di rotazione dell'equipaggio mobile è proporzionale ad $f(I)$.

Se all'equipaggio mobile viene connesso un indice con scala, gli spostamenti dell'indice sulla scala dipendono da I tramite la $f(I)$, perciò si usano scale lineari se $f(I)$ è lineare, quadratiche se è quadratica. La forma della $f(I)$ dipende ovviamente dalle caratteristiche costruttive dello strumento.

Si tratta ora di studiare le modalità di raggiungimento della posizione di equilibrio da parte dell'equipaggio mobile quando esso sia sollecitato a muoversi dalla posizione per cui $\Theta = 0$ per effetto di una coppia di momento $f(I)$. Per far questo si determinano le soluzioni della con le condizioni $I=0$ per $t \leq 0$, $I=\text{cost}$ per $t > 0$.

L'integrale generale della (21) è del tipo

$$\Theta(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{1}{C} f(I) \quad (22)$$

dove α_1 ed α_2 sono le soluzioni dell'equazione omogenea associata della (21)

$$J\alpha^2 + \beta\alpha + C = 0 \quad (23)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4JC}}{2J}$$

e le costanti C_1 e C_2 devono essere determinate in modo da soddisfare le condizioni iniziali.

L'equipaggio mobile raggiunge la posizione di equilibrio con diversi tipi di moto a seconda che il discriminante Δ della (23) sia ≤ 0 .

Ip- $\Delta < 0$ ($\beta^2 < 4JC$; moto oscillatorio smorzato)

α_1, α_2 sono complesse coniugate; avendo posto

$$a = \frac{\beta}{2J} \quad ; \quad b = \sqrt{\frac{C}{J}} = \frac{\beta^2}{4J^2}$$

$$\Theta_0 = \frac{1}{C} f(I) \quad ; \quad j = \sqrt{-1}$$

α_1 ed α_2 si esprimono come $-a \pm jb$, e

la soluzione (22) può quindi essere scritta nella forma

$$\Theta(t) = e^{-at} (C_1 e^{jbt} + C_2 e^{-jbt}) + \Theta_0 \quad (24)$$

ove, affinché Θ sia reale, occorre che C_1 e C_2 siano complesse coniugate. Ponendo quindi $C_1 = D e^{j\varphi}$, $C_2 = D e^{-j\varphi}$ e sostituendo nella (24) si ha.

$$\Theta(t) = D e^{-at} [e^{j(bt+\varphi)} + e^{-j(bt+\varphi)}] = 2D e^{-at} \cos(bt+\varphi)$$

che si può scrivere

$$\Theta(t) = 2D e^{-at} \sin(bt+\gamma) \quad (25)$$

avendo posto

$$\gamma = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

Imponendo le condizioni iniziali per posizione e velocità angolare dell'equipaggio mobile, per $t=0$.

$$\Theta = 0 \quad \dot{\Theta} = 0 \quad (26)$$

si ottiene sostituendo nella (25) e nella sua derivata

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$D = -\mathcal{D}_0 \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2}}$$

In definitiva la (25) diventa

$$\Theta(t) = \mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_0 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} e^{-at} \sin(bt + \gamma) \quad (27)$$

Il moto descritto dall'equazione (27) è un moto pseudoperiodico cioè un moto oscillatorio la cui ampiezza $\mathcal{D}_0 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} e^{-at}$ si va smorzando esponenzialmente. Lo pseudoperiodo è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{J} - \frac{\beta^2}{2J^2}}} \quad (28)$$

Nel caso in cui le resistenze passive siano trascurabili

$$T = T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}} \quad (29)$$

Se, una volta che l'equipaggio mobile si è fermato nella posizione di equilibrio, cessa la sollecitazione, cioè si annulla il momento $f(I)$, l'equipaggio ^{nella posizione per cui $\Theta=0$} ritorna attraverso una serie di oscillazioni smorzate secondo l'equazione

$$\Theta(t) = \mathcal{D}_0 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} e^{-at} \sin(bt + \gamma) \quad (30)$$

Una grandezza caratteristica del moto pseudoperiodico è il decremento logaritmico

$$\delta = aT = \frac{\beta T}{2J} \quad (31)$$

che è utile considerare perchè è più facilmente misurabile che non β e J .

Tenendo conto delle (26), (29) e (31), la (27) e la (30) diventano

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 - \frac{\vartheta_0}{T_0} e^{-\frac{\delta t}{T}} \sin\left(\frac{\varrho\pi}{T}t + \arctg \frac{\varrho\pi}{\delta}\right) \quad (32)$$

$$\vartheta(t) = \frac{\vartheta_0}{T_0} e^{-\frac{\delta t}{T}} \sin\left(\frac{\varrho\pi}{T}t + \arctg \frac{\varrho\pi}{\delta}\right) \quad (33)$$

2° - $\Delta > 0$ ($\beta^2 > 4\mathcal{C}$; moto aperiodico)

La soluzione è ancora del tipo (22) ma α_1 e α_2 sono reali ed entrambe negative. Il moto approssimativamente esponenziale con cui ϑ tende a $\frac{\vartheta_0}{T_0}$ è tanto più lento quanto più $\beta^2 > 4\mathcal{C}$.

In queste condizioni perciò le misure possono essere inutilmente lunghe e soprattutto si rende possibile a causa degli attriti (tra solidi) l'arresto dell'equipaggio mobile in una posizione diversa da ϑ_0 .

3° - $\Delta = 0$ ($\beta^2 = 4\mathcal{C} = \beta_c^2$; moto aperiodico critico)

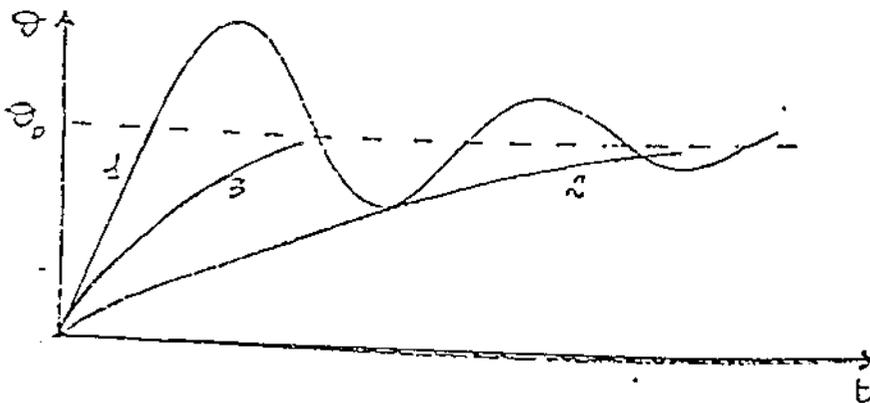
α_1 ed α_2 sono reali e coincidenti. La soluzione della equazione (21) è perciò del tipo

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + e^{-\frac{\beta}{2\mathcal{C}}t} (c_1 + c_2 t) \quad (34)$$

ed imponendo le condizioni iniziali (26) si ottiene

$$\vartheta = \vartheta_0 - \vartheta_0 e^{-\frac{\beta}{2\mathcal{C}}t} \left(1 + \frac{\beta}{2\mathcal{C}}t\right) \quad (35)$$

In Fig. 33 è rappresentato l'andamento di ϑ in funzione di t nei tre casi discussi.



Come risulta dalla forma della soluzione dell'equazione del moto nei tre casi discussi, l'equipaggio mobile tende alla posizione di equilibrio, raggiungendola teoricamente per $t = \infty$. In pratica, come anche nel caso di molti altri strumenti di misura, si considera tale posizione raggiunta quando $|\vartheta - \vartheta_0|$ è trascurabile rispetto all'errore di lettura che si commette su ϑ .

Con questa precisazione si può intendere il grafico di fig. 34 che rappresenta il tempo impiegato dall'equipaggio mobile per raggiungere la posizione di equilibrio in funzione della costante di smorzamento

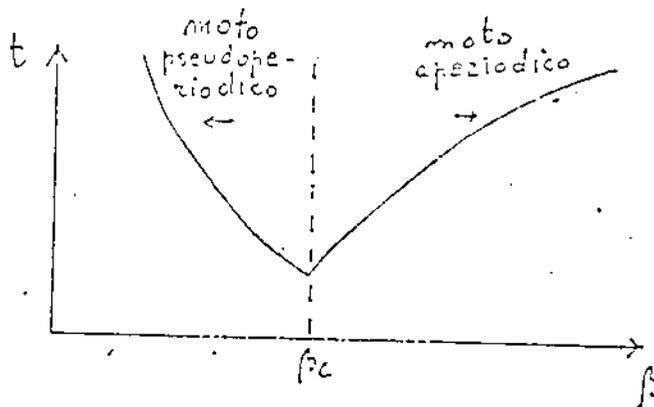


fig. 34

Come si vede il valore minimo di tale tempo si ottiene in condizioni di moto aperiodico critico, per il valore β_c della costante di smorzamento, detto "smorzamento critico". I valori delle costanti T, β, C vengono determinati dalle caratteristiche costruttive dello strumento.

4.2 - Misure di intensità di corrente

4.2.I - Amperometro - Considerazioni generali

Un amperometro è uno strumento tarato con il quale si eseguono misure di intensità di corrente. Esso è caratterizzato dalla portata, dalla resistenza interna e dalla classe:

la portata è l'intensità di corrente massima misurabile, cioè quella per la quale l'indice si porta al fondo scala;

la resistenza interna è la resistenza elettrica complessivamente presentata dallo strumento;

la classe è un numero che convenzionalmente indica la sensibilità di lettura consentita dall'amperometro, ed è pari a 100 volte l'errore relativo $\frac{\Delta I}{I_{f.s.}}$ sulla corrente di fondo scala.

Se ad esempio un amperometro è di classe 2, l'errore relativo sulla corrente di fondo scala è del 2%, e l'errore assoluto di lettura su quella scala è pari al 2% della corrente di fondo scala.

Nota quindi la classe, si può trovare l'errore assoluto di lettura; infatti dalla definizione

$$\text{classe} = 100 \cdot \frac{\Delta I}{I_{f.s.}}$$

si ricava

$$\Delta I = \frac{\text{classe}}{100} \cdot I_{f.s.}$$

Un'altra grandezza che può essere usata per caratterizzare un amperometro è il consumo specifico P_A , definito come il prodotto della resistenza interna R_A per la corrente di fondo scala $I_{f.s.}$:

$$P_A = R_A \cdot I_{f.s.} = R_A \frac{I_{f.s.}^2}{I_{f.s.}} = \frac{W_{MAX}}{I_{f.s.}}$$

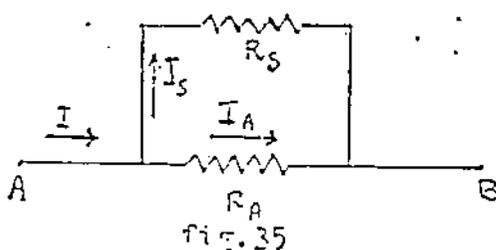
Come si vede, il consumo specifico è il rapporto tra la potenza massima dissipata dalla resistenza interna dello strumento e la corrente di f.s. .

4.2.2 - Variazioni della portata di un amperometro. Shunt

E' possibile misurare con un amperometro correnti di intensità maggiore di quella di f.s. inserendo in parallelo alla resistenza interna R_A adatte resistenze.

Tali resistenze, dette resistenze di shunt, sono di solito predisposte all'interno dello strumento e la loro utilizzazione si ottiene mediante un opportuno inserimento dei puntali oppure mediante il regolaggio di comandi situati sul pannello frontale dello strumento stesso.

La fig 35 mostra una resistenza di shunt R_S connessa in parallelo a R_A ; con ovvi simboli



$$I = I_S + I_A$$

$$I_A R_A = I_S R_S$$

da cui
$$I_A = I \frac{R_S}{R_A + R_S}$$

Quindi
$$I_A = \frac{1}{m} I \quad \text{se} \quad R_S = \frac{1}{m-1} R_A$$

Perciò si ottiene I moltiplicando per n.l'intensità I_A della corrente misurata dall'amperometro.

Di solito si danno ad n valori pari a potenze di 10 così da rendere comoda la lettura sulla scala in corrispondenza alla portata scelta.

A titolo di esempio è riportata in fig.35bis il circuito interno di uno strumento di uso comune con le boccole per l'inserimento dei puntali e le indicazioni delle diverse portate disponibili.

CIRCUITO SEMPLIFICATO DELL'AMPEROMETRO IN C.C.

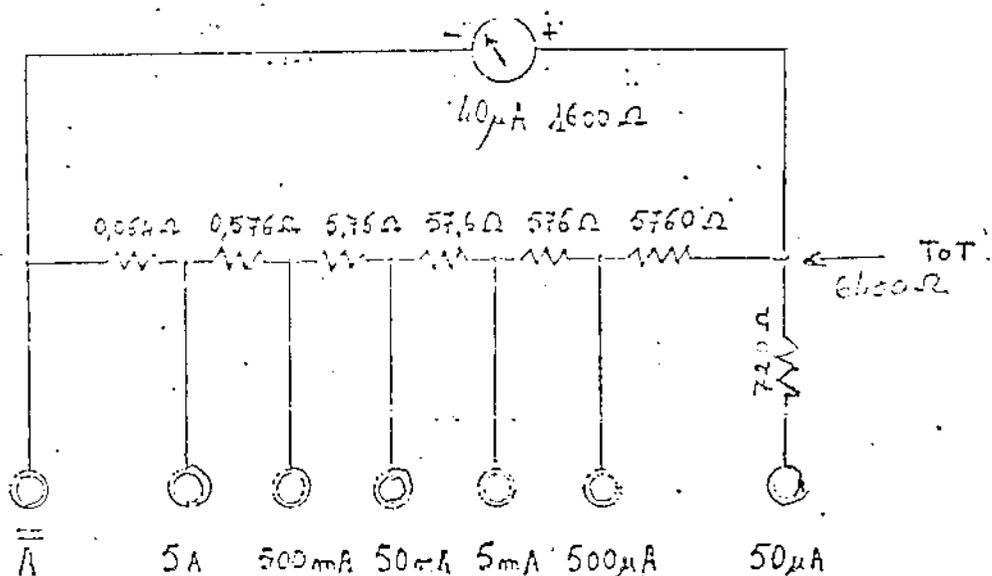


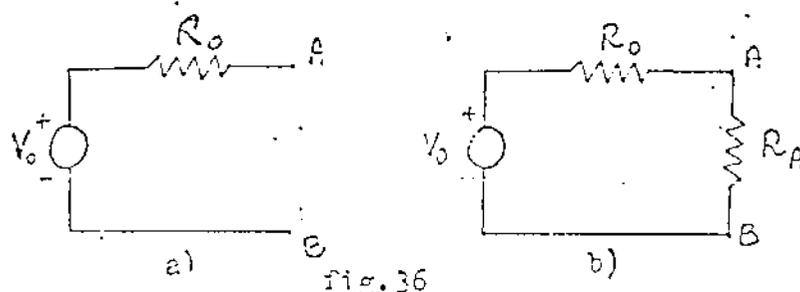
fig.35bis

4.2.3 - Misure con l'amperometro. Perturbazione da esso apportata

Una misura di intensità di corrente con l'amperometro si esegue interrompendo il ramo in cui scorre la corrente da misurare e richiudendolo mediante lo strumento. Nel far questo si modifica però il circuito originario perchè vi si inserisce la resistenza interna R_A dell'amperometro; al

fine di eseguire una corretta misura di intensità di corrente è necessario valutare l'entità della perturbazione arrecata onde poter eseguire l'eventuale correzione.

In fig 36 a) e b) è riportata la schematizzazione secondo Thevenin del circuito in studio, prima e dopo l'inserimento dell'amperometro.



La corrente da misurare ha intensità I

$$I = \frac{V_0}{R_0}$$

L'intensità I_A letta sull'amperometro è

$$I_A = \frac{V_0}{R_0 + R_A} = \frac{\frac{V_0}{R_0}}{1 + \frac{R_A}{R_0}} = \frac{I}{1 + \frac{R_A}{R_0}} \quad (36)$$

quindi

Come si vede l'entità della correzione da apportare al valore letto I_A dipende dal rapporto $\frac{R_A}{R_0}$ tra la resistenza interna R_A dello strumento e la resistenza equivalente R_0 del circuito. La correzione è da ritenersi trascurabile se $\frac{R_A}{R_0}$ è molto minore dell'errore percentuale commesso nella lettura di I_A , infatti dalla (36) si ottiene

$$\frac{R_A}{R_0} = \frac{I - I_A}{I_A}$$

Il valore di R_A è indicato nel libretto di istruzioni che di solito corredo l'amperometro; quello di R_0 si può calcolare o misurare (c. 4.4).

Se si vuole prescindere dalla conoscenza di R_0 , il valore vero I dell'intensità di corrente incognita si può ricavare eseguendone successivamente la misura su due f.s. differenti R_A' , R_A'' (fig. 37) con i risultati I_A' , I_A'' .

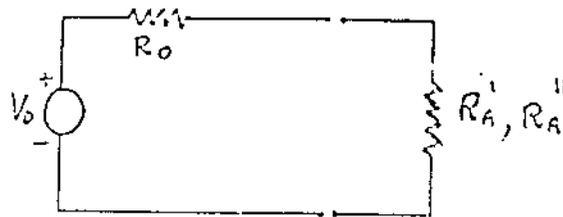


fig. 37

Essendo $I = \frac{V_0}{R_0}$ si ha infatti

$$\begin{cases} I_A' = \frac{V_0}{R_0 + R_A'} = \frac{I}{1 + \frac{R_A'}{R_0}} \\ I_A'' = \frac{V_0}{R_0 + R_A''} = \frac{I}{1 + \frac{R_A''}{R_0}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{R_A'}{R_0} = \frac{I}{I_A'} - 1 \\ \frac{R_A''}{R_0} = \frac{I}{I_A''} - 1 \end{cases}$$

da cui, eliminando R_0

$$I = \frac{I_A' I_A'' (R_A' - R_A'')}{R_A' I_A'' - R_A'' I_A'} \quad (37)$$

Questo metodo è però spesso di scarsa utilità pratica perchè l'errore che si introduce eseguendo la misura con il f.s. maggiore può essere tanto grande da rendere non significativa la correzione.

4.2.4 - Amperometro a bobina mobile

Un amperometro a bobina mobile è costituito schematicamente da una bobina piatta rettangolare capace di ruotare intorno ad un asse verticale ed immersa in un campo magnetico costante (fig 38).

In assenza di corrente la posizione della bobina è fissata dalla posizione di riposo di due molle m conduttrici; al passaggio, nell'avvolgimento di una corrente di intensità I , la bobina viene sollecitata a ruotare intorno all'asse da forze di natura elettromagnetica mentre le molle esercitano la forza elastica di richiamo.

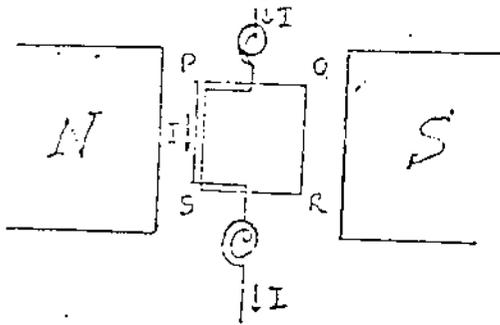


fig. 38

Supposto dapprima il campo magnetico \vec{B} uniforme, le forze agenti sui quattro lati di una singola spira percorsa dalla corrente I risultano

$$\vec{F}_{PS} = I \vec{PS} \wedge \vec{B} = -I \vec{RQ} \wedge \vec{B} = -\vec{F}_{RQ}$$

$$\vec{F}_{SR} = I \vec{SR} \wedge \vec{B} = -I \vec{QP} \wedge \vec{B} = -\vec{F}_{QP}$$

ovè \vec{B} è il vettore induzione magnetica.

Le forze che agiscono su lati opposti sono quindi uguali ed opposte, ma mentre per quanto riguarda i lati orizzontali risultano inefficaci a causa della rigidità della bobina, la coppia costituita dalle forze che agiscono sui lati verticali, dà luogo alla rotazione della bobina.

Dette a e d le lunghezze dei lati della spira, il modulo del momento torcente risulta (v. anche la fig 39 in cui la spira è rappresentata vista dall'alto).

$$|\vec{M}| = a d B I \cos \vartheta \quad (38)$$

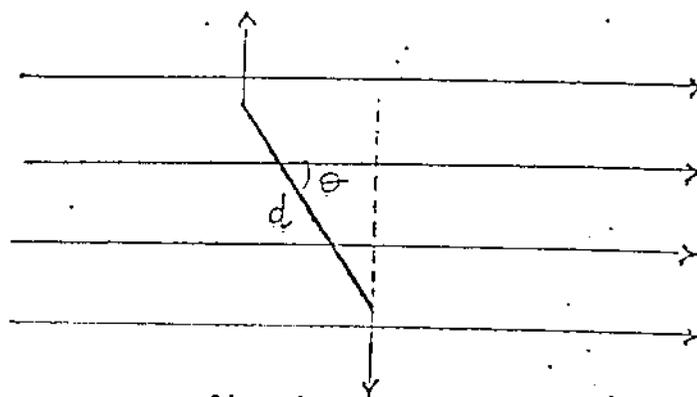


fig. 39

Questa espressione è la particolareggiata, in questo caso, della $f(I)$ nella

La posizione di equilibrio è data da

$$\Theta_0 = \frac{a d B \cos \Theta I}{C} \quad (21)$$

Nel caso che la bobina sia formata da un avvolgimento di n spire la relazione precedente deve essere moltiplicata per n .

Si può evitare all'inconveniente della dipendenza non lineare di Θ da I dando a B (mantenuto sempre costante in modulo) un andamento radiale (fig. 40). In tal caso, posto $n a d B = \Phi^*$ si ha $M = \Phi^* I = n a d B I$ e quindi $\Theta_0 = \frac{\Phi^* I}{C}$. (39)

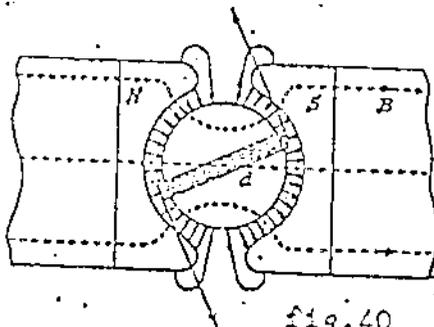


fig. 40

La sensibilità σ di un amperometro a bobina mobile è

$$\sigma = \frac{n a d B}{C} = \frac{\Phi^*}{C}$$

e può essere aumentata diminuendo la costante di richiamo C o aumentando le dimensioni della bobina (e quindi del magnete permanente), in ragione delle esigenze di maneggevolezza, che pongono limiti anche ai valori di B ottenibili.

La sensibilità si può accrescere anche aumentando il numero n di spire dell'avvolgimento, però in tal modo aumenta anche la resistenza interna dello strumento.

Nei limiti in cui è valida la (39), cioè nei limiti in cui il campo magnetico in cui è immersa la bobina è radiale, un amperometro a bobina mobile è uno strumento a scala lineare.

Ne segue che l'errore assoluto

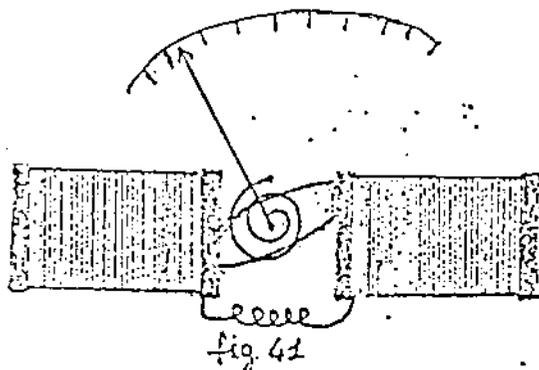
$$\Delta I = K \Delta \vartheta$$

è costante, mentre l'errore relativo va aumentando in ragione inversa della corrente che si misura

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta} = \frac{K \Delta \vartheta}{I}$$

4.2.5 - Amperometro a ferro mobile

Nell'amperometro a ferro mobile la corrente da misurare circola negli avvolgimenti di un elettromagnete e l'equipaggio mobile è costituito da una sbarretta di ferro dolce, (cioè a debole magnetismo residuo), v. fig. 41 in cui è visibile anche la molla che esercita la forza elastica di richiamo.



Per piccoli valori della corrente da misurare l'intensità di magnetizzazione della massa di ferro e quindi il suo momento magnetico è in prima approssimazione proporzionale all'intensità I della corrente; se invece il campo magne-

tico tra le espansioni dell'elettrocalamita è sufficientemente intenso da provocare la saturazione del "ferro mobile", il momento magnetico di quest'ultimo è indipendente da I . Poichè l'azione meccanica sull'equipaggio mobile è proporzionale al prodotto del momento magnetico di esso per l'intensità I della corrente ne segue che la coppia deviatrice è all'incirca proporzionale ad I^2 per piccoli valori dell'intensità di corrente mentre è proporzionale ad I per valori più elevati di essa. La scala di questo strumento non è quindi lineare.

In prossimità dello zero, dove, essendo $\Theta = kI^2$, la scala è quadratica, si ha: $\Delta\Theta = 2kI \Delta I$ e quindi

$$\Delta I = \frac{\Delta\Theta}{2kI}$$

Per piccoli valori di I l'errore può diventare piuttosto elevato e ciò, unitamente agli inconvenienti derivanti dall'isteresi della spiretta di ferro, rende l'amperometro a ferro mobile inadatto a misure di precisione.

I pregi di questo tipo di strumento sono il basso costo, la robustezza e l'assenza di magneti permanenti che si possono smagnetizzare con l'andar del tempo.

L'amperometro a ferro mobile è adatto a misurare anche correnti alternate perchè la deviazione non dipende dal verso della corrente, contrariamente a quanto avviene negli strumenti a bobina mobile.

4.2.C - Galvanometro

Il galvanometro è adatto a misurare correnti estremamente piccole (fino a 10^{-12} A).

L'elevata sensibilità di questo strumento viene favorita

da una costante elastica di richiamo molto piccola realizzata sospendendo l'equipaggio mobile ad un filo di quarzo.

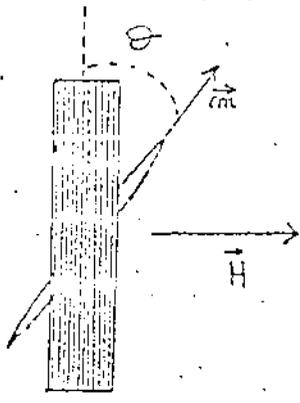
La lettura della deflessione dell'equipaggio mobile

viene effettuata mediante il metodo di Poggendorf grazie ad uno specchietto solidale coll'equipaggio stesso.

a) Galvanometro ad ago mobile

Un aghetto magnetizzato è sospeso ad un filo di quarzo nel campo magnetico di una bobina fissa percorsa dalla corrente da misurare (v. fig 42)

Il modulo del momento magnetico della coppia deviatrice è dato da $|\vec{M}| = |\vec{m} \wedge \vec{H}| = m H \sin \alpha = m H \cos \theta =$



$= KI \cos \theta$

fig. 42

Poichè nel caso del galvanometro gli angoli di deviazione sono sempre molto piccoli è lecito fare l'approssimazione

$\cos \theta \approx 1$

per cui

$M \approx KI$

Essendo il galvanometro uno strumento molto sensibile è necessario schermarlo da campi magnetici spuri e dalla componente orizzontale del campo magnetico terrestre, perciò di solito si usa sia proteggere l'intero galvanometro con più calotte cilindriche di materiale ferromagnetico, sia adottare il cosiddetto "sistema astatico di Nobili" per cui l'equipaggio mobile è costituito da due aghetti magnetizzati iden-

50
tici disposti parallelamente ma in verso opposto, sostenuti da un'asta rigida di alluminio. Intorno ai due aghetti (fig. 43) la corrente da misurare viene fatta circolare in versi opposti;

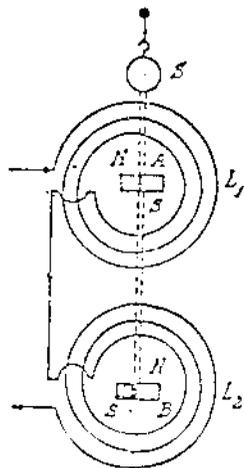


fig. 43

in tal modo il momento risultante delle forze agenti sull'equipaggio mobile a causa di un campo magnetico esterno orizzontale si annulla, mentre, grazie agli avvolgimenti discordanti delle bobine, l'azione deviatrice provocata dal passaggio della corrente viene raddoppiata.

b) Galvanometro a bobina mobile

È essenzialmente un amperometro a bobina mobile molto sensibile grazie alla piccola costante di richiamo realizzata sospendendo la bobina con un filo di bronzo fosforoso (o di rame o d'oro) che serve anche a convogliare la corrente nella bobina.

Può essere interessante osservare che il moto dell'equipaggio mobile di un galvanometro a bobina mobile dipende dalla resistenza del circuito su cui esso è chiuso.

Per studiare tale dipendenza è necessario definire la resistenza critica di un galvanometro a bobina mobile.

Com'è noto (§§ 4.1) ^{4.2.4} l'equazione che rappresenta il moto dell'equipaggio mobile di uno strumento a scala lineare si può scrivere

$$J\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + c\theta = \phi^* I \quad (40)$$

Mentre però nel caso per es. di un galvanometro ad ago mobile la costante di smorzamento β è di origine puramente meccanica, nel caso in cui l'equipaggio mobile sia costituito da una bobina tale costante ha una componente di origine elettromagnetica.

Durante il moto dell'equipaggio mobile i conduttori che costituiscono i lati della bobina paralleli all'asse di rotazione tagliano le linee di induzione magnetica del campo radiale esistente nel traferro. Pertanto, agli estremi di ciascun tratto di filo che costituisce un lato di una spirale parallelo all'asse di rotazione, si manifesta una f.e.m. indotta la cui espressione è

$$f' = -B a v \quad (41)$$

dove v è la velocità di traslazione del tratto di filo, la quale è legata all'angolo di rotazione θ dalla relazione

$$v = \frac{a}{2} \dot{\theta}$$

Per una bobina di n spire la f.e.m. totale indotta per effetto del flusso tagliato risulta quindi

$$f = -2nBa \frac{a}{2} \dot{\theta} = -na^2 B \dot{\theta} \quad (42)$$

che, posto, come già nel § 4.2.4, $na^2 B = \phi^*$, diventa

$$f = -\phi^* \dot{\theta} \quad (43)$$

La corrente $I(t)$ che circola nella bobina all'istante t è data perciò da

$$I(t) = I_0 + \frac{f}{R} = I_0 - \frac{\phi^*}{R} \dot{\theta} \quad (44)$$

dove R è la resistenza totale del circuito e cioè la serie della resistenza interna del galvanometro e della resistenza del circuito vista dal galvanometro.

La (40) diventa quindi

$$J\ddot{\theta} + \left(\beta_0 + \frac{\phi^{*2}}{R} \right) \dot{\theta} + c\theta = \phi^* I_0 \quad (45)$$

dove β_0 è la componente puramente meccanica della costante di smorzamento.

La (45) mostra come sia possibile variare lo smorzamento di origine elettromagnetica variando il valore della resistenza totale R su cui è chiuso il galvanometro.

Il valore di R per cui il moto dell'equipaggio mobile è di tipo aperiodico ^{critico} è detta resistenza critica R_c . La condizione di smorzamento critico è data (4.1) da

$$\beta = g\sqrt{JC}$$

che in questo caso diviene

$$g\sqrt{JC} = \beta_0 + \frac{\phi^{*2}}{R_c} \approx \frac{\phi^{*2}}{R_c} \quad (46)$$

poichè nel caso di un galvanometro a bobina mobile infatti, si ha $\beta_0 \ll \frac{\phi^{*2}}{R_c}$.

Dalla (46) si ottiene

$$R_c = \frac{\phi^{*2}}{g\sqrt{JC}}$$

Per $R > R_c$ il moto dell'equipaggio mobile è oscillatorio smorzato, per $R < R_c$ è aperiodico.

4.3 - Misure di differenza di potenziale

4.3.1 - Voltmetro

Il voltmetro è uno strumento tarato con il quale si eseguono misure di differenza di potenziale mediante la misura della ^{intensità di} corrente che fluisce ^{in un resistore di} resistenza nota.

Per misurare la d.d.p. tra i punti A e B (fig44 a e b)

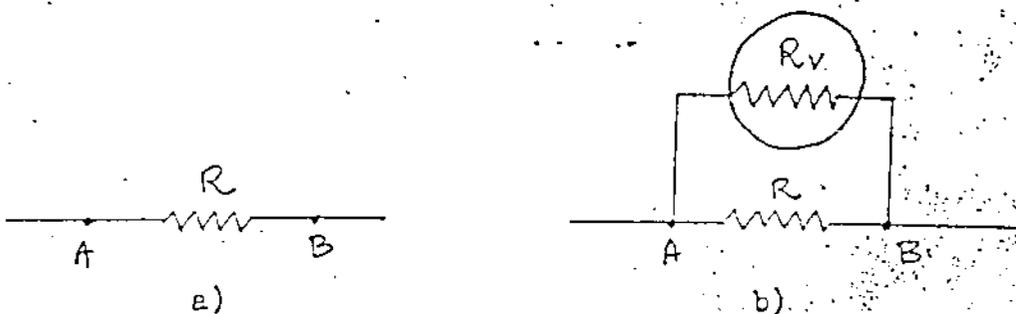


fig.44

il voltmetro, che è sostanzialmente un amperometro con un'elevata resistenza interna R_v , si dispone tra A e B, in parallelo al ramo o ai rami di circuito preesistenti tra A e B.

Anche la portata di un voltmetro, definita come la massima d.d.p. misurabile, cioè quella per la quale l'indice va al fondo scala, come quella di un amperometro può essere aumentata; in questo caso però la resistenza di shunt deve essere messa in serie alla resistenza interna.

Infatti (fig 45) se $V_A - V_B$ è la d.d.p. da misurare, I_v l'intensità della corrente deviata nel ramo dello strumento, V_v e V_s le d.d.p. rispettivamente ai capi di R_v e di R_s , si ha

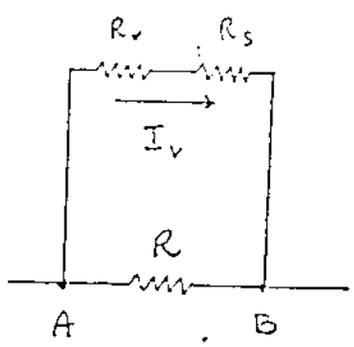


fig.45

$$V_A - V_B = I_v (R_v + R_s) = V_v + V_s$$

Si ottiene quindi

$$V_v = \frac{1}{n} (V_A - V_B) \quad \text{se} \quad V_s = (n-1)V_v$$

cioè
$$R_s = (n-1) R_v$$

SI può allora ricavare $V_A - V_B$ moltiplicando per n la d.d.p. V_v misurata dal voltmetro.

In fig 46 è riportato il circuito interno di un voltmetro di uso comune.

CIRCUITO SEMPLIFICATO VOLTMETRO IN C.C.

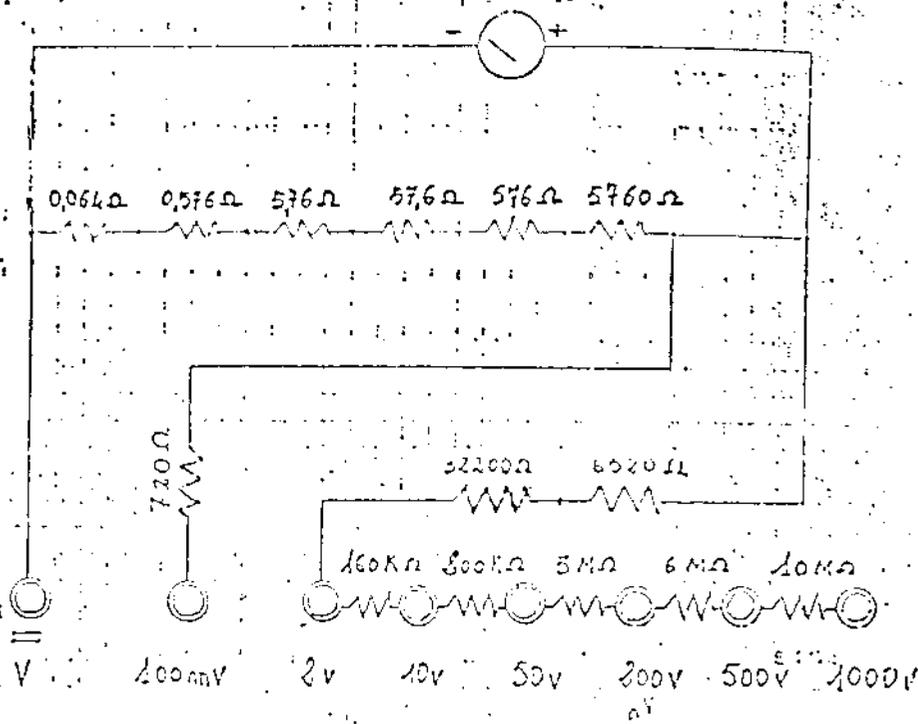


fig.46

4.3.2 - Misure con il voltmetro. Perturbazione da esso apportata

L'inserimento di un voltmetro in un circuito ne perturba le condizioni perchè parte della corrente viene deviata attraverso la resistenza interna R del voltmetro. Allo scopo di valutare l'entità della perturbazione si può considerare lo schema secondo Thevenin del circuito in studio prima e dopo l'inserimento del voltmetro (fig 47 a e b).

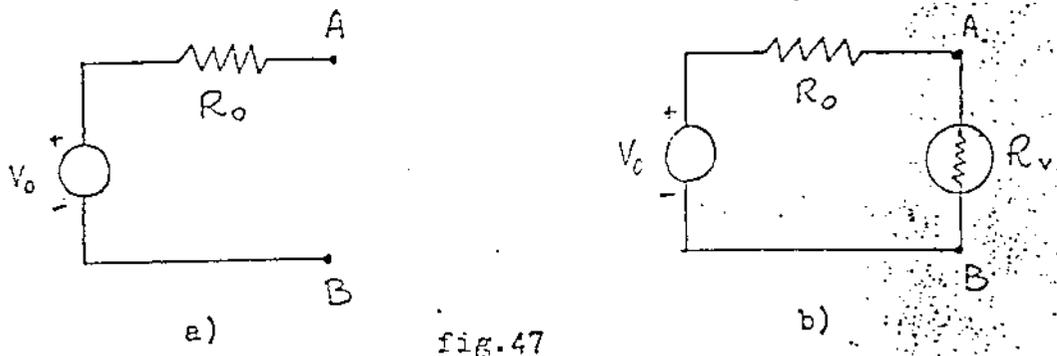


fig. 47

La d.d.p. da misurare è V_0 ; la corrente che circola in R ha intensità I_v ,

$$I_v = \frac{V_0}{R_0 + R_v}$$

per cui la d.d.p. ai capi del voltmetro, che è quella che lo strumento misura, è

$$V_v = I_v R_v = V_0 \frac{R_v}{R_0 + R_v} = V_0 \frac{1}{\frac{R_0}{R_v} + 1}$$

quindi
$$V_0 = V_v \left(1 + \frac{R_0}{R_v} \right) \quad (47)$$

Come si vede l'entità della correzione da apportare al valore letto V_v dipende dal rapporto $\frac{R_0}{R_v}$ tra la resistenza equivalente R_0 del circuito e la resistenza interna R_v del voltmetro. La correzione è da ritenersi trascurabile se il rapporto $\frac{V_0 - V_v}{V_v}$ è minore dell'errore percentuale commesso nella lettura di V_v (v. § 4.2.3).

Il valore di R_v si calcola a partire dall'inverso $\frac{1}{I_{f.s.}}$ della corrente di f.s. del milliamperometro base del voltmetro.

Il valore di $\frac{1}{I_{f.s.}}$, espresso in $\frac{\Omega}{V}$, e detto impropriamente "sensibilità voltmetrica" uguaglia, per la legge di Ohm, il rapporto tra la resistenza interna R_v e la d.d.p. di fondo scala $V_{f.s.}$:

$$\frac{1}{I_{f.s.}} = \frac{R_v}{V_{f.s.}}$$

Per ottenere R_v basta quindi moltiplicare $\frac{1}{I_{f.s.}}$ per $V_{f.s.}$:

Ad esempio, se $\frac{1}{I_{f.s.}} = 30'000 \frac{\Omega}{V}$, la resistenza interna del voltmetro quando lo si usi col f.s. 50 V è.

$$R_V = 30'000 \times 50 = 1 \text{ M}\Omega$$

Come già visto per le misure di corrente (§ 4.2.3) anche nel caso delle misure di tensione è possibile determinare la d.d.p. imperturbata senza conoscere la resistenza equivalente R_0 del circuito, col metodo della misura con due differenti fondi scala. Se le due letture sono rispettivamente V_V' e V_V'' e la resistenza interna dello strumento vale nei due casi R_V' ed R_V'' la d.d.p. da misurare V_0 può essere espressa nei due modi seguenti (v.(47))

$$\begin{cases} V_0 = V_V' \left(1 + \frac{R_0}{R_V'} \right) \\ V_0 = V_V'' \left(1 + \frac{R_0}{R_V''} \right) \end{cases}$$

da cui, eliminando R_0 si ottiene

$$V_0 = \frac{V_V' V_V'' (R_V'' - R_V')}{R_V'' V_V' - R_V' V_V''}$$

La d.d.p. imperturbata V_0 può anche essere determinata eseguendo, oltre alla usuale misura col voltmetro, una ulteriore misura nella quale in serie al voltmetro è stata aggiunta una resistenza nota R' (fig 48 a,b)

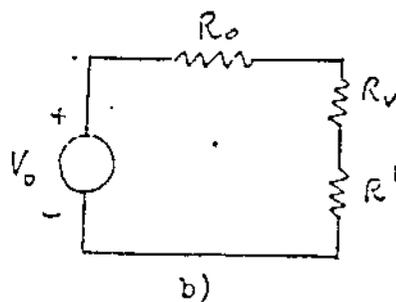
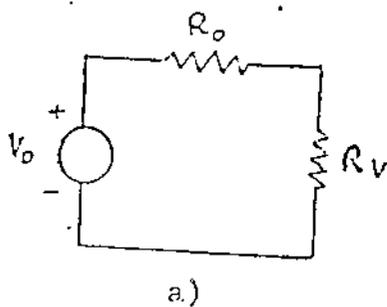


fig.48

Indicando con V_v e V_v' le letture eseguite sul voltmetro nei due casi si ha

$$V_0 = V_v \left(1 + \frac{R_0}{R_v} \right)$$

$$V_0 = V_v' \left(1 + \frac{R_0 + R_1}{R_v} \right)$$

da cui, eliminando R_0

$$V_0 = \frac{V_v V_v'}{V_v - V_v'} \cdot \frac{R_1}{R_v}$$

4.3.3 - Metodo potenziometrico o di Poggendorf

Si tratta di un metodo particolarmente adatto alla misura della forza elettromotrice di un generatore; esso richiede però l'impiego di una pila campione, cioè di una pila di f.e.m. nota.

La precisione con cui è nota la f.e.m. della pila campione è un elemento determinante della precisione con la quale si ottiene il risultato della misura.

Sia \mathcal{P} il generatore (per es. una pila) di f.e.m. f incognita; esso viene inserito nel circuito di fig 49

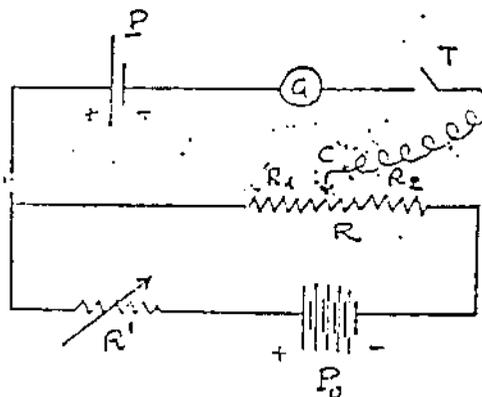


fig.49

ove G è un galvanometro, R_1 è un reostato ed R un potenziometro.

metro la cui resistenza totale viene divisa dal contatto C nelle due parti R_1 ed R_2 ;

P_0 è una pila inserita in modo che la sua f.e.m. \mathcal{E}_0 si opponga ad \mathcal{E} nel ramo del galvanometro.

Quando il tasto T è aperto si stabilisce ai capi del potenziometro R una differenza di potenziale

$$V = \frac{\mathcal{E}_0}{R' + R} R$$

(la resistenza interna di P_0 è compresa in R').

Questo metodo richiede la condizione che la d.d.p. V sia maggiore della forza elettromotrice \mathcal{E} da misurare

$$V > \mathcal{E}$$

È allora possibile, variando la posizione del cursore C, fissare una differenza di potenziale V_2 ai capi di R tale che

$$V_2 = \mathcal{E}$$

Il realizzarsi di questa condizione che corrisponde a corrente nulla nel ramo che contiene P, è segnalata dall'immobilità dell'equipaggio mobile del galvanometro quando si chiude l'interruttore T.

Si ha allora

$$\mathcal{E} = V_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{R + R'} R_2 \quad (48)$$

Sostituendo al posto di P una pila campione P' di f.e.m. \mathcal{E}' nota, la condizione di equilibrio nel ramo di P si realizza per una nuova posizione del cursore C, cioè per un nuovo valore di R_1, R_2' e per il corrispondente valore, V_2' , della d.d.p. ai suoi capi. È allora

$$\mathcal{E}' = V_2' = \frac{\mathcal{E}_0}{R + R'} R_2' \quad (49)$$

Dalle (48) e (49) si ottiene

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} = \frac{R_2}{R_2'} \quad (50)$$

In misure di precisione il potenziometro R può venire realizzato mediante un conduttore omogeneo calibrato sul quale scorre un cursore formato da una lamina metallica della quale sia possibile determinare la posizione con precisione, e siccome per la seconda legge di Ohm ($R = \frac{\rho l}{S}$) il rapporto delle resistenze $\frac{R_1}{R_2}$ può essere sostituito da un rapporto tra lunghezze $\frac{l_1}{l_2}$ e la (50) diventa

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{l_1}{l_2}$$

Si noti che in questo metodo il galvanometro viene usato come strumento di zero, quindi il risultato della misura è indipendente non solo dall'eventuale taratura del galvanometro stesso ma anche dalla sua precisione, mentre ne sfrutta la sensibilità.

4.4 - Misure di resistenza

4.4.I - Metodo voltamperometrico

Consiste nel misurare la d.d.p. ai capi della resistenza incognita e l'intensità della corrente che vi fluisce, avendo connesso la resistenza ad un opportuno generatore, e nell'applicare alla I^a legge di Ohm.

Conviene distinguere i due casi, illustrati in fig 50 a e b

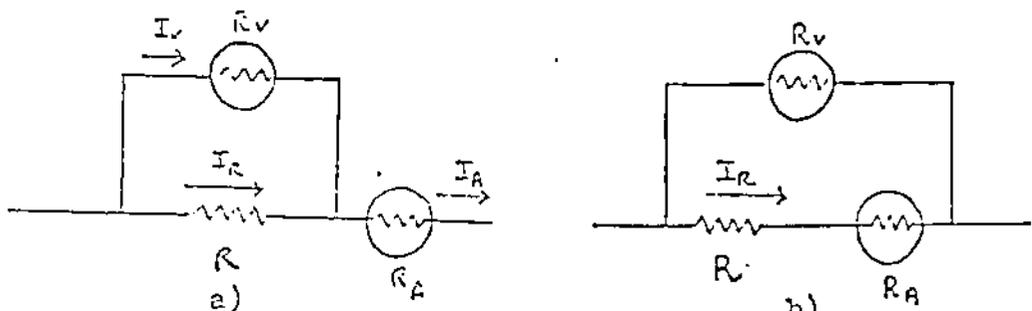


fig.50

in cui amperometro e voltmetro sono disposti diversamente.

a) Il voltmetro misura la d.d.p. V_R ai capi di R , ma l'amperometro misura una corrente I_A diversa dalla corrente I_R che percorre R :

$$V_V = V_R, \quad I_A \neq I_R$$

Per trovare come il rapporto tra le letture sugli strumenti $\frac{V_V}{I_A}$ è legato al valore vero della resistenza R si può partire dalle leggi di Kirchhoff:

$$\begin{cases} I_A = I_V + I_R \\ R_V I_V = I_R \cdot R \end{cases}$$

da cui
$$I_R = I_A \frac{1}{1 + \frac{R}{R_V}}$$

quindi

$$R = \frac{V_R}{I_R} = \frac{V_V}{I_A} \left(1 + \frac{R}{R_V} \right)$$

b) L'amperometro misura la corrente I_R che scorre in R , ma il voltmetro misura una d.d.p. diversa dalla d.d.p. V_R ai capi di R :

$$I_A = I_R, \quad V_V \neq V_R$$

Poichè $V_V = I_R (R + R_A)$

e $V_R = I_R \cdot R$

si ha

$$V_R = V_V \frac{1}{1 + \frac{R_A}{R}}$$

quindi

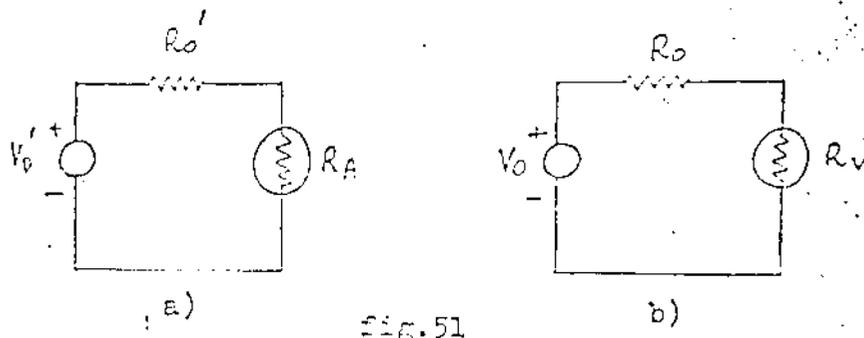
$$R = \frac{V_R}{I_R} = \frac{V_V}{I_A} \frac{1}{1 + \frac{R_A}{R}}$$

Come si vede, nel caso a) il valore di R è tanto meglio approssimato dal rapporto $\frac{V_V}{I_A}$ quanto più è piccolo rispetto ad 1 il rapporto $\frac{R}{R_V}$; nel caso b) quanto più è piccolo ri-

spetto ad 1 il rapporto $\frac{R_A}{R}$.

Perciò, fatta una stima approssimativa del valore di R conviene procedere alla misura scegliendo la disposizione più opportuna; ciò è possibile perchè di norma $R_A \ll R_V$.

Nel caso in cui si abbia a disposizione un solo strumento (strumento universale, S.U.) che può funzionare alternativamente da amperometro e da voltmetro i circuiti equivalenti sono quelli in fig 51 a,b;)



($=V_0$ in fig 51 b)

Com'è noto (§§ 4.2.3. e 4.3.2) se V e I sono rispettivamente la d.d.p. imperturbata ai capi di R e la corrente imperturbata in R, si ha

$$V = V_V \left(1 + \frac{R_0}{R_V} \right)$$

$$I = I_A \left(1 + \frac{R_A}{R_0'} \right)$$

e quindi

$$R = \frac{V}{I} = \frac{V_V}{I_A} \frac{\left(1 + \frac{R_0}{R_V} \right)}{\left(1 + \frac{R_A}{R_0'} \right)} \quad (51)$$

Come si vede, R è espressa in funzione di $\frac{V_V}{I_A}$ che può ritenersi un valore di prima approssimazione (R'), ma anche di R_0 e di R_0' , che sono le resistenze equivalenti del circuito nei due casi in cui lo strumento viene inserito come

voltmetro o come amperometro. Poichè R_0 ed R_0' sono funzioni di R , se il circuito è noto se ne possono scrivere le espressioni e poi risolvere la (51) rispetto ad R , oppure si può procedere per approssimazioni successive. Tale procedimento consiste nel sostituire ad R , ove figura nelle espressioni di R_0 ed R_0' , il valore di prima approssimazione $R_0' = \frac{V_V}{I_A}$. Il valore così assunto dalla (51) è un valore R'' di seconda approssimazione per R . Il procedimento si può iterare; ciò perde significato quando la differenza tra due successivi valori approssimati $R^{(n)}$ ed $R^{(n-1)}$ diventa trascurabile rispetto all'errore $\Delta R'$ derivante dagli errori nelle misure di V_V e di I_A !

$$R^{(n)} - R^{(n-1)} \ll \Delta R' = \left(\frac{\Delta V_V}{V_V} + \frac{\Delta I_A}{I_A} \right) \cdot R'$$

4.5.2 - Ponte di Wheatstone.

Questo metodo si presta a misure notevolmente precise di resistenze in un vasto intervallo di valori ($\sim 10^{-2} \div 10^6 \Omega$). Il circuito usato è rappresentato in fig 52

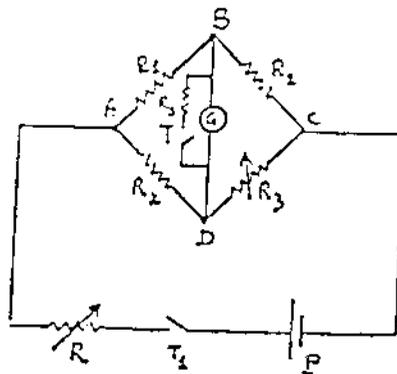


fig.52

ove R_x è la resistenza incognita, R_1 , R_2 ed R_3 sono resistenze note, delle quali almeno una variabile, R un reostato per regolare l'intensità della corrente totale, P un generatore, G un galvanometro, R_5 una resistenza di shunt, T e T_1 tasti.

Chiuso T_1 e regolata opportunamente R col tasto T inizialmente chiuso in modo che il galvanometro sia protetto dalla resistenza di shunt e successivamente aperto per realizzare le condizioni di massima sensibilità, si varia R_3 finchè si realizza la condizione.

$$V_B = V_D \quad (52)$$

per cui il ponte si dice "bilanciato". In tali condizioni nel ramo BD non passa corrente, e ciò viene controllato mediante il galvanometro, usato anche in questo caso (v. § 4.3.3) come strumento di zero.

Nelle resistenze R_1 ed R_2 scorre dunque la stessa corrente I_1 , e nelle resistenze R_x ed R_3 la stessa corrente I_3 , e poichè la (52) equivale alle

$$V_B - V_A = V_D - V_A$$

$$V_B - V_C = V_D - V_C$$

si ha

$$R_1 I_1 = R_x I_3$$

$$R_2 I_1 = R_3 I_3$$

da cui

$$R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

4.4.3 - Ohmmetro

L'ohmmetro è uno strumento tarato con il quale si eseguono misure di resistenza in modo semplice e rapido anche se non è dotato di elevata sensibilità e precisione.

Un ohmmetro è costituito essenzialmente da una pila P e da un milliamperometro A in serie ai quali viene connessa

la resistenza R_x da misurare (v. fig 53).

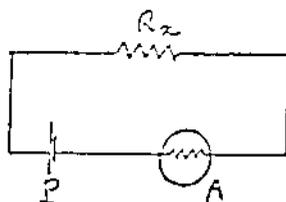


fig.53

Evidentemente la corrente che passa nel milliamperometro è funzione della resistenza R_x e la scala del milliamperometro è tarata in ohm la deflessione dell'ago solidale con l'equipaggio mobile permette di leggere direttamente il valore di R_x . In realtà lo schema precedente non permette di variare la sensibilità dello strumento nè di tener conto di eventuali variazioni della f.e.m. del generatore; occorre quindi ricorrere ad uno schema del tipo di quello in fig 54

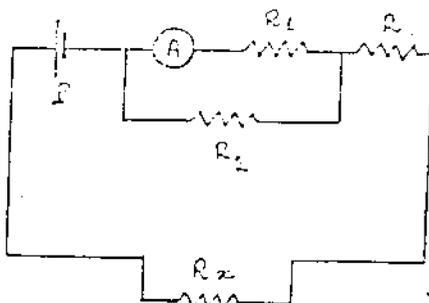


fig.54

Indicando con I la corrente che percorre la resistenza R_x , con I_A quella che passa nel milliamperometro, con f la f.e.m. del generatore e prendendo in R_1 ed R le resistenze interne del milliamperometro e del generatore si ha'

$$(53) \quad I_A = I \frac{R_2}{R_2 + R_1} = \frac{f}{R + R_x + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{f}{(R + R_x) \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_2}$$

L'andamento della funzione $I_A = I_A(R_x)$, considerati gli altri parametri costanti; è ^{inversa e} di tipo iperbolico. Per sfruttare tutta la scala del milliamperometro si fissano i parametri f, R_1, R_2, R in modo che risulti

$$I_A (R_x = 0) = I_{A_{f.s.}} = \frac{I}{R(2 + \frac{R_1}{R_2}) + R_1} \quad (54)$$

dove $I_{A_{f.s.}}$ è la corrente di fondo scala del milliamperometro.
Naturalmente per $R_x = \infty$ si ha

$$I_A (R_x = \infty) = 0$$

Agli estremi della scala ohmmetrica corrispondono i valori $R_x = 0$ ed $R_x = \infty$; risulta tuttavia dalla (53) che i valori della corrente I_A corrispondenti a valori crescenti di R_x si vanno infittendo per $R_x \gg R$ e l'errore relativo diventa proibitivo. Se infatti si ricava dalla (53) R_x e si differenzia rispetto ad I_A si può ottenere l'errore relativo nella forma

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\frac{I}{I_A^2} \Delta I_A}{\frac{I}{I_A} - R_2 - R(2 + \frac{R_1}{R_2})}$$

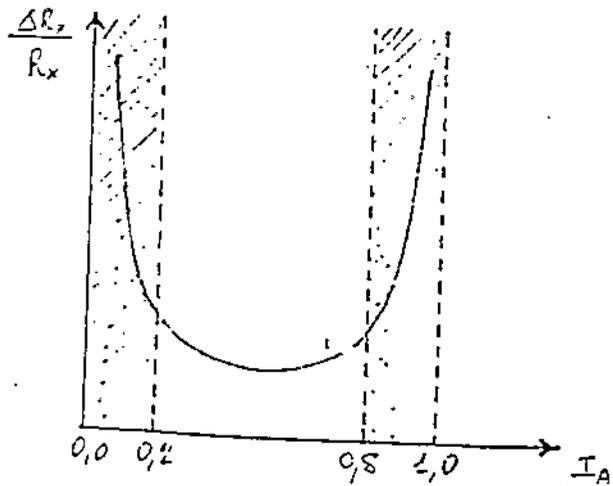
che, tenendo conto della (54), diventa

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\frac{\Delta I_A}{I_A}}{1 - \frac{I_A}{I_{A_{f.s.}}}}$$

quindi

$$\lim_{I_A \rightarrow 0} \frac{\Delta R_x}{R_x} = \infty = \lim_{I_A \rightarrow I_{A_{f.s.}}} \frac{\Delta R_x}{R_x}$$

Il grafico della funzione $\frac{\Delta R_x}{R_x} \left(\frac{I_A}{I_{A_{f.s.}}} \right)$ è riportato in fig 55 dove si è posto $\Delta I_A = 10^{-2} I_{A_{f.s.}}$.



Come si vede $\frac{\Delta R_x}{R_x}$ può essere considerato circa costante purchè si escludano le due zone di lettura, tratteggiate in figura, $0 < I_A \leq 0,9 I_{A_{f.s.}}$, $0,8 I_{A_{f.s.}} \leq I_A < I_{A_{f.s.}}$.

Resistenze che comporterebbero letture di I_A in tali zone possono essere misurate mediante un opportuno cambiamento di scala ottenibile variando le resistenze R ed R_2 in modo che siano verificate le condizioni

$$I'_A(R_x = 0) = I_{A_{f.s.}} \quad (55)$$

$$I'_A(k R_x) = I_A(R_x) \quad (56)$$

il significato delle quali è che la deflessione dell'equipaggio mobile che nella disposizione originaria delle resistenze corrispondeva ad una resistenza R_x , nella nuova situazione deve corrispondere alla resistenza $k R_x$ pur rimanendo sempre valida la (54) (v. fig. 56)

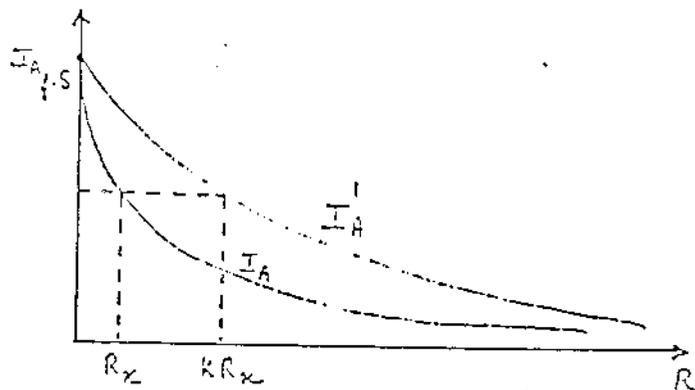


fig. 56

Come si può controllare mediante sostituzione nella (53) si realizzano contemporaneamente le (55) e (56) mantenendo fissa R_2 e variando R , R_2 in modo che sia

$$\left(1 + \frac{R_1}{R'_2}\right) = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$R' = k R$$

dove il coefficiente K è di solito una potenza di 10. I comuni ohmmetri permettono di variare il valore del coefficiente K in modo da ottenere misure con un'incertezza non superiore al 10% in un vasto intervallo di valori di resistenza.

La scala più elevata che si può ottenere, fissati i valori di R ed R_1 , è quella con $R_2 = \infty$; in tal caso la (54) diventa

$$I_A = \frac{f}{R + R_x + R_1}$$

ed un'ulteriore espansione proporzionale della scala comporta la moltiplicazione sia di f che di $(R + R_1)$ per lo stesso fattore K .

La forza elettromotrice f , essendo di solito il generatore realizzato mediante una pila, può subire variazioni.

Per compensare tali variazioni si usa shuntare il milliamperometro con una resistenza variabile R_3 ^(v. fig. 57) che prima di ogni misura deve essere regolata in modo che lo strumento risulti azzerato quando i puntali sono in contatto tra loro; in tal modo è realizzata la condizione $I_A (R_x = 0) = I_{A,0}$.

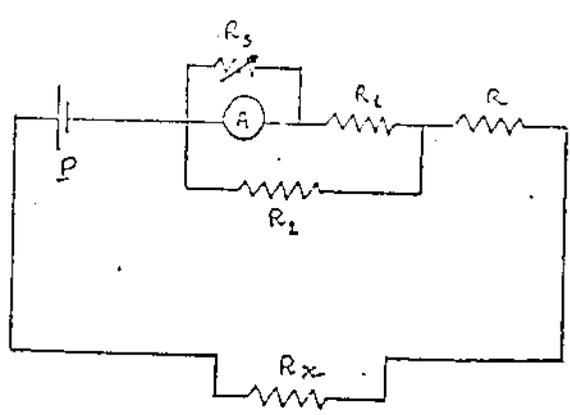


fig. 57

R_3 viene scelta abbastanza grande ($R_3 \gg$ resistenza interna del milliamperometro, $R_3 \gg R_2$) in modo che possa controllare entro certi limiti la corrente che passa nel milliamperometro senza alterare sensibilmente il regime del circuito.

INDICE

	pag
CAP. I CORRENTE CONTINUA	
1 - Considerazioni generali. Generatore ideale di tensione e di corrente	1
2 - Cenni di teoria dei circuiti in c.c.	3
2.1 - Legge di Ohm	3
2.2 - Principi di Kirchhoff	9
2.3 - Teorema di sovrapposizione	14
2.4 - Teorema di reciprocità	16
2.5 - Circuiti equivalenti	16
2.6 - Teorema di Thévenin	16
2.7 - Teorema di Norton	21
2.8 - Trasferimento di potenza da un generatore ad un carico	23
3 - Elementi reali di circuito elettrico	24
3.1 - Resistori	24
3.2 - Condensatori	28
3.3 - Induttori	30
3.4/5 - Generatori reali	31
	33
4 - Misure in corrente continua	34
4.1 - Moto dell'equipaggio mobile di uno strumento di misura	34
4.2 - <u>Misure di intensità di corrente</u>	39
4.2.1 - Amperometro - Considerazioni generali	39
4.2.2 - Variazioni della portata di un amperometro. Shunts	41
4.2.3 - Misure con l'amperometro. Perturbazione da esso apportata	42
4.2.4 - Amperometro a bobina mobile	45

4.2.5 - Amperometro a ferro mobile	47
4.2.6 - Galvanometro	48
a) ad ago mobile	49
b) a bobina mobile	50
4.3 - Misure di differenza di potenziale	51
4.3.1 - Voltmetro	52
4.3.2 - Misure con il voltmetro. Perturbazione da esso apportata.	54
4.3.3 - Metodo potenziometrico o di Poggendorf	57
4.4 - Misure di resistenza	59
4.4.1 - Metodo voltamperometrico	59
4.4.2 - Ponte di Wheatstone	62
4.4.3 - Ohmmetro	63

MISURE IN CORRENTE ALTERNATA

M. ALESSIO - S. IMPROTA

Esperimentazione di Fisica 2

1. Reti elettriche in regime sinusoidale

In questo capitolo sono studiate le proprietà delle reti elettriche in regime sinusoidale, che si realizza quando gli elementi attivi (generatori di tensione o di corrente) forniscono segnali che sono funzioni sinusoidali del tempo durante un intervallo di durata molto maggiore del periodo dei segnali medesimi.

Lo studio che di tali reti verrà svolto riguarda esclusivamente il "regime stazionario", vale a dire la situazione che si viene a creare quando sono esauriti tutti i fenomeni transitori, come quelli che si verificano in corrispondenza di apertura e chiusura di un circuito.

A tale scopo saranno impiegati metodi formali di calcolo che consentono di ridurre la trattazione all'applicazione di leggi lineari formalmente analoghe a quelle già impiegate nello studio delle reti lineari in regime di correnti continue e stazionarie.

1.1 Generalità sulle grandezze periodiche

Si definisce grandezza periodica una grandezza $a(t)$, funzione di una variabile t , per la quale si ha, per ogni t ,

$$a(t) = a(t+nT)$$

in cui la costante T prende il nome di periodo e n è un numero intero (v. fig. 1).

Nella relazione precedente la variabile t , continua, può essere una qualunque grandezza; nello studio delle grandezze elettriche essa è la variabile tempo.

Come è noto, si chiama frequenza la grandezza

$$\gamma = \frac{1}{T}$$

e pulsazione la grandezza

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\gamma.$$

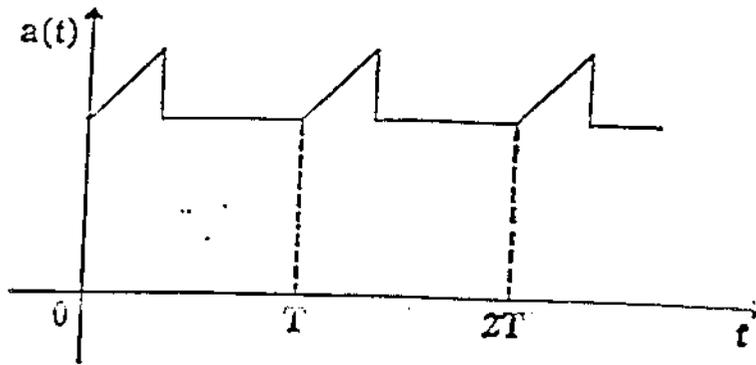


fig. 1

si definisce valore medio di una grandezza periodica

$$A_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} c(t) dt$$

e valore quadratico medio

$$A_{cm} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} c^2(t) dt}$$

si definisce grandezza alternata una grandezza periodica il cui valor medio è nullo (v. fig. 2)

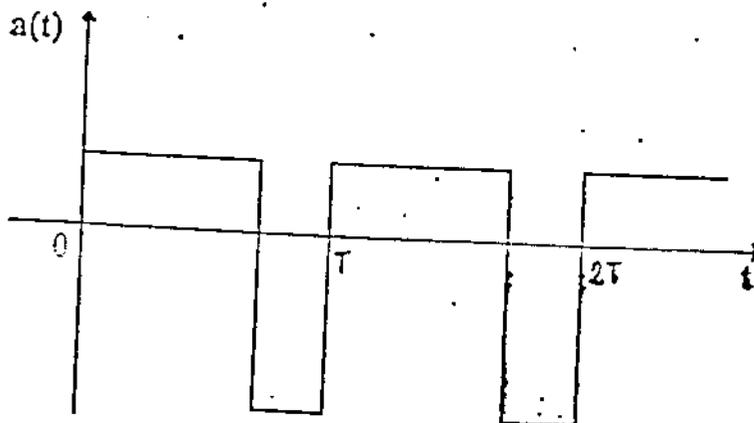


fig. 2

Dalla definizione segue che, fissato un intervallo di tempo uguale ad un periodo, l'integrale della grandezza relativo all'insieme dei punti in cui essa assume valori positivi è

In fig.4 sono riportati i casi particolari:

$$a(0)=0, \quad \psi = 0 \quad (\text{curva 1})$$

$$t_0 = \frac{T}{4}, \quad \psi = \frac{\pi}{2} \quad (\text{curva 2})$$

$$t_0 = -\frac{T}{4}, \quad \psi = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{curva 3})$$

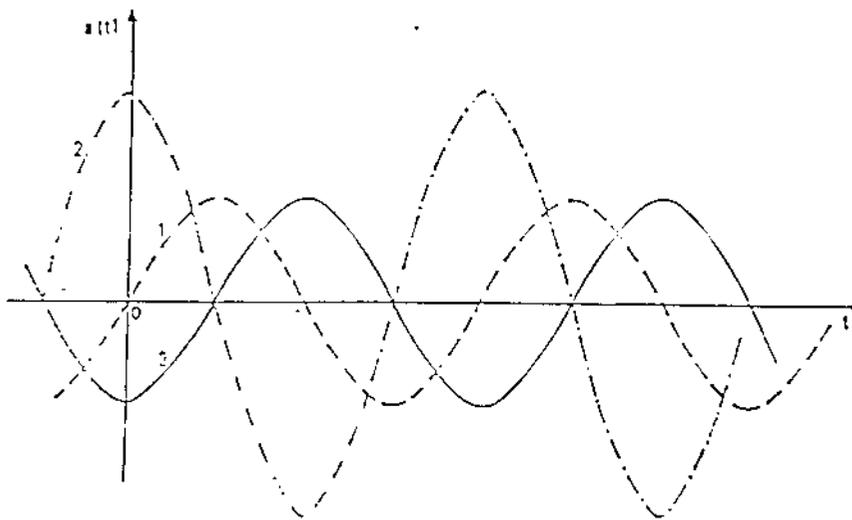


fig. 4

Si suole dire che rispetto alla grandezza rappresentata dalla curva 1, quella rappresentata dalla curva 2 è in anticipo di fase di $\frac{\pi}{2}$ e quella rappresentata dalla curva 3 è in ritardo di $\frac{\pi}{2}$; la 2 e la 3 si dicono in "opposizione di fase".

Nel caso di una grandezza sinusoidale il valore quadratico medio

ha il valore:

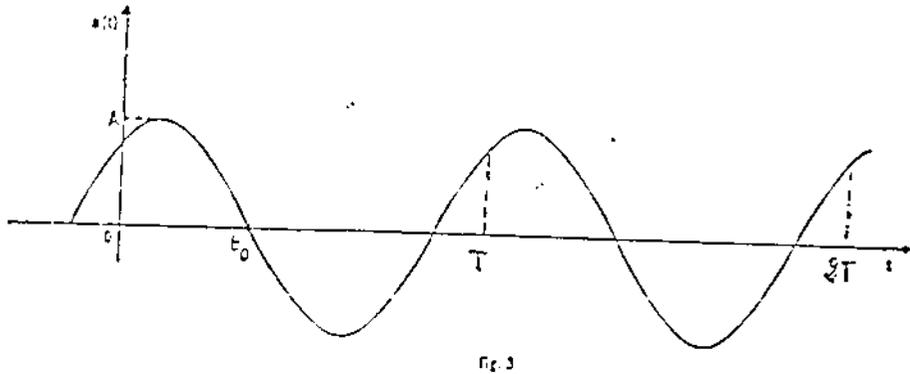
$$A_{cm} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} A^2 \sin^2(\omega t' + \psi) dt'} = \frac{1}{\sqrt{2}} A$$

mentre il valore medio della sola semionda positiva è

opposto a quello relativo all'insieme dei punti in cui essa assume valori negativi.

Una grandezza sinusoidale è una grandezza alternata del tipo

$$a(t) = A \sin(\omega t + \psi) \quad (\text{v. fig. 3})$$



in cui il valore massimo A prende il nome di ampiezza e ψ quello di fase iniziale ($-\pi < \psi \leq \pi$).

Essendo t_0 l'intervallo di tempo trascorso da $t=0$ quando la grandezza $a(t)$ si annulla per la prima volta, si ha

$$\psi = \omega t_0 \quad \text{oppure} \quad \psi = -\omega t_0$$

a seconda che, rispettivamente, sia

$$\left[\frac{da(t)}{dt} \right]_{t=t_0} < 0 \quad \text{oppure} \quad \left[\frac{da(t)}{dt} \right]_{t=t_0} > 0.$$

Se $a(0)=0$, si ha

$$\psi = 0 \quad \text{oppure} \quad \psi = \pi$$

a seconda che, rispettivamente, sia

$$\left[\frac{da(t)}{dt} \right]_{t=0} > 0 \quad \text{oppure} \quad \left[\frac{da(t)}{dt} \right]_{t=0} < 0.$$

$$A'_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} A \sin(\omega t' - \psi) dt' = \frac{2}{\pi} A$$

(v. fig. 5)

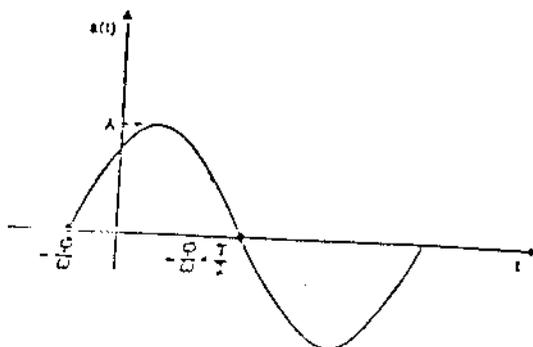


fig. 5

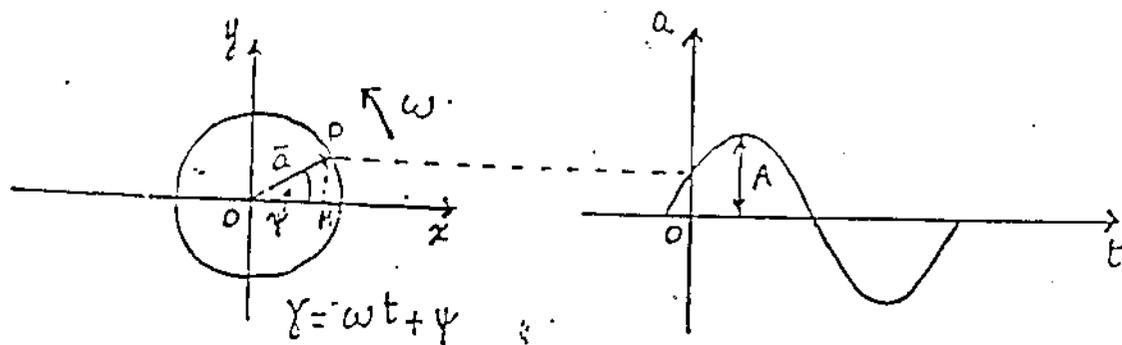


fig. 6

Se la grandezza sinusoidale rappresenta una intensità di corrente o una differenza di potenziale il valore quadratico medio prende il nome di "valore efficace" (A_{eff}).

1.2 Rappresentazione simbolica di una grandezza sinusoidale

Ad ogni grandezza sinusoidale $a(t) = A \sin(\omega t + \psi)$, caratterizzata dalle costanti A, ω, ψ , può essere associato un vettore applicato $\vec{a}(t)$ di modulo A , rotante in senso antiorario in un piano xy intorno al proprio punto di applicazione (che per comodità può essere scelto nell'origine O degli assi) con velocità angolare ω e tale da formare con l'asse x l'angolo ψ nell'istante $t = 0$.

La corrispondenza tra grandezza sinusoidale e vettore rotante (rappresentazione vettoriale) è biunivoca e tale che la componente del vettore secondo l'asse y ad un certo istante coincide con il valore della grandezza sinusoidale nello stesso istante (vedi fig. 6 pag. 465)

Nel caso in cui si abbiano n grandezze sinusoidali della stessa frequenza vale la seguente proprietà:

la combinazione lineare di n grandezze sinusoidali mediante n costanti reali è una grandezza sinusoidale della stessa frequenza che ha come corrispondente il vettore ottenuto dalla combinazione lineare degli n vettori corrispondenti con le medesime costanti;

$$\sum_{k=1}^n c_k a_k(t) \iff \sum_{k=1}^n c_k \vec{a}_k(t)$$

Nel caso di più grandezze isofrequenziali delle quali interessino le relazioni reciproche di ampiezza e di fase, la loro rappresentazione vettoriale è costituita da un insieme di vettori rotanti la cui posizione reciproca non varia nel tempo; ciascuna grandezza sinusoidale potrà allora essere associata ad un vettore statico applicato in O , con la direzione che ad esso compete in un qualsiasi fissato istante identico per tutti. Scegliendo in particolare come istante di riferimento $t = 0$, l'angolo formato

da ciascun vettore con l'asse x è proprio la fase della corrispondente grandezza sinusoidale. (vedi fig. 7).

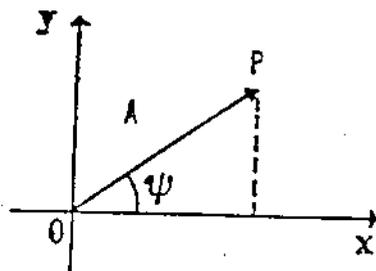


fig. 7

In questa rappresentazione l'ampiezza e la fase della somma di più grandezze sinusoidali sono ordinatamente rappresentate dal modulo del vettore risultante dei vettori statici corrispondenti e dall'angolo che esso forma con l'asse x .

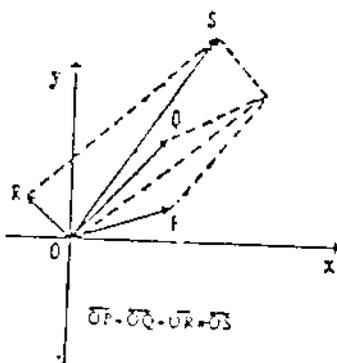


fig. 8

Ad ogni vettore del piano reale applicato nell'origine si può associare, come è noto, un numero complesso avente come parte reale a_x e coefficiente dell'immaginario a_y , rispettivamente le componenti del vettore secondo l'asse x e l'asse y . Tale numero complesso, che si suole per semplicità indicare con lo stesso simbolo del vettore rotante, si scrive in forma trigonometrica

$$\vec{a} = a_x + j a_y \quad \text{essendo} \quad j = \sqrt{-1}$$

Pertanto ad ogni grandezza sinusoidale si può far corrispondere

(rappresentazione simbolica) un numero complesso il cui coefficiente dell'immaginario fornisce il valore istantaneo della grandezza.

Ne seguono le relazioni

$$|\bar{s}| = A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan \gamma = \frac{a_y}{a_x}$$

Essendo

$$a_x = A \cos \gamma = A \cos(\omega t + \psi)$$

$$a_y = A \sin \gamma = A \sin(\omega t + \psi)$$

si ha:

$$\bar{s} = A [\cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)]$$

Utilizzando le formule di Eulero si può scrivere:

$$\bar{s} = A e^{j(\omega t + \psi)} = A e^{j\omega t} e^{j\psi} = \bar{A} e^{j\omega t}$$

avendo posto

$$Ae^{j\psi} = \bar{A} \text{ (ampiezza complessa).}$$

Ad una grandezza sinusoidale di fissata frequenza si associa pertanto la sua ampiezza complessa, cioè un numero complesso il cui modulo e il cui argomento sono rispettivamente l'ampiezza e la fase della grandezza.

1.3 Derivata di una grandezza sinusoidale

La rappresentazione simbolica di una grandezza sinusoidale semplifica notevolmente le operazioni elementari su grandezze sinusoidali. Essa consente inoltre, nella sua forma esponenziale, di conseguire il seguente risultato, particolarmente utile ai fini del presente corso: la derivazione temporale conserva la corrispondenza.

Sia $a(t) = A \sin(\omega t + \psi)$ una grandezza sinusoidale e

$$\bar{a}(t) = A e^{j\psi} e^{j\omega t}$$

la grandezza simbolica corrispondente. Si ha

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = j\omega A e^{j\psi} e^{j\omega t} = \omega A e^{j(\psi + \frac{\pi}{2})} e^{j\omega t}$$

La grandezza simbolica così ottenuta è corrispondente ad una grandezza sinusoidale della stessa frequenza, di ampiezza ωA e di fase $\psi + \frac{\pi}{2}$. Tale grandezza è proprio quella che si ottiene come derivata temporale di $a(t)$.

Si ha infatti

$$\frac{da(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \psi) = A\omega \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

In forma sintetica si può scrivere la relazione

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = j\omega \bar{a}(t) \quad (1)$$

La $d\bar{a}(t)/dt$ rappresenta pertanto una grandezza sinusoidale di ampiezza ωA e in anticipo di fase di $\frac{\pi}{2}$ rispetto ad $\bar{a}(t)$.

1.4 Integrale di una grandezza sinusoidale

La (1) stabilisce una relazione tra grandezze sinusoidali di uguale frequenza una delle quali è la derivata temporale dell'altra. Inversamente ricavando dalla (1)

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{j\omega} \frac{d\bar{a}(t)}{dt}$$

risulta che $\bar{a}(t)$ è la primitiva di $d\bar{a}(t)/dt$ che rappresenta una grandezza sinusoidale di uguale frequenza ed è pertanto assunta come

$$\bar{a}(t) = \int \frac{d\bar{a}(t)}{dt} dt$$

Si noti che l'operazione formale di integrazione equivale a dividere la $d\bar{a}(t)/dt$ per l'operatore immaginario $j\omega$. Si può pertanto concludere che, data una grandezza sinusoidale $a(t)$ di fissata frequenza, si ha:

$$\int \bar{a}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \bar{a}(t)$$

$\int \bar{a}(t) dt$ rappresenta quindi una grandezza sinusoidale di ampiezza

$\frac{A}{\omega}$ in ritardo di fase di $\pi/2$ rispetto ad $\bar{a}(t)$.

1.5 Relazioni tra tensione e corrente nei circuiti in regime sinusoidale.

Le precedenti considerazioni, relative alla rappresentazione simbolica di una grandezza sinusoidale, consentono di estendere ai circuiti in regime sinusoidale le leggi generali (ed i teoremi da essi derivati) nella stessa forma nella quale sono espresse nel caso in cui i circuiti siano percorsi da correnti continue e stazionarie. Come già detto, si ricorda che con tale formalismo è possibile descrivere la situazione delle reti soltanto in regime stazionario, cioè quando siano esauriti i fenomeni transitori che

si verificano nelle condizioni di apertura e chiusura dei circuiti. Inoltre saranno considerati soltanto i casi in cui tutti i generatori presenti forniscano segnali sinusoidali di uguale frequenza. In tali condizioni in ogni ramo di una rete circola una corrente sinusoidale di ampiezza, frequenza e fase determinate.

1.5.1 Principi di Kirchhoff

1° Principio

Come nel caso della corrente continua, il principio di continuità della corrente può essere enunciato nel modo seguente: in un nodo in cui confluiscono n correnti sinusoidali tutte di pulsazione ω e di valore istantaneo $i_k(t) = I_k \sin(\omega t + \beta_k)$, si ha per ogni istante t

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0.$$

Nella rappresentazione simbolica la precedente equazione si scrive:

$$\sum_{k=1}^n I_k e^{j\omega t + j\beta_k} = e^{j\omega t} \sum_{k=1}^n I_k e^{j\beta_k} = 0$$

Essendo $e^{j\omega t} \neq 0$, ne segue:

$$\sum_{k=1}^n I_k e^{j\beta_k} = \sum_{k=1}^n \bar{I}_k = 0 \quad (2)$$

L'equazione (2) va così intesa: fissato in modo arbitrario un verso di percorrenza cui associare convenzionalmente un segno (p.es. positivo per le correnti entranti nel nodo) e fissate inoltre arbitrariamente le origini dei tempi, la fase β_k di ogni singola corrente è tale da fornire ad ogni istante il segno della $i_k(t)$ che, in base alla convenzione fatta, indica l'effettivo verso di percorrenza della corrente.

2° Principio

In un qualsiasi percorso chiuso costituito da n elementi, attivi o passivi, ove $v_k(t) = V_k \text{sen}(\omega t + \alpha_k)$, stabilito un certo verso di percorrenza, è la tensione istantanea ai capi del generico elemento (supposto che i generatori abbiano tutti la stessa pulsazione ω), si ha:

$$\sum_{k=1}^n v_k(t) = 0$$

Nella rappresentazione simbolica si può scrivere:

$$\sum_{k=1}^n V_k e^{j\omega t} e^{j\alpha_k} = e^{j\omega t} \sum_{k=1}^n V_k e^{j\alpha_k} = 0$$

da cui

$$\sum_{k=1}^n V_k e^{j\alpha_k} = \sum_{k=1}^n \bar{V}_k = 0.$$

1.5.2 Relazioni tra tensione e corrente per elementi passivi ideali

Gli elementi passivi di circuito che si considerano sono resistori, induttori e condensatori; essi si possono ritenere ideali se valgono per essi rispettivamente, qualunque sia l'andamento temporale della tensione ai loro capi, le relazioni

$$v(t) = R i(t), \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v(t_0) \quad (3)$$

dove le grandezze R , L , C , sono costanti indipendenti dalle ampiezze e dalle caratteristiche della $v(t)$.

Nel caso in cui $v(t)$ sia un segnale sinusoidale di tensione di ampiezza V , pulsazione ω e fase α , cioè

$$v(t) = V \sin(\omega t + \alpha)$$

applicato ai capi dei singoli elementi, in condizioni stazionarie essi sono percorsi dalla corrente

$$i(t) = I \sin(\omega t + \beta)$$

In forma simbolica si ha:

$$\bar{v}(t) = V e^{j(\omega t + \alpha)} = V e^{j\alpha} e^{j\omega t} = \bar{V} e^{j\omega t}$$

$$\bar{i}(t) = I e^{j(\omega t + \beta)} = I e^{j\beta} e^{j\omega t} = \bar{I} e^{j\omega t}$$

e, per le relazioni (3)

$$\bar{V}_R = R\bar{I}, \quad \bar{V}_L = j\omega L\bar{I}, \quad \bar{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}$$

Per un resistore ideale si ha quindi $\bar{V}_R e^{j\alpha} = R\bar{I} e^{j\beta}$, da cui

$$\begin{cases} \bar{V}_R = R\bar{I} \\ \alpha = \beta \end{cases}$$

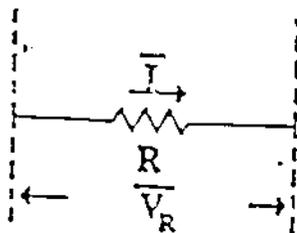


fig. 9a

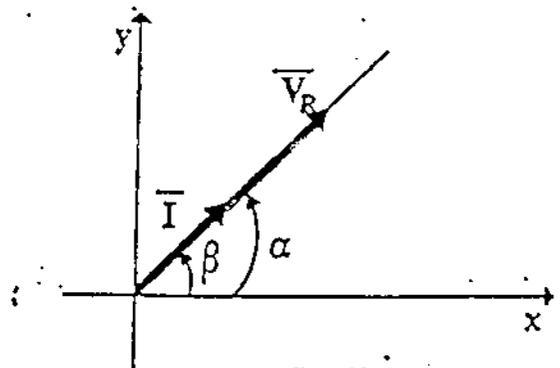


fig. 9b

di conseguenza è nullo lo sfasamento

$\varphi = \alpha - \beta$ tra tensione e corrente.

Ricordando che

$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} \pm j\sin\frac{\pi}{2} = \pm j$$

si ha inoltre per un induttore ideale

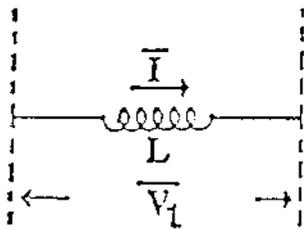


fig. 9c

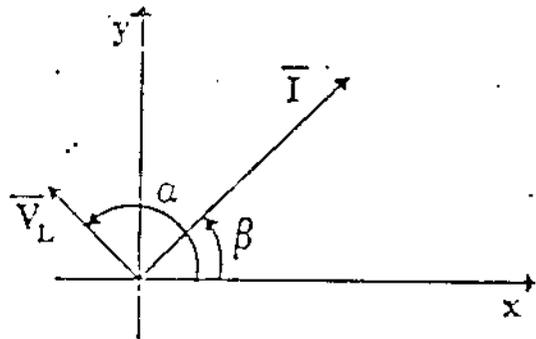


fig. 9d

$$V_L e^{j\alpha} = j\omega LI e^{j\beta}$$

ossia

$$V_L e^{j\alpha} = \omega LI e^{j(\beta + \frac{\pi}{2})}$$

da cui

$$\begin{cases} V_L = \omega LI \\ \alpha = \beta + \frac{\pi}{2}, \quad (\varphi = \frac{\pi}{2}); \end{cases}$$

PER UN CONDENSATORE IDEALE:

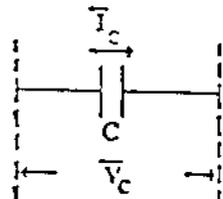


fig. 9e

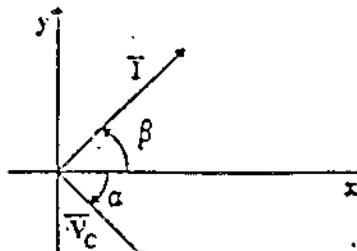


fig. 9f

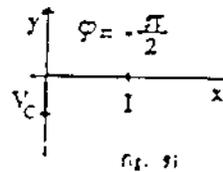
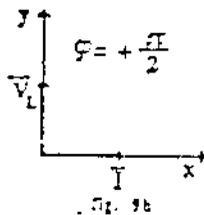
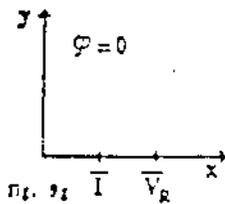
$$V_C e^{j\alpha} = -j \frac{1}{\omega C} I e^{j\beta}$$

ossia

$$V_C e^{j\alpha} = \frac{1}{\omega C} I e^{j(\beta - t)} \quad , \quad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} V_C = \frac{1}{\omega C} I \\ \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\varphi = -\frac{\pi}{2})$$

Se la fase della corrente è nulla si ha:



1.5.3 Impedenza

Si consideri un generico elemento passivo ideale percorso dalla corrente $i(t)$ quando ai suoi capi sia applicata la ddp sinusoidale $v(t)$.

$$\text{Sia } \bar{v}(t) = V e^{j\alpha} e^{j\omega t} \quad , \quad \bar{i}(t) = I e^{j\beta} e^{j\omega t} \quad ,$$

si consideri il rapporto

$$\frac{\bar{v}(t)}{\bar{i}(t)} = \frac{V e^{j\alpha} e^{j\omega t}}{I e^{j\beta} e^{j\omega t}} = \frac{V}{I} = \frac{V e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \frac{V}{I} e^{j\varphi}$$

Tale rapporto, come si vede, è un numero complesso, indipendente dal tempo, il cui modulo è il rapporto delle ampiezze V e I della tensione e della corrente e la cui anomalia è la differenza delle rispettive fasi.

Posto $Z = \frac{V}{I}$ si definisce quindi impedenza complessa di un elemento ideale la grandezza

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi} = \frac{V}{I}$$

Per quanto visto nel Par. 1.5.2 si hanno le seguenti

espressioni di \bar{Z} per i tre elementi passivi ideali:

$$\bar{Z}_R = R, \quad \bar{Z}_L = j\omega L, \quad \bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

e quindi, rispettivamente,

$$\begin{cases} Z_R = R \\ \varphi = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} Z_L = \omega L \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} Z_C = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Si noti che Z_L e Z_C dipendono dalla frequenza della tensione applicata. Si osservi inoltre che la definizione di impedenza complessa consente di scrivere la relazione tra le ampiezze complesse della tensione ai capi di un elemento ideale in regime sinusoidale e della corrente che lo percorre come

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I} \quad (4)$$

relazione formalmente analoga all'espressione della legge di Ohm per tensioni e correnti continue e stazionarie.

La (4) esprime la "legge di Ohm in regime sinusoidale".

1.5.4 Impedenza equivalente di una rete passiva.

Si consideri una rete passiva costituita da elementi ideali comunque connessi; scelti due qualsiasi punti A e B della rete si definisce impedenza complessa equivalente della rete vista da A e B il rapporto

$$\bar{Z}_a = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$$

in cui \bar{V} è l'ampiezza complessa della tensione sinusoidale applicata tra A e B mediante un generatore ideale di tensione e \bar{I} l'ampiezza complessa della intensità della corrente da esso erogata.

L'impedenza equivalente di una rete in regime sinusoidale è dunque un numero complesso che si suole scrivere nella forma trigonometrica

$$\bar{Z}_{eq} = R + jX$$

in cui R è la componente reale e X , coefficiente dell'immaginario, viene usualmente chiamato reattanza. Si ha quindi

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ e } \tan \varphi = \frac{X}{R}$$

essendo φ l'anomalia di \bar{Z}_{eq} .

Si suole chiamare ammettenza \bar{Y} il reciproco $1/\bar{Z}$ dell'impedenza; nel caso di una rete passiva l'ammettenza è un numero complesso e si può scrivere

$$\bar{Y} = G + jS$$

ove G si chiama conduttanza e S suscettanza. Si ha quindi:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \text{ , } S = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

Si ha ovviamente

$$\arctan \frac{S}{G} = -\varphi$$

La precedente definizione operativa di impedenza equivalente consente di determinare tale grandezza anche se sono incogniti gli elementi che costituiscono la rete e se di essa non è nota la configurazione.

Qualora invece siano noti i singoli elementi e si conosca la configurazione della rete, è possibile esprimere l'impedenza equivalente in funzione delle impedenze degli elementi

costituenti.

Si deducono ora le espressioni della impedenza equivalente nei due fondamentali casi particolari in cui gli elementi passivi siano in serie o in parallelo.

a) Serie

Siano $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_n$ le impedenze complesse di n elementi passivi connessi in serie (v. fig. 10)

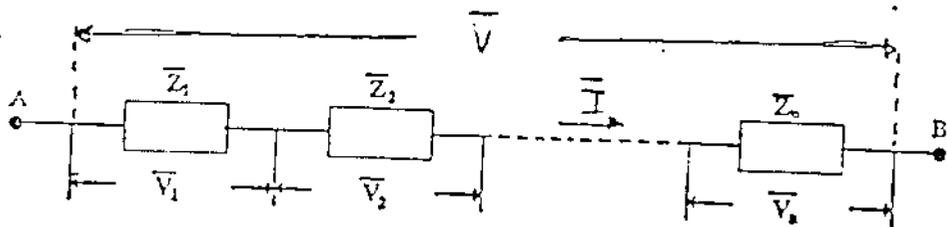


fig. 10

Si ha:

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n}{\bar{I}} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_n$$

b) Parallelo

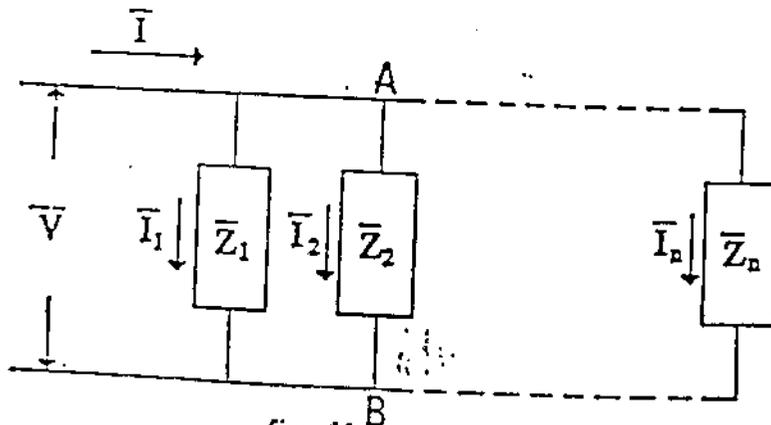


fig. 11

si ha per definizione $\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$

da cui

$$\frac{1}{\bar{Z}_n} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n}{\bar{V}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n}$$

che si può scrivere

$$\bar{Y}_n = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \dots + \bar{Y}_n$$

essendo \bar{Y}_k l'ammettenza del ramo k-esimo.

Si precisa che la relazione $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n$ non è in contraddizione con il 1° principio di Kirchhoff in quanto il verso delle correnti è relativo a quello della differenza di potenziale, assunto p. es. positivo in A e negativo in B.

In questo caso, pertanto, i segni positivi delle \bar{I}_k indicano correnti uscenti dal nodo mentre per la corrente \bar{I} il segno positivo indica che entra nel nodo.

1.5.5 Esempi di risoluzione di circuiti

Si propone a titolo di esempio lo studio di alcuni semplici circuiti nei quali mediante l'applicazione del metodo simbolico si determinano le relazioni tra le tensioni ai capi dei vari elementi e le correnti che li percorrono; è inoltre eseguita la corrispondente rappresentazione vettoriale.

Es. 1

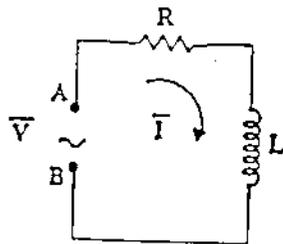


Fig. 12a

$$\bar{Z}_{AB} = R + j\omega L$$

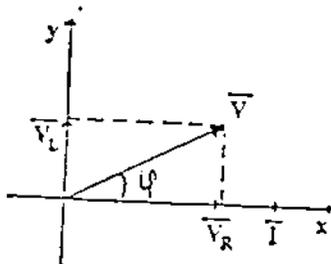


Fig. 12b

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R + j\omega L}$$

$$\bar{V}_R = \bar{I}R = \bar{V} \frac{R}{R + j\omega L}$$

$$V_L = I j\omega L = V \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

Es. 2

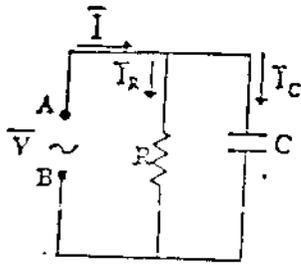


fig. 13a

$$Y_{AB} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

$$I = V \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)$$

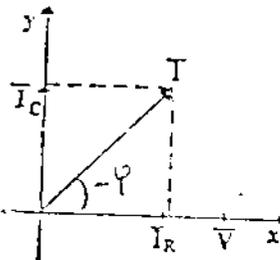


fig. 13b

$$I_R = V \frac{1}{R}$$

$$I_C = V j\omega C$$

$$\varphi = -\arctan \omega RC$$

Es. 3

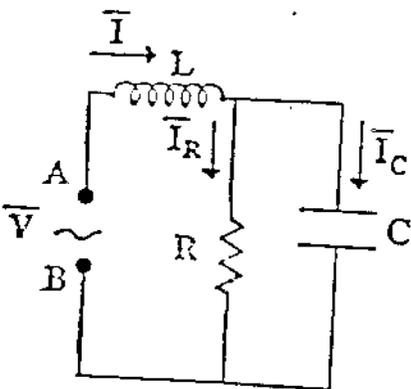


fig. 14a

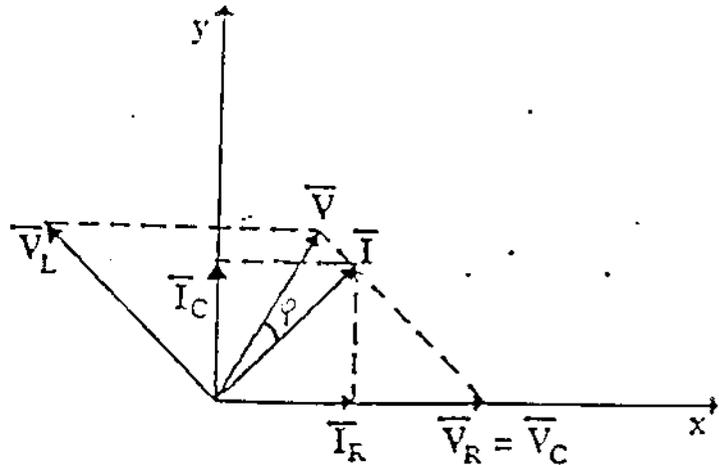


fig. 14b

$$\bar{Z}_{AB} = j\omega L + \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j [\omega L + \omega L(\omega RC)^2 - \omega R^2 C]}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\bar{I} = \bar{V} \frac{1 + (\omega RC)^2}{R + j [\omega L + \omega L(\omega RC)^2 - \omega R^2 C]}$$

$$\bar{V}_L = j\omega L \bar{I} \quad \bar{I}_R = \bar{I} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} ; \bar{I}_C = \bar{I} \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\bar{V}_R = \bar{V}_C = \frac{\bar{I} R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L + \omega L(\omega RC)^2 - \omega R^2 C}{R}$$

1.5.6 Teoremi di Thevenin e di Norton

Si è già visto nel caso della corrente continua che i teoremi di Thevenin e di Norton sono conseguenza della linearità delle relazioni tra cadute di potenziale e intensità di corrente (legge di Ohm e principi di Kirchhoff).

Tale linearità, come si è visto, è valida anche nel caso dei circuiti in regime sinusoidale stazionario purché ci si riferisca all'ampiezza complessa di tensioni e correnti. Pertanto, con procedimento formalmente analogo a quello seguito nel caso della corrente continua, si ricavano i seguenti risultati:

a- Teorema di Thevenin:

data una rete costituita da elementi attivi e passivi, ove per elementi attivi si intendono generatori isofrequenziali, e fissati due punti A e B di essa, la rete stessa, vista da tali punti, è equivalente a un generatore ideale di tensione \bar{V}_0 della stessa frequenza avente in serie un elemento passivo di impedenza \bar{Z}_0 (vedi fig. 15).

\bar{V}_0 è la tensione esistente a vuoto tra i due punti considerati; \bar{Z}_0 è l'impedenza equivalente della rete passiva vista dagli stessi punti a condizione che ciascun generatore sia sostituito con la propria impedenza interna.

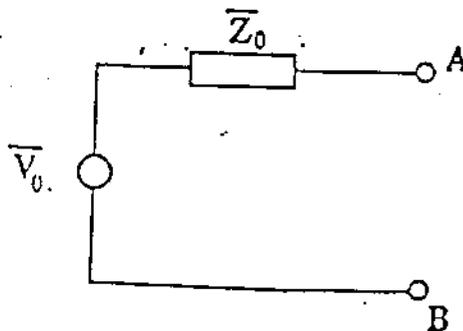
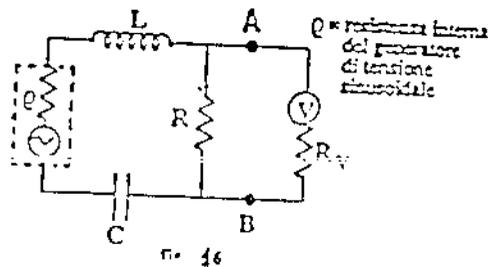


fig. 15

Come esempio si consideri il caso in cui si voglia misurare la differenza di potenziale tra i punti A e B del circuito riportato in fig. 16 utilizzando un voltmetro la cui impedenza interna possa, con buona approssimazione, ritenersi puramente ohmica.



Supposto che sia \bar{V}_0 la ddp esistente tra i punti A e B e \bar{V}_V quella misurata dallo strumento, sussiste la relazione

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_V \left(1 + \frac{\bar{Z}_0}{R_V} \right)$$

Essendo

$$\bar{Z}_0 = \frac{R \left[\rho + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{R + \rho + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

risulta

$$\begin{aligned} \bar{V}_0 &= \bar{V}_V \left(1 + \frac{R \left[\rho + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{\left[R + \rho + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] R_V} \right) = \\ &= \bar{V}_V \frac{R R_V + \rho R_V + j R_V \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + R \rho + j R \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{\left[R + \rho + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] R_V} = \end{aligned}$$

$$= V_V \frac{RR_V + \rho R_V + R\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})(R + R_V)}{[R + \rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] R_V}$$

da cui

$$V_o = V_V \frac{\sqrt{(RR_V + \rho R_V + R\rho)^2 + (R + R_V)^2(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}{R_V \sqrt{(R + \rho)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Calcoli come quello precedente, che danno luogo a risultati esatti, sono spesso laboriosi e comportano in ogni caso la conoscenza di tutti gli elementi del circuito. Qualora si voglia valutare preliminarmente la significatività della correzione, si può calcolare

$$\left| \frac{\bar{Z}_o}{R_V} \right| = \frac{|\bar{Z}_o|}{R_V} = \frac{|R_o + jX_o|}{R_V} = \frac{\sqrt{R_o^2 + X_o^2}}{R_V}$$

poiché

$$V_o = V_V \left| 1 + \frac{\bar{Z}_o}{R_V} \right|$$

essendo, come è noto,

$$1 + \left| \frac{\bar{Z}_o}{R_V} \right| \geq \left| 1 + \frac{\bar{Z}_o}{R_V} \right|$$

si ha

$$V_o \leq V_V \left(1 + \frac{|\bar{Z}_o|}{R_V} \right)$$

da cui

$$\frac{V_o - V_V}{V_V} \leq \frac{|\bar{Z}_o|}{R_V}$$

Poiché $\frac{V_o - V_V}{V_V}$ è l'errore sistematico relativo dovuto alla perturbazione introdotta dallo strumento, se

$$\frac{|\bar{Z}_o|}{R_V} \ll \frac{\Delta V_V}{V_V}$$

la correzione è trascurabile.

Come è evidente, la condizione espressa dalla disuguaglianza precedente è sufficiente ma non necessaria.

b) Teorema di Norton:

data una rete costituita da elementi attivi e passivi, e fissati due punti A e B di essa, la rete stessa, vista da tali punti, è equivalente ad un generatore ideale di corrente erogante una corrente \bar{I}_0 il quale ha in parallelo un elemento passivo di impedenza \bar{Z}_0 .

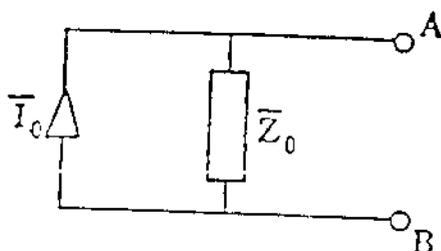


fig. 17

\bar{I}_0 è la corrente di corto circuito tra i punti A e B della rete e \bar{Z}_0 ha lo stesso significato enunciato nel Teorema di Thevenin.

1.5 Circuiti attenuatori e sfasatori

1.6.1 Quadrupoli passivi

Vengono ora studiate le risposte di alcuni particolari circuiti passivi sollecitati da segnali sinusoidali di tensione aventi frequenza variabile.

Tali circuiti possono essere riguardati come quadrupoli (vedi fig. 51);



fig. 51

nel senso che presentano due terminali di ingresso tra i quali viene applicata la sollecitazione, e due terminali di uscita tra i quali viene prelevata la risposta.

Ogni quadrupolo è caratterizzato dall'attenuazione $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda} = \frac{V_u}{V_i}$$

che è una grandezza complessa dipendente dalle caratteristiche degli elementi passivi e della frequenza; \bar{A} definisce completamente le relazioni di ampiezza e fase tra i segnali di ingresso e di uscita pur essendo da essi indipendente: è infatti

$$A = \frac{V_u}{V_i}, \quad \arg \bar{A} = \alpha_u - \alpha_i$$

ove α_u e α_i sono rispettivamente le fasi del segnale di uscita e di quello di ingresso.

1.5.2 Alcuni particolari circuiti attenuatori e sfasatori

Si chiamano attenuatori alcuni particolari quadrupoli l'attenuazione dei quali è funzione monotona della frequenza; è quindi possibile selezionare intervalli di frequenza in corrispondenza dei quali il modulo di \bar{A} ed il suo argomento hanno valori sensibilmente diversi (da $= 1$ a $\ll 1$ e da $= 0$ a $= \pm \pi/2$ rispettivamente).

-Circuito CR

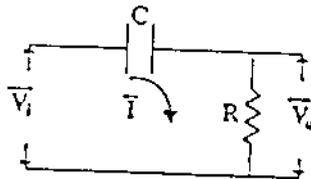


Fig. 11

Si ha:

$$\bar{A} = \frac{V_u}{V_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

e, posto $RC = \tau$, "costante di tempo" del circuito,

$$\bar{A} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega\tau}}$$

E' quindi

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}}, \quad \arg \bar{A} = \gamma = \arctan \frac{1}{\omega\tau} \quad (5)$$

Gli andamenti di A e γ in funzione di ν sono riportati in fig. 19a e 19b.

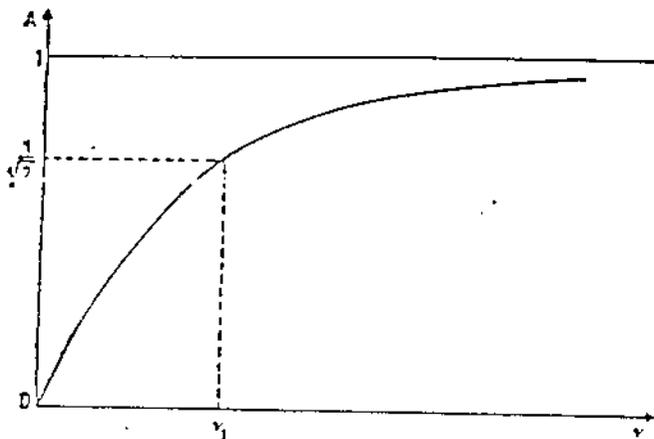


fig. 19a

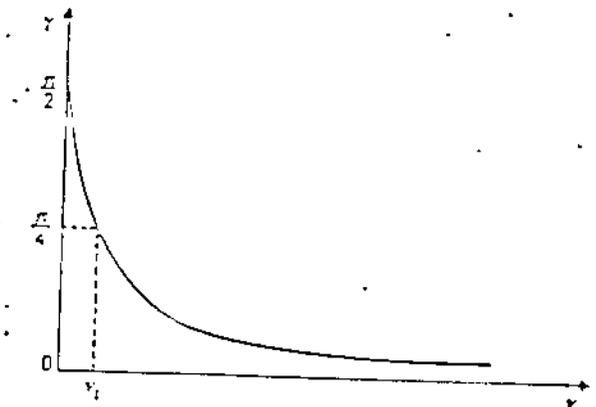


fig. 19b

Si vuole definire frequenza "di taglio" la frequenza ν_T tale che $A(\nu_T) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ per cui si ha $\omega_T r = 1$ da cui $\nu_T = \frac{\omega_T}{2\pi} = \frac{1}{2\pi r}$

(Si noti che ν_T è il valore della frequenza per cui la componente reattiva dell'impedenza del circuito è uguale a quella resistiva.)

La frequenza di taglio è un parametro caratteristico del circuito che fornisce una indicazione della zona di transizione dei valori dell'attenuazione nel senso precedentemente detto. Si ha infatti per $\nu \ll \nu_T$ $A \ll 1$, per $\nu \gg \nu_T$ $A \approx 1$.

Questo comportamento consente di denominare il circuito descritto come filtro "passa-alto", nel senso che segnali sinusoidali di frequenza $\nu \gg \nu_T$ vengono trasmessi con ampiezza praticamente invariata, mentre segnali sinusoidali con frequenza $\nu \ll \nu_T$ vengono fortemente attenuati. Di conseguenza, nel caso in cui il segnale in ingresso sia periodico non sinusoidale, il circuito fornisce in uscita un segnale periodico di forma diversa rispetto

a quello in ingresso.

Infatti un segnale periodico può essere riguardato, secondo Fourier, come risultante dalla sovrapposizione di infiniti segnali sinusoidali di frequenza multipla della propria. Il circuito, pertanto, fornisce una risposta diversa per ciascun segnale componente in funzione della frequenza di esso.

Circuito RL

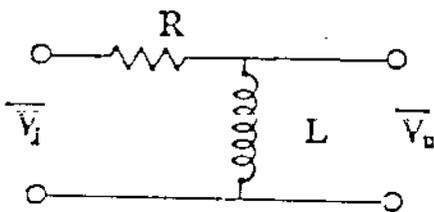


fig. 20

Si ha $\bar{\lambda} = \frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_i} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$

ed essendo $\frac{L}{R} = r$

$$\bar{\lambda} = \frac{j\omega r}{1 + j\omega r} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega r}}$$

La risposta di questo circuito è quindi identica a quella del circuito CR.

Circuito RC

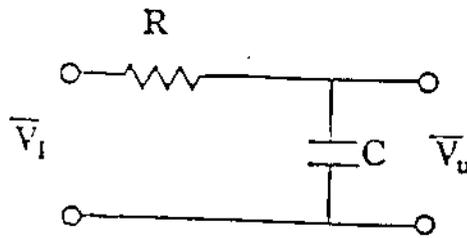


fig. 21

Si ha

$$\bar{\lambda} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

ed essendo $RC = r$

$$\bar{A} = \frac{1}{1+j\omega r}$$

E' quindi

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 r^2}}, \quad \arg \bar{A} = \gamma = \arctan(-\omega r) \quad (6)$$

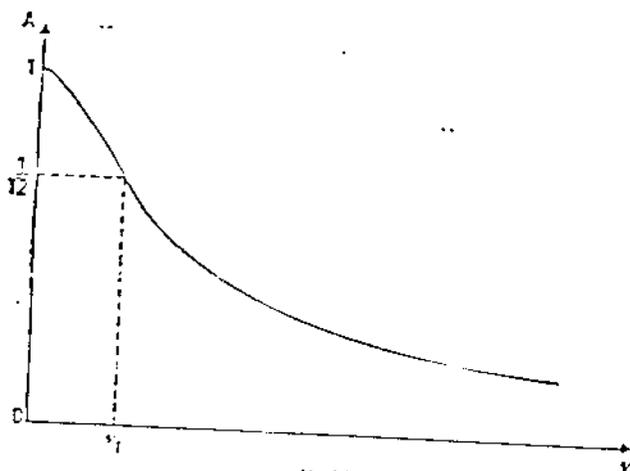


fig. 22a

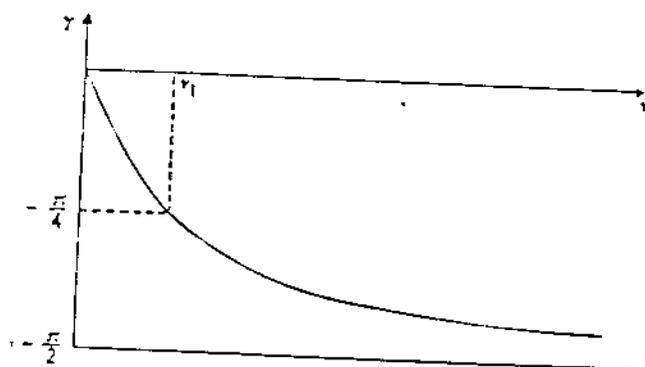


fig. 22b

Definita la frequenza di taglio come per il circuito CR si ha

$$\omega_T = \frac{1}{2\pi r}$$

Come si vede, in questo caso, per

$\gamma \ll \gamma_T$ è $A \approx 1$, mentre per $\gamma \gg \gamma_T$, $A \ll 1$;
il circuito si comporta quindi da filtro "passa-basso".

Circuito LR

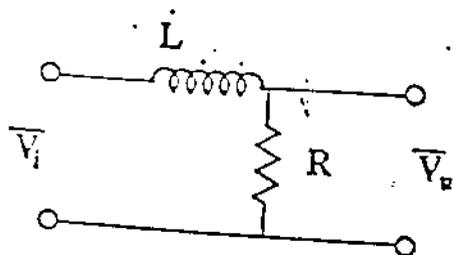


fig. 23

Si ha:

$$\bar{A} = \frac{R}{R+j\omega L} = \frac{1}{1+j\omega \frac{L}{R}}$$

essendo $\tau = \frac{L}{R}$ $\bar{A} = \frac{1}{1+j\omega\tau}$

come nel caso del circuito RC.

Le curve di risposta dei circuiti attenuatori, sia per quanto riguarda la funzione $A(\nu)$ che la funzione $\gamma(\nu)$ dipendono dalla sola costante τ .

Esse sono suscettibili di una rappresentazione grafica che può essere particolarmente utile.

Riscritte le (5) e (6) nella forma

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_T}\right)^2}}, \quad \gamma = \arctan \frac{\nu}{\nu_T} \quad (7) \text{ per il filtro passa-alto}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_T}\right)^2}}, \quad \gamma = -\arctan \frac{\nu}{\nu_T} \quad (8) \text{ per il filtro passa-basso}$$

e posto $x = k \log_b \frac{\nu}{\nu_T}$ si ha $\frac{\nu}{\nu_T} = b^{x/k}$

e quindi, nel caso dei filtri passa-alto (vedi eq. 7)

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + b^{-2x/k}}} \quad (9a) \quad , \quad \gamma = \arctan b^{-x/k} \quad (9b)$$

e nel caso dei filtri passa-basso (vedi eq. 8)

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+b^2x/k}} \quad (10a)$$

$$\gamma = -\arctan b^2x/k \quad (10b)$$

Gli andamenti delle (9a) e (10a) sono riportati nella fig. 24 a, rispettivamente curva a) e curva b), e quelle della (9b) e (10b) nella fig. 24b -rispettivamente curva a) e curva b). Dalle figure risultano evidenti alcune caratteristiche di simmetria.

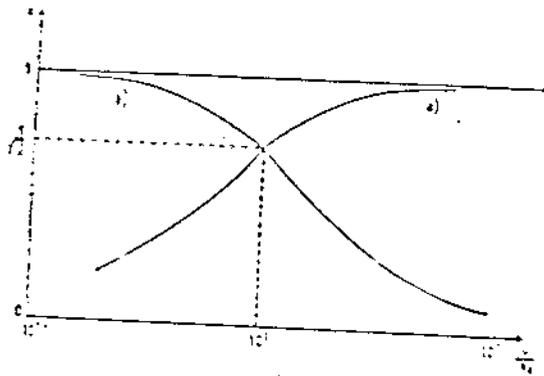


fig. 24a

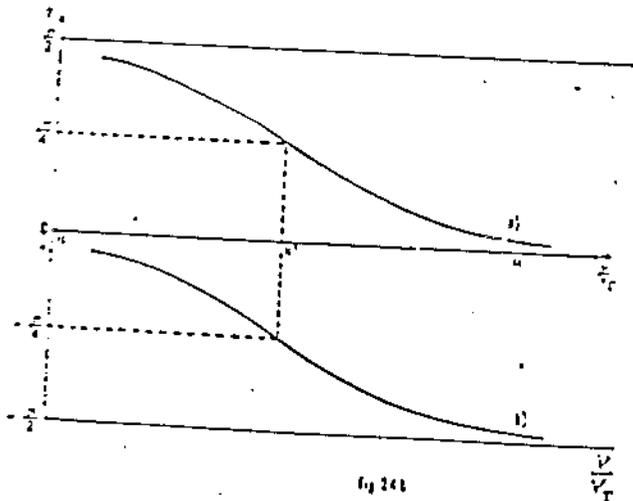


fig. 24b

La scelta della variabile $\frac{v}{v_r}$, anche indipendentemente dalla rappresentazione in scala logaritmica, consente di ottenere delle curve "universali" per $A(\frac{v}{v_r})$, $\gamma(\frac{v}{v_r})$ che descrivono il comportamento dei circuiti considerati indipendentemente dalle loro caratteristiche particolari.

1.2 Circuiti risonanti

In analogia con i fenomeni di risonanza in meccanica si sogliono

chiamare risonanti quei circuiti i quali, sollecitati da segnali sinusoidali di frequenza variabile, forniscono una risposta sinusoidale la cui ampiezza presenta un massimo (più o meno pronunciato) in corrispondenza di una particolare frequenza determinata dagli elementi passivi del circuito stesso.

Tra i circuiti risonanti si considerano qui due esempi fondamentali, costituiti dai circuiti RLC serie e parallelo.

1.7.1 Circuito RLC serie

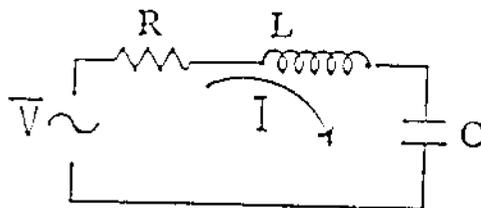


fig. 25

Si consideri un generatore ideale di tensione sinusoidale di frequenza variabile connesso ai terminali di una rete passiva costituita da un resistore, un condensatore e un induttore ideali posti in serie (vedi fig. 25). In condizioni di regime il circuito fornisce una risposta rappresentata da una corrente sinusoidale che ha la stessa frequenza della tensione applicata. Ci si propone di studiare l'ampiezza dell'intensità i corrente nel circuito, ed il suo sfasamento rispetto alla tensione \bar{V} (costante) del generatore. A tale scopo si consideri l'impedenza \bar{Z} vista dai terminali del generatore:

$$\bar{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

e quindi

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \varphi = \arg \bar{Z} = \arctan \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

i cui andamenti in funzione di ω sono riportati nelle fig. 26 e 27.

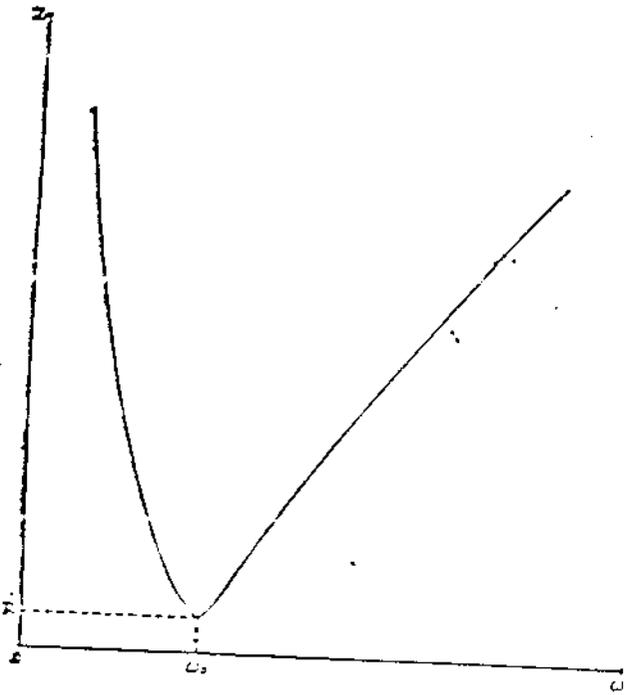


Fig. 11

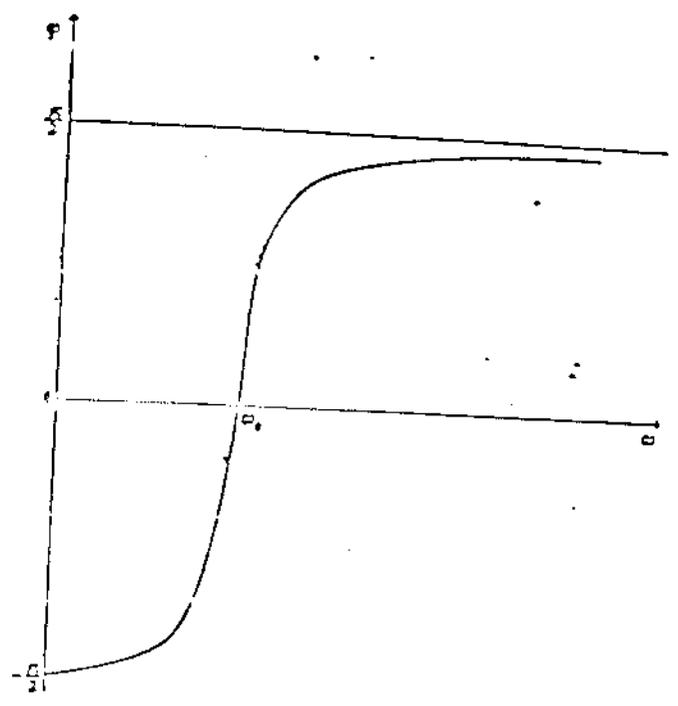


Fig. 12

Come si vede, Z presenta un minimo per quel particolare valore ω_0 di ω che annulla la reattanza, cioè per $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

In tali condizioni le tensioni ai capi rispettivamente dell'induttore e del condensatore sono opposte per ogni valore di ω e l'impedenza del circuito si riduce alla sola componente resistiva.

Per quanto riguarda l'intensità di corrente si può scrivere:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

da cui

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Ne segue che I presenta un massimo per $\omega = \omega_0$ (v. fig. 28) essendo

$$I(\omega_0) = \frac{V}{R}$$

Tale valore è quindi tanto maggiore quando minore è R .

- La fase della intensità di corrente differisce da quella della tensione della quantità $-\varphi$:

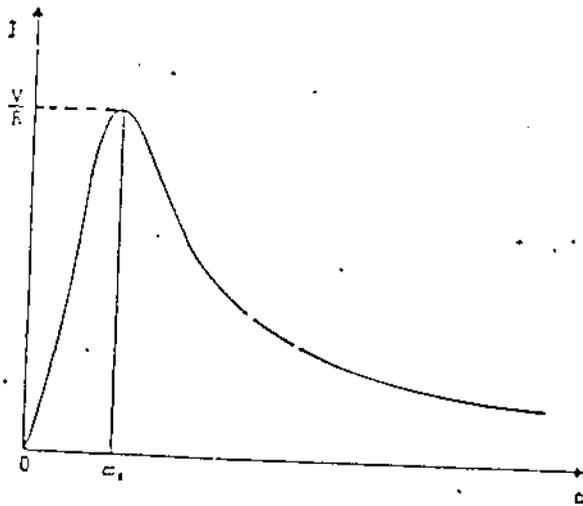


fig.28

1.7.2 Circuito RLC serie come filtro passa-banda.

Un circuito RLC serie, alimentato da un generatore di tensione sinusoidale a frequenza variabile, fornisce ai capi del resistore un segnale di tensione la cui ampiezza è funzione della frequenza e presenta lo stesso andamento della $I(\omega)$. Tale circuito può essere riguardato come un filtro in cui il segnale di ingresso è

fornito ai capi della serie e quello di uscita è prelevato ai capi del resistore.

L'attenuazione complessa di questo filtro è

$$\bar{A} = \frac{V_R}{V} = \frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

che, come si vede, è indipendente dall'ampiezza e dalla fase del segnale applicato mentre dipende dalla frequenza di esso e dalle caratteristiche degli elementi passivi del circuito.

L'andamento del modulo A e del suo argomento, sono riportati nelle figg. 29a e 29b.

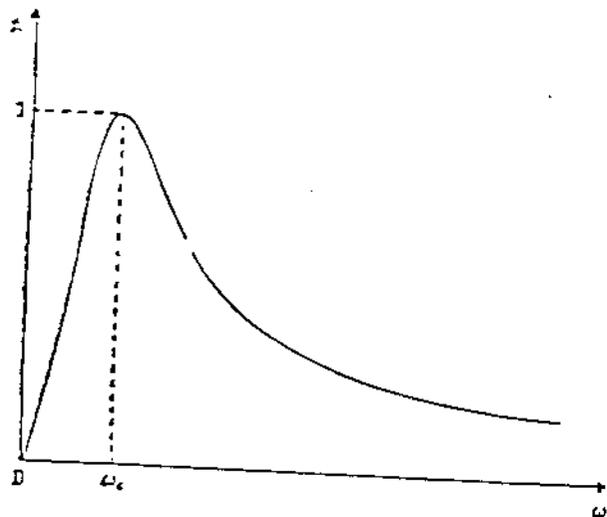


fig. 29a

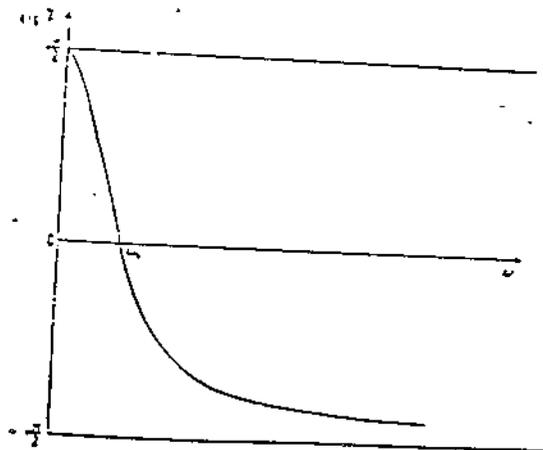


fig. 29b

Si definisce banda passante l'intervallo di frequenza di estremi ν_1, ν_2 ($\nu_2 > \nu_1$) in corrispondenza dei quali si ha $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si caratterizza in tal modo il comportamento del circuito nel senso che per valori di ν compresi tra ν_1 e ν_2 l'attenuazione è prossima a 1 (compresa tra 1 e $\frac{1}{\sqrt{2}}$) mentre per $\nu \ll \nu_1$ e $\nu \gg \nu_2$

essa è molto vicina a zero. Il filtro prende quindi il nome di "passabanda".

γ_1 e γ_2 dipendono dalle caratteristiche degli elementi passivi del circuito e si ottengono risolvendo l'equazione

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R\sqrt{2}$$

Tale condizione si traduce nelle equazioni

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = -R \qquad \omega L - \frac{1}{\omega C} = R$$

le soluzioni positive delle quali sono rispettivamente

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} \qquad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

l'ampiezza della banda passante risulta quindi

$$\frac{1}{2\pi} (\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L} \qquad (11)$$

Per caratterizzare la capacità selettiva del filtro si suole definire il "fattore di merito"

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1} \qquad (12)$$

(ove $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$) il cui reciproco $\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_0}$ esprime la

frazione della frequenza di risonanza rappresentata dalla larghezza di banda. Un tale filtro è quindi tanto più selettivo quanto più piccola è tale frazione, cioè quanto più grande è Q . Corrispondentemente la curva di attenuazione è tanto più "piccata" quanto maggiore è Q .

Sostituendo nella (12) la (11) si ottengono per il fattore di merito le espressioni

$$Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Come si vede per ogni fissata coppia di valori L e C cui corrisponde la pulsazione di risonanza $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ il fattore di merito è inversamente proporzionale a R .

Può essere rappresentativo esprimere il modulo di A e l'argomento γ di \bar{A} in funzione di Q e di ω_0 . Si ha

$$\begin{aligned} A &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 C^2} (\omega LC - 1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 C^2 \omega_0^2} (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 (\frac{\nu}{\nu_0} - \frac{\nu_0}{\nu})^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \arctan \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) = \arctan \frac{1}{RC} \left(\frac{1}{\omega} - \omega LC \right) \\ &= \arctan \frac{1}{RC \omega_0} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \arctan Q \left(\frac{\nu_0}{\nu} - \frac{\nu}{\nu_0} \right) \end{aligned}$$

Le funzioni $A(\nu)$ e $\gamma(\nu)$ dipendono quindi soltanto dai due parametri Q e ν_0 , i quali, come si è visto, dipendono a loro volta dalle caratteristiche degli elementi passivi del circuito.

Nelle figure 30a, b sono rappresentate, per un fissato ν_0 , due diverse funzioni $A(\nu)$ e $\gamma(\nu)$ corrispondenti ad altrettanti valori di Q .

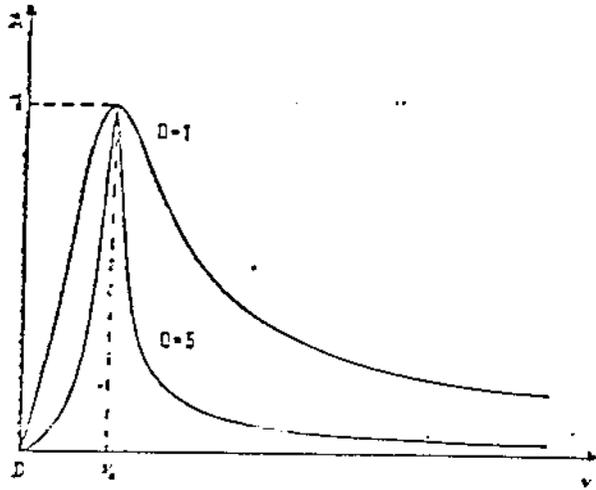


fig. 30a

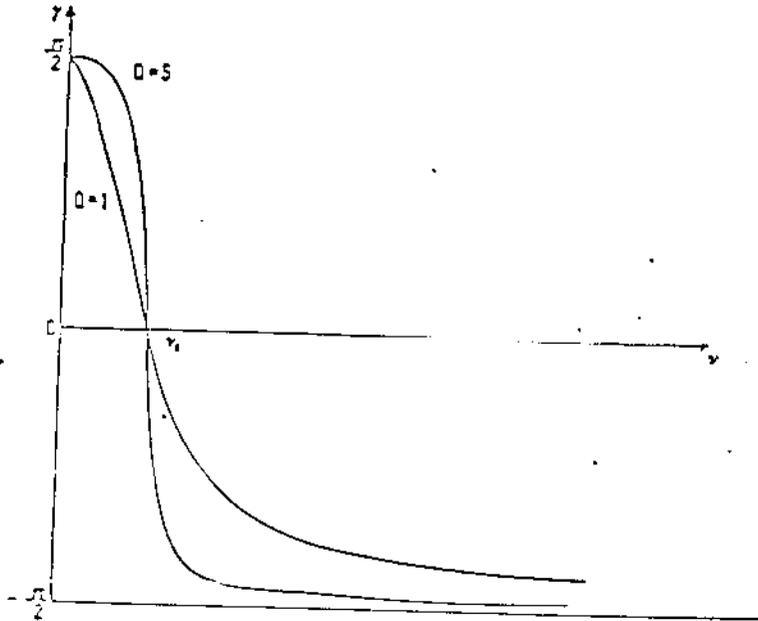


fig. 30b

Rappresentando $A(\gamma)$ e $\gamma(\gamma)$ in carta semilogaritmica ed assumendo come variabile indipendente $\frac{\gamma}{\gamma_0}$ si ottengono delle curve "universali", dipendenti soltanto dal parametro Q (vedi figg. 31a, b).

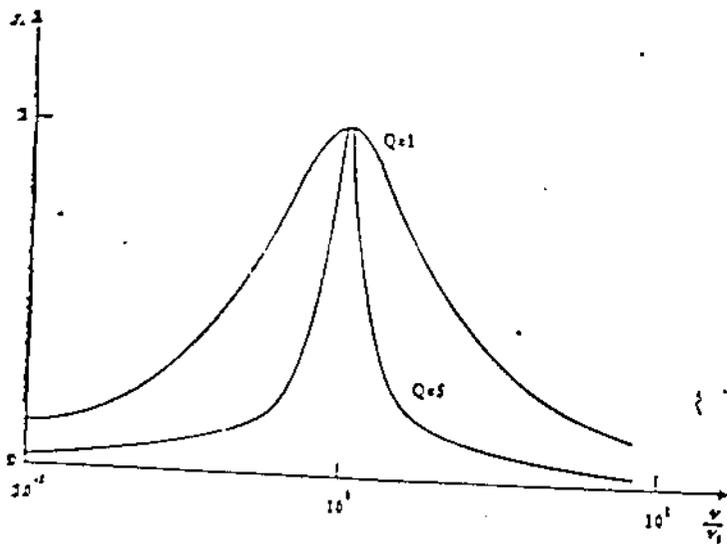


fig. 31a

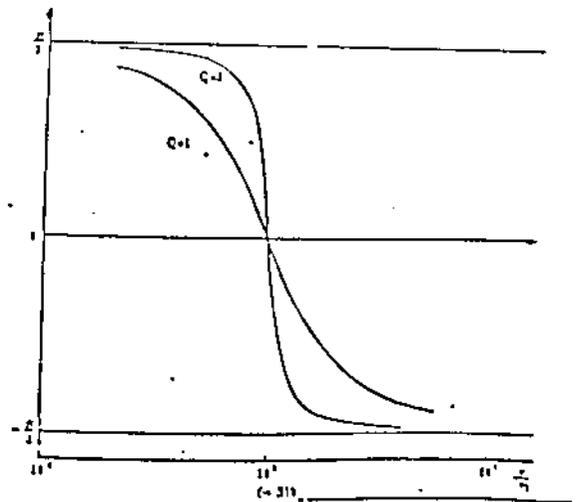
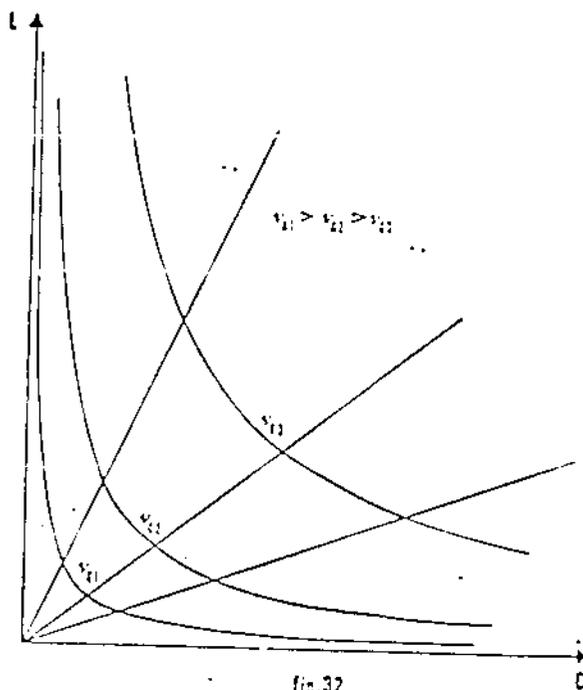


fig. 31b

I risultati ottenuti sono suscettibili di una significativa rappresentazione grafica, che evidenzia le connessioni tra le caratteristiche R , L , e C degli elementi passivi ed i parametri Q e γ_0 che definiscono il comportamento del circuito.



Nel piano (L, C) l'equazione $LC = \frac{1}{4\pi^2 \gamma_0^2}$ definisce una famiglia di iperboli equilatera riferite agli asintoti ciascuna delle quali è individuata da un particolare valore di γ_0 , mentre l'equazione $Q^2 = \frac{1}{R^2} \frac{L}{C}$,

da cui $L = Q^2 R^2 C$, definisce un fascio di rette passanti per l'origine di coefficiente angolare $Q^2 R^2$ (vedi fig. 32).

Fissati ad esempio i valori dei parametri Q e γ_0 , il grafico mostra che, al variare di R , resta determinata una coppia di valori L e C come coordinate del punto di intersezione tra l'iperbole individuata da γ_0 e la retta di coefficiente angolare $Q^2 R^2$.

Qualora invece siano fissati γ_0 e R , la coppia (L, C) dipende dal valore di Q e, come si vede, si ha un Q tanto maggiore quanto maggiore è L (e, in corrispondenza, quanto più piccola è C).

1.7.3 Sovratensioni

Un interessante fenomeno può verificarsi relativamente ai segnali di tensione esistenti ai capi dell'induttore e del condensatore.

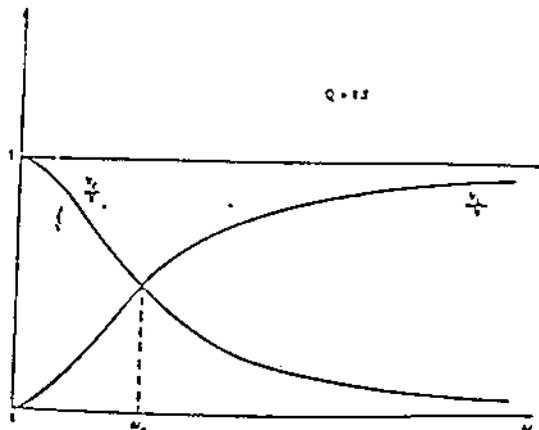
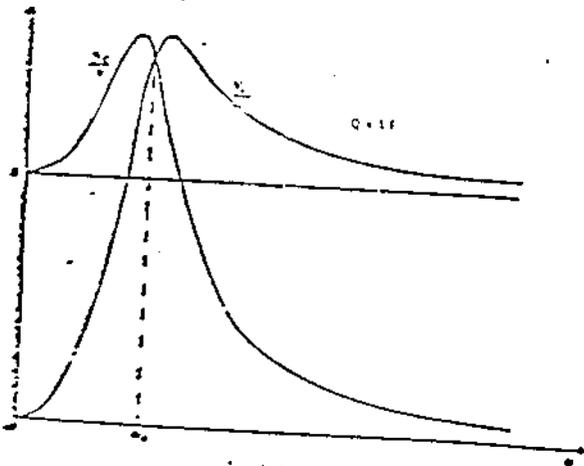
Sotto certe condizioni infatti, come è dimostrato nel seguito, le ampiezze delle tensioni ai capi degli elementi reattivi sono maggiori di quella della tensione ai capi della serie. Tale fenomeno, noto con il nome di sovratensione, deve essere preso in considerazione per quanto riguarda problemi di isolamento, in particolare nelle macchine elettriche.

Allo scopo di evidenziare tale fenomeno, si considerino le grandezze $\frac{V_L}{V}$ e $\frac{V_C}{V}$; per esse si ha:

$$\frac{V_L}{V} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$\frac{V_C}{V} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Gli andamenti delle due funzioni sono rappresentati nelle figure 33 a, b per $Q^2 > \frac{1}{2}$ e $Q^2 < \frac{1}{2}$.



Come si vede, nel primo caso le tensioni ai capi degli elementi reattivi sono maggiori, in determinati intervalli di frequenza, della tensione ai capi della serie.

Il massimo di ciascuna di tali curve è crescente al crescere di Q e si presenta in $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ per $\frac{V_L}{V}$, e in $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ per $\frac{V_C}{V}$.

1.7.4 Circuito RLC parallelo

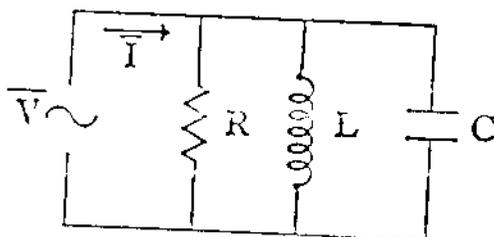


fig. 34

Si descrive ora il comportamento di un circuito costituito da un resistore, un condensatore ed un induttore ideali posti in parallelo nei due casi limite in cui il circuito è alimentato da un generatore ideale di tensione sinusoidale o da un generatore ideale di corrente sinusoidale, entrambi di frequenza variabile.

Si osservi che un generatore reale approssima bene un generatore ideale di tensione o di corrente a seconda che la sua resistenza interna (alla quale generalmente si riduce la sua impedenza di uscita) sia molto minore o molto maggiore della resistenza ohmica del circuito.

1.7.1 Circuito antirisonante in corrente

Il fig. 34 è riportato lo schema del circuito, in cui \bar{V}

rappresenta l'ampiezza complessa della f.e.m di un generatore ideale di tensione ($\bar{V} = \text{cost.}$)

L'ammettenza $\bar{Y} = 1/\bar{Z}$ della rete passiva vista dai terminali del generatore è data da:

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

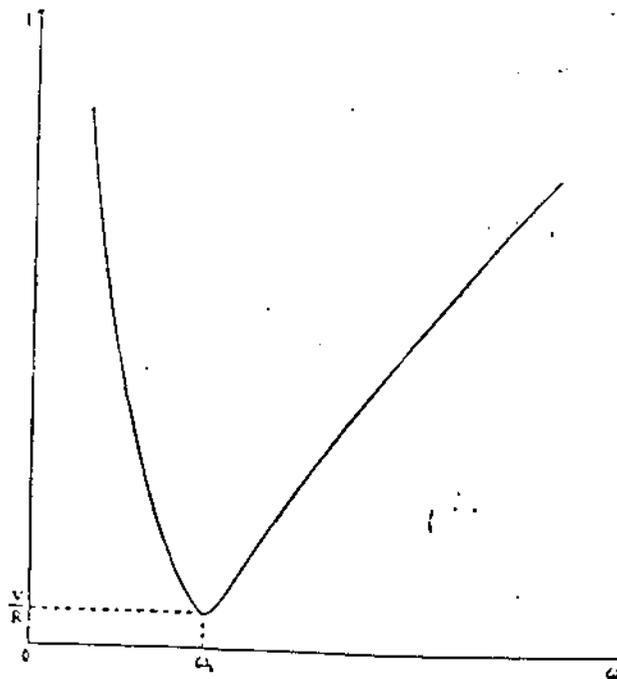
da cui

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Ne segue che l'ampiezza dell'intensità di corrente erogata dal generatore è

$$I = VY = V \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

il cui andamento è riportato in fig. 35.

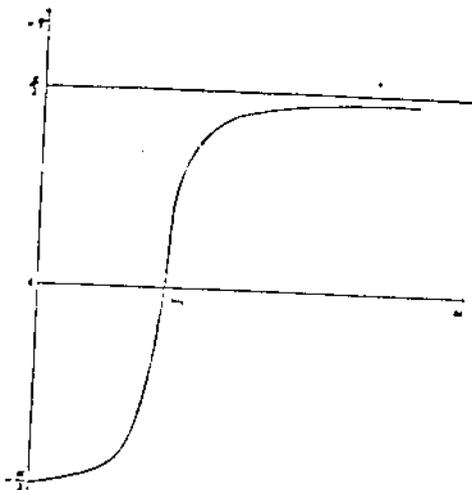


Come si vede l'ampiezza dell'intensità di corrente presenta un minimo per $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Lo sfasamento $-\varphi$ tra corrente e tensione, rappresentato

dall'anomalia di \bar{Y} , vale $-\varphi = \arctan R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

ed il suo andamento è rappresentato in fig. 36.



1.7.6 Circuito risonante in tensione

La fig. 37 rappresenta lo schema del circuito, in cui \bar{I} è l'ampiezza complessa della intensità di corrente erogata da un generatore ideale di corrente ($\bar{I} = \text{cost.}$)

Essendo, come nel caso precedente,

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

si ha, per l'ampiezza complessa della tensione ai capi del parallelo

$$\bar{V} = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} = \frac{\bar{I}}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

e quindi

$$V = \frac{I}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \quad (12a)$$

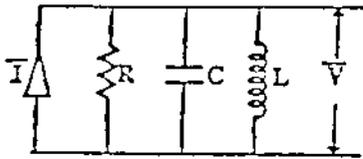


fig. 37

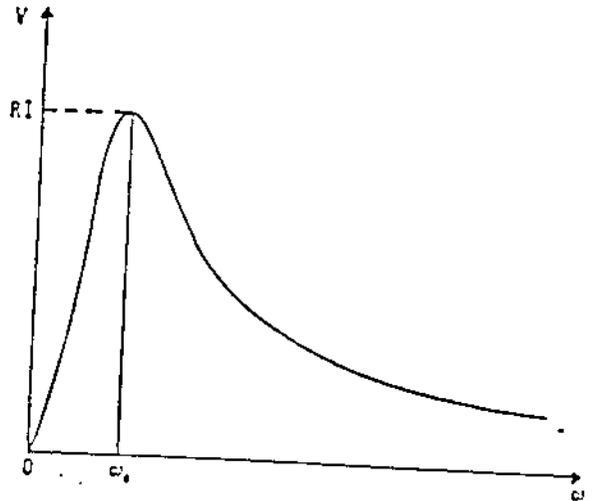


fig. 38

L'andamento di V in funzione di ω è riportato in fig. 38.

La curva, che descrive anche in questo caso un fenomeno di risonanza, presenta un massimo per $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (pulsazione di risonanza) ove

$$V(\omega_0) = V_0 = RI. \quad (12b)$$

Lo sfasamento tra tensione e corrente varia in funzione di ω nel modo seguente:

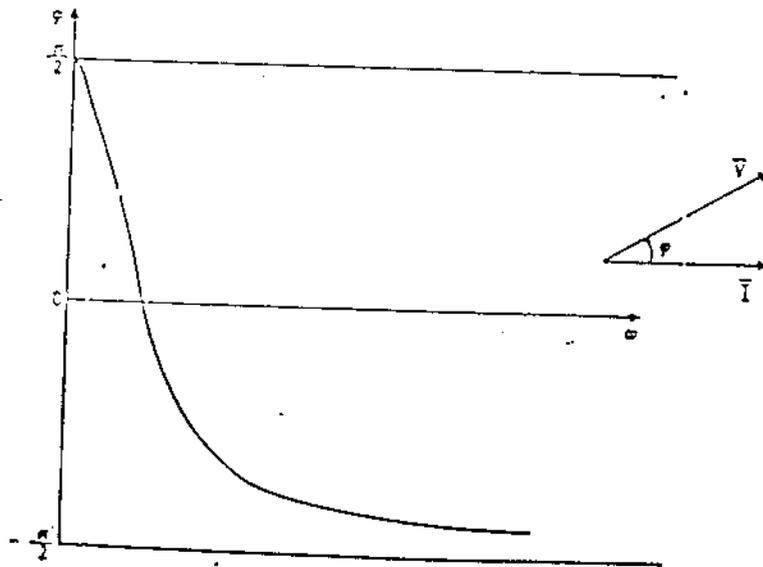


fig. 39

Per quanto riguarda lo studio al variare di ω delle correnti che attraversano i singoli elementi si considerino i rapporti di esse con la corrente di alimentazione I . si ha: $\frac{I_R}{I} = \frac{1/R}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$

Questa funzione ha lo stesso andamento della $\frac{V_L(\omega)}{V}$ nel circuito RLC serie ed è graficata nella fig. 40:

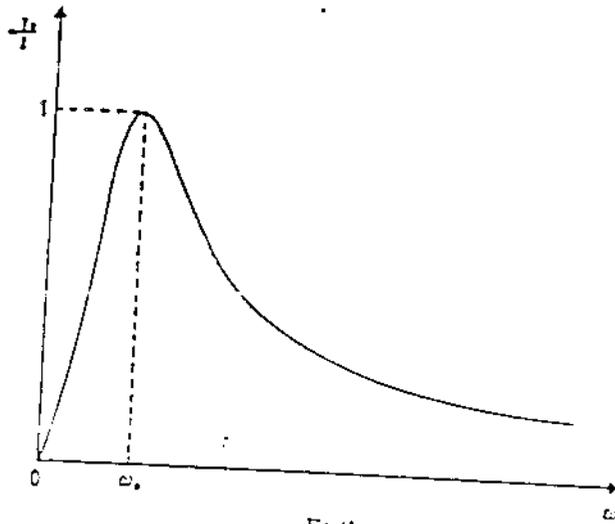


Fig. 40

Si ha inoltre

$$\frac{I_L}{I} = \frac{\frac{1}{\omega L}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

$$\frac{I_C}{I} = \frac{\omega C}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

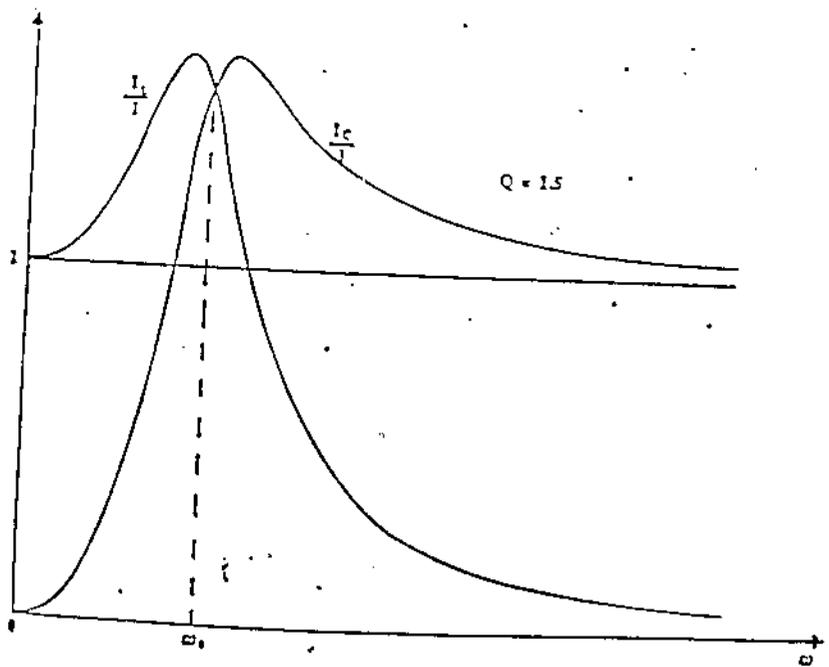


Fig. 41

1974

i cui andamenti sono riportati in fig. 41; come si vede essi sono analoghi a quelli di $\frac{V_C}{V}$ e $\frac{V_L}{V}$ in un circuito RLC serie.

Anche per un circuito risonante parallelo si definisce una banda passante i cui valori estremi γ_1 e γ_2 si ricavano dai valori di ω per i quali $V(\omega) = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$. Per le (12a) e (12b) si ottiene l'equazione

$$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \frac{1}{R} \sqrt{2}$$

che si traduce nelle due seguenti:

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = -\frac{1}{R} \quad \text{e} \quad \omega C - \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{R}$$

Le soluzioni positive delle quali sono rispettivamente

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{L^2 - 4R^2LC}}{2LRC} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{L^2 - 4R^2LC}}{2LRC}$$

L'ampiezza della banda passante risulta quindi

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{1}{2\pi} (\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{RC}$$

ed il fattore di merito

$$Q = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Come si vede, il fattore di merito è il reciproco di quello di un circuito risonante serie costituito dai medesimi elementi passivi.

1.8 Elementi reali di circuito

Finora si è parlato di resistori, condensatori e induttori considerandoli elementi ideali; si è cioè ammesso che per questi elementi la relazione tra tensione e corrente sia tale che una di tali grandezze è proporzionale all'altra o alla sua derivata prima rispetto al tempo. Ciò implica che ogni elemento passivo è

caratterizzato da una ben determinata grandezza fisica (R , L o C) costante rispetto a variazioni di tensione e di frequenza.

In realtà tale assunzione è verificata solo in prima approssimazione per il concorso di fenomeni di diversa natura, per tener conto dei quali ciascun elemento reale può essere rappresentato mediante una combinazione di più elementi ideali opportunamente connessi.

Resistore

È rappresentabile mediante lo schema in fig. 42 in cui

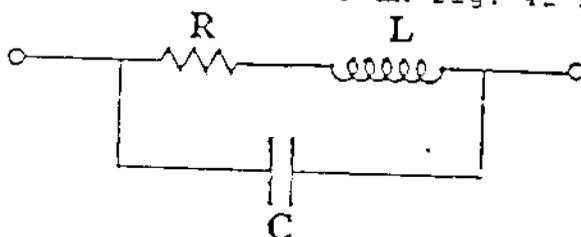


fig. 42

il tiene conto dell'induttanza dei fili e C della capacità di essi.

Per i resistori normalmente usati (ad impasto) i valori di L e C sono molto piccoli, per cui fino a frequenze dell'ordine di 100 MHz lo schema equivalente è:



A questo pregio si contrappone il difetto che per questo tipo di resistori la potenza massima dissipabile è molto piccola (dell'ordine di qualche watt); per grandi potenze si adoperano resistori a filo.

Induttore

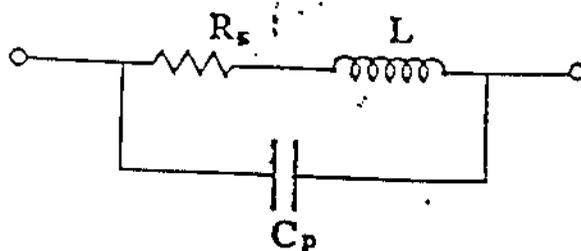


fig. 43

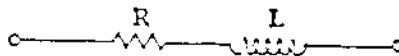
R_s tiene conto della resistenza (ohmica) dell'avvolgimento, dell'effetto pellicolare (ad alta frequenza la corrente passa praticamente sulla sola superficie del conduttore - vedi nota a piè di pagina) e dell'effetto di prossimità (la corrente che circola in una spira subisce l'influenza del campo magnetico creato dalla corrente che circola nella spira accanto); varia con la frequenza.

C_p tiene conto del fatto che fra due spire vicine percorse da una corrente si manifesta un effetto capacitivo.

Il circuito schematizzato in fig. 43 risona alla frequenza

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R_s^2 \frac{C}{L}} ;$$

per frequenze assai più basse della ν_0 lo schema equivalente diventa:



Nota:

L'effetto pellicolare consiste nel fatto che, quando un conduttore è percorso da una corrente sinusoidale, la densità di essa non è uniforme, ma varia con la distanza dalla superficie del conduttore medesimo al variare della frequenza. Per un conduttore di sezione circolare, detta J_0 la densità di corrente superficiale e x la distanza dalla superficie, si ha:

$$J(x) = J_0 e^{-x/\delta}$$

in cui la costante δ varia come $\nu^{-1/2}$.

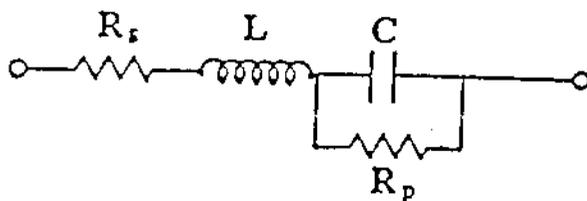
Condensatore

fig. 44

R_s tiene conto della resistenza dei contatti, saldature, ecc.

L tiene conto della induttanza dei fili che vanno alle armature;

R_p tiene conto delle perdite dovute all'isolante interposto tra le armature: varia con la frequenza.

R_s ed L , per frequenze inferiori a circa 20 MHz, si possono trascurare per cui lo schema equivalente normalmente usato è:

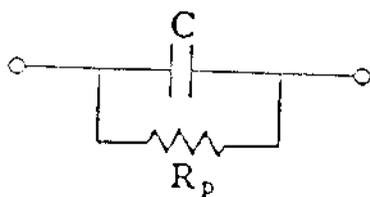


fig. 45

Per caratterizzare tale comportamento si suole introdurre l'angolo di perdita δ del condensatore: tale angolo, in relazione allo schema equivalente di fig. 45, è $\delta = \arctg R_p \omega C$ (v. fig. 46).

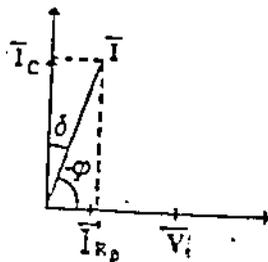


fig. 46

1.8.1 Schema equivalente per un bipolo passivo

Un bipolo passivo può essere rappresentato secondo i due schemi equivalenti della figura seguente

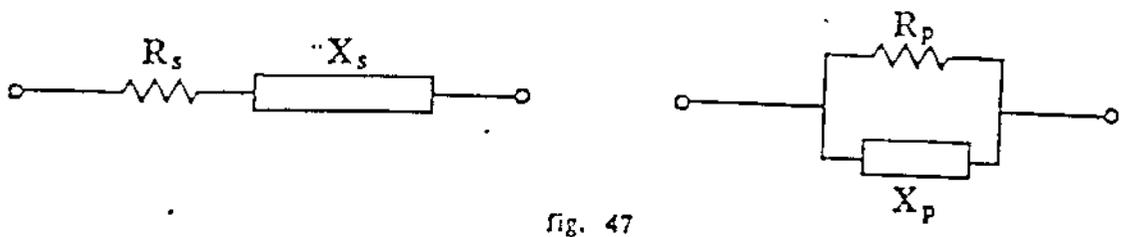


fig. 47

ove R_s e R_p sono le componenti resistive e X_s e X_p quelle reattive. Imponendo che le impedenze complesse viste dai rispettivi terminali siano uguali si ha:

$$R_s + jX_s = \frac{1}{\frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p}}$$

da cui, uguagliando separatamente le parti reali ed i coefficienti della parte immaginaria:

$$R_s = \frac{R_p}{\frac{R_p^2}{X_p^2} + 1}, \quad X_s = \frac{X_p}{1 + \frac{X_p^2}{R_p^2}}$$

Dalle ultime due relazioni risulta che si può ritenere $R_s \approx R_p$ se $X_p \gg R_p$; oppure $X_s \approx X_p$ se $X_p \ll R_p$.

Inversamente si ha

$$R_p = R_s + \frac{X_s^2}{R_s}, \quad X_p = X_s + \frac{R_s^2}{X_s}$$

per cui

$$R_p \approx R_s \text{ se } X_s \ll R_s \text{ e } X_p \approx X_s \text{ se } R_s \ll X_s.$$

1.8.2 Schemi di circuiti equivalenti con elementi reali

A titolo di esempio si riportano alcuni schemi equivalenti di circuiti RLC serie e parallelo nei quali si tiene conto dell'effettivo comportamento degli elementi passivi utilizzati per la realizzazione pratica dei circuiti.

1) Circuito RLC serie

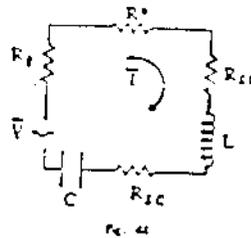
Per frequenze inferiori alla frequenza propria di risonanza di un induttore, e comunque inferiori a circa 20 MHz, lo schema equivalente di un circuito serie RLC è quello di fig. 48, in cui

R_g è la resistenza interna del generatore

R^* è la resistenza esterna

R_{SL} è la resistenza serie dell'induttore

R_{SC} è la resistenza serie del condensatore.



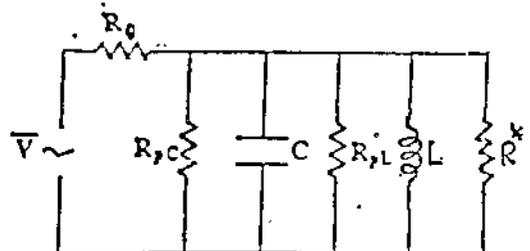
R_{SC} rappresenta la resistenza serie del condensatore calcolata mediante la trasformazione parallelo-serie di un bipolo passivo del par. preced.; la reattanza capacitiva serie si può ritenere inalterata se $X_C \ll R_p$.

2) Circuito RLC parallelo

Lo schema equivalente è quello di fig. 49 in cui

R_g è la resistenza interna del generatore

R_{PC} è la resistenza parallelo del condensatore



R^* è la resistenza esterna

R_{PL} rappresenta la resistenza parallelo dell'induttore calcolata mediante la trasformazione serie-parallelo di un bipolo passivo; la reattanza induttiva parallelo si può ritenere inalterata se $R_s \ll X_s$.

1.9 Potenza in regime sinusoidale

Si consideri un elemento passivo di impedenza $\bar{Z} = R + jX$ e siano $v(t) = V \sin(\omega t + \alpha)$ e $i(t) = I \sin(\omega t + \beta)$ i valori istantanei della differenza di potenziale ai suoi capi e della intensità della corrente che lo percorre.

La potenza istantanea dissipata da tale elemento è

$$p(t) = v(t)i(t) = VI \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta)$$

da cui, mediante le formule di Werner,

$$p(t) = \frac{VI}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \alpha + \beta)]$$

essendo $\varphi = \alpha - \beta$.

La potenza istantanea può quindi essere espressa mediante la somma di due termini, il primo dei quali è costante ed il secondo oscilla con frequenza 2γ .

La potenza reale, detta anche potenza "attiva", è il valor medio della $p(t)$, per cui

$$\bar{p}(t) = P = \frac{VI}{2} \cos \varphi = V_{eff} I_{eff} \cos \varphi \quad (12 \text{ bis})$$

L'espressione così ottenuta, che è la nota formula di Galileo Ferraris, rappresenta la potenza realmente assorbita (o dissipata) da un circuito e dipende in modo essenziale dallo

sfasamento φ tra tensione e corrente. La (12 bis) può trasformarsi nel modo seguente:

$$\bar{P}(t) = R I_{eff}^2, \quad \text{essendo}$$

$$V_{eff} = Z I_{eff} \quad \text{e} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

Si evidenzia in tal modo che la potenza attiva dipende soltanto dalla presenza di elementi ohmici.

Nel caso in cui l'elemento di circuito considerato contenga soltanto componenti reattivi, si ha, ovviamente, $\cos \varphi = 0$ e pertanto $\bar{P}(t) = 0$.

Non si ha cioè dissipazione di potenza da parte dell'elemento di circuito in studio pur non essendo nulla la potenza istantanea. Quest'ultima infatti, in questo caso oscilla con frequenza 2ν e ampiezza $VI/2$ intorno al valore zero. Ciò descrive il fatto fisico relativo agli scambi di energia tra il generatore ed il campo magnetico (nel caso in cui sia presente un induttore) e il campo elettrostatico (nel caso in cui sia presente un condensatore), scambi che avvengono con frequenza 2ν . Per tener conto che anche in presenza di soli elementi reattivi è impegnata nel circuito una potenza, sebbene non vi sia dissipazione di essa, si suole introdurre il concetto di potenza reattiva, espressa dalla formula

$$P_r = V_{eff} I_{eff} \sin \varphi$$

la quale esprime il prodotto del valore efficace della tensione per la componente del valore efficace della corrente in quadratura con la tensione (vedi fig. 50).

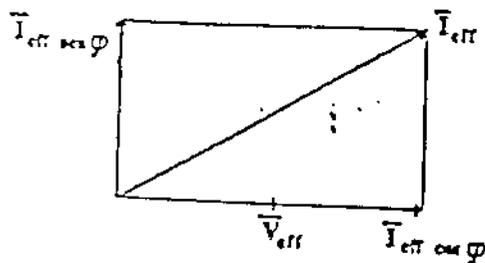


fig. 50

La potenza reattiva viene comunemente misurata in VAR (voltampere reattivi).

Tenendo presente che la massima potenza dissipabile da un carico si ha per $\varphi=0$, si suole indicare con il nome di potenza apparente la grandezza $P_a = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$, misurata in VA (voltampere). Ne segue la relazione formale

$$P_a^2 = P^2 + P_r^2.$$

2. Circuiti derivatori ed integratori

Nei precedenti capitoli sono stati studiati, riguardandoli come quadrupoli, alcuni particolari circuiti in regime sinusoidale, come i circuiti attenuatori e quelli risonanti.

Si vogliono ora studiare alcuni particolari quadrupoli che si comportano come circuiti derivatori e integratori nel senso che, applicando ad essi in ingresso un segnale di tensione funzione del tempo, si ottiene in uscita un segnale che è direttamente proporzionale alla derivata o all'integrale rispetto al tempo del segnale in ingresso.

Tra i vari possibili circuiti che assolvono le funzioni precedentemente indicate, si considerano circuiti costituiti da due elementi passivi, resistore e condensatore, e resistore ed induttore.

2.1 Circuiti derivatori

a) Circuito CR

Sia $v(t)$ il segnale di tensione applicato in ingresso. Tale tensione si ripartisce in $v_C(t)$ e $v_R(t)$ essendo $v(t) = v_C(t) + v_R(t)$ per ogni t .

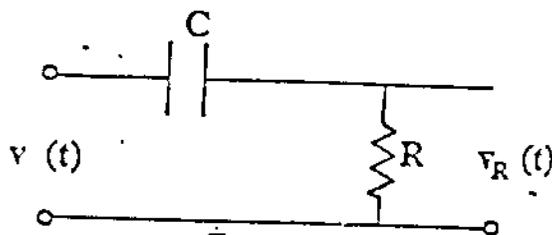


fig. 52

Si supponga che sia verificata, per ogni t , la condizione

$$|v_R(t)| \ll |v_C(t)| \quad (13)$$

per cui si ha

$$v(t) = v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v_C(t_0)$$

Derivando ambo i membri rispetto al tempo si ha

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \quad \text{da cui} \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Per quanto riguarda il segnale di uscita si ha

$$v_R(t) = R i(t) \approx RC \frac{dv(t)}{dt} = \tau \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{essendo} \quad \tau = RC$$

b) circuito RL

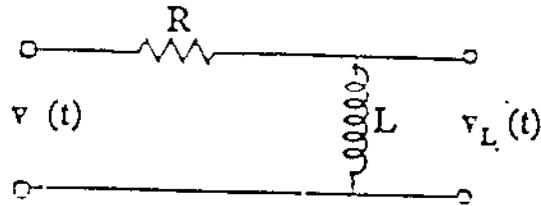


Fig. 54

si ha in questo caso

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t);$$

si supponga

$$|v_L(t)| \ll |v_R(t)|$$

(14)

per ogni t .

$$\text{Risulta quindi} \quad v(t) \approx v_R(t) = R i(t)$$

$$\text{da cui} \quad i(t) \approx \frac{1}{R} v(t)$$

Ne segue

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \approx \frac{L}{R} \frac{dv(t)}{dt} = \tau \frac{dv(t)}{dt}$$

essendo in questo caso

$$\tau = \frac{L}{R}$$

2.2 Circuiti integratori

a) Circuito RC

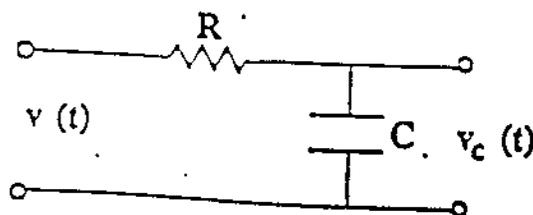


Fig. 53

Si supponga in questo caso che sia verificata per ogni t la condizione

$$|v_C(t)| \ll |v_R(t)| \quad (15)$$

da cui

$$v(t) \approx v_R(t) = R i(t)$$

da ne ricava

$$i(t) \approx \frac{1}{R} v(t)$$

e quindi, per il segnale in uscita,

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' \approx \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t v(t') dt' = \frac{1}{T} \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

essendosi scelta l'origine dei tempi t_0 in modo tale che $v_C(t_0) = 0$.

b) circuito LR.

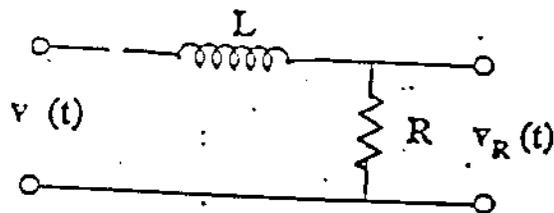


fig. 55

Si ha $v(t) = v_L(t) + v_R(t)$;
si supponga, per ogni t ,
 $|v_R(t)| \gg |v_L(t)|$.

(16)

Risulta allora

$$v(t) \approx v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

cioè

$$L di(t) \approx v(t) dt$$

da cui, integrando

$$i(t) \approx \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0)$$

scegliendo l'origine dei tempi in modo che sia $i(t_0)=0$ si ricava

$$v_R(t) = R i(t) = \frac{R}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Ciascun caso finora discusso fornisce soltanto un'approssimazione di circuito derivatore e integratore propriamente detto. Come si è visto, tale approssimazione è tanto migliore quanto meglio sono verificate le disequaglianze (13), (14) e (15), (16).

Queste, a loro volta, dipendono dalla costante di tempo τ del circuito; infatti le condizioni (13) e (14) di derivazione si possono scrivere:

$$i(t) \ll \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t i(t') dt' \quad (\text{avendo scelto } t_0 \text{ in modo che } v_C(t_0)=0)$$

mentre quelle (15) e (16) di integrazione si possono scrivere

$$\int_{t_0}^t i(t') dt' \ll \tau i(t)$$

È quindi evidente che la prima è tanto meglio verificata quanto più piccola è τ e la seconda quanto più grande è τ .

Il termine di confronto per τ è individuato volta per volta in base alle caratteristiche del segnale di ingresso (p.es. il periodo nel caso di un segnale periodico, la durata se si tratta di un segnale impulsivo).

È opportuno inoltre sottolineare che le relazioni (13), (14) e (15), (16), se da un lato favoriscono le condizioni di integrazione e di derivazione, dall'altro riducono l'ampiezza del segnale in uscita e quindi si tratta di scegliere di volta in volta un opportuno compromesso.

Le discussioni relative ai circuiti considerati sono state eseguite supponendo che gli elementi passivi siano ideali. Si deve tener conto che l'impiego di elementi reali comporta variazioni rispetto alla trattazione precedente.

Tali variazioni sono però generalmente contenute nel caso di resistori e di condensatori, mentre possono essere sensibili nel caso degli induttori, prevalentemente per il fatto che questi ultimi presentano una resistenza serie che non è fisicamente distinta dalla componente induttiva.

2.3 Circuiti derivatori ed integratori con segnali in ingresso di tipo particolare

A titolo di esempio si studiano ora i circuiti CR e RC in corrispondenza a diverse forme del segnale di ingresso.

2.3.1 Segnale a gradino.

Un segnale a gradino è definito dalla relazione

$$\begin{aligned} v(t) &= V_0 = \text{cost} && \text{per } t > t_0 \\ v(t) &= 0 && \text{per } t \leq t_0 \end{aligned} \quad (\text{vedi fig. 56})$$

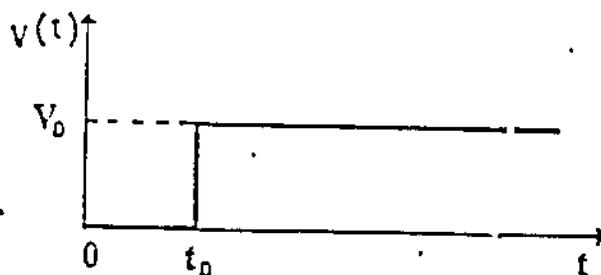


Fig. 56

Per $t > t_0$ si ha

$$V_0 = R i(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' ;$$

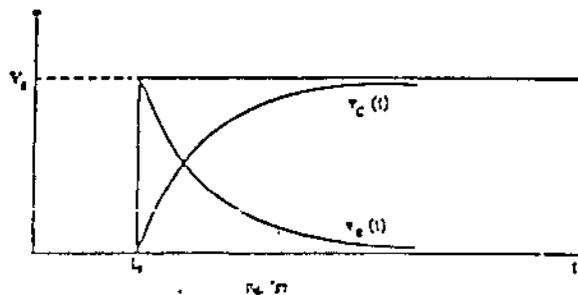
integrando la precedente equazione si ricava

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

Per cui

$$v_R(t) = V_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad v_C(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right)$$

(vedi fig. 57)

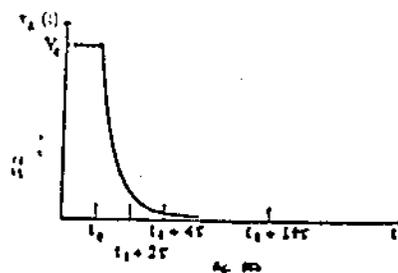
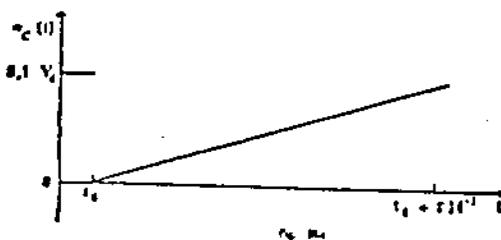


Posto per semplicità $t_0=0$, per $t \ll \tau$ si ha

$$v_c(t) \approx V_0 \frac{t}{\tau}$$

cioè il segnale di uscita prelevato ai capi del condensatore è direttamente proporzionale all'integrale $V_0 t$ del segnale d'ingresso.

Per $t \gg \tau$ si ha $v_R(t) \approx 0$, cioè il segnale di uscita prelevato ai capi del resistore è direttamente proporzionale alla derivata (nulla) del segnale di ingresso (fig. 58 a e b).



2.3.2 Segnale a onda quadra.

Un segnale a onda quadra è un segnale periodico di periodo T variabile tra $+V_1$ e $-V_2$ per $t_0 \leq t < t_0 + T$

secondo l'andamento riportato in fig. 59.

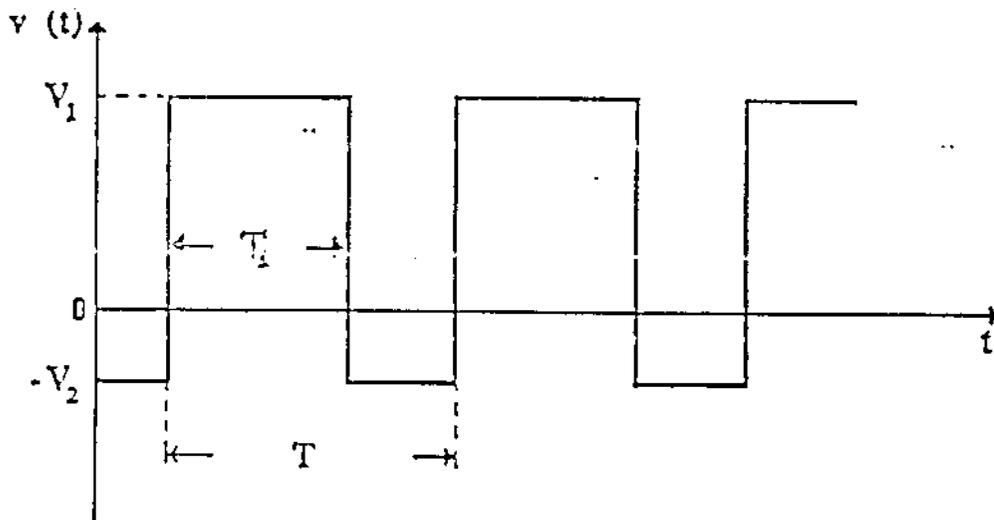


fig. 59

Si consideri il caso in cui $V_1 = V_0$, $V_2 = 0$ e $T_1 = T/2$ (cfr. fig. 60); si assuma $t = 0$ come istante iniziale e si supponga che con un tale segnale sia alimentato un circuito RC serie.

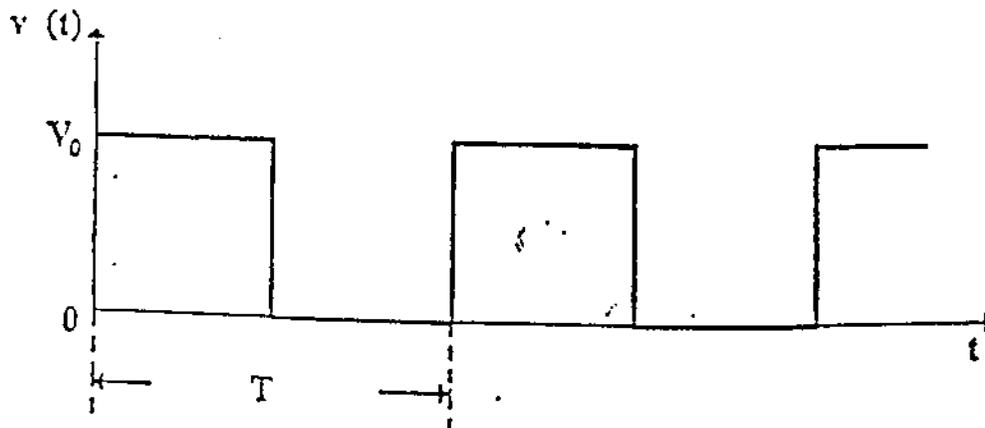


fig. 60

Si hanno le seguenti equazioni per quanto riguarda la intensità di corrente $i(t)$ e le cadute di potenziale $v_R(t)$ e $v_C(t)$ ai capi del resistore e del condensatore:

per $0 \leq t < \frac{T}{2}$, posto $v_C(0) = 0$

$$\text{si ha: } i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$v_R(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

$$v_C(t) = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

Come si vede,

$$v_R(t) + v_C(t) = V_0$$

Per $t = \frac{T}{2}$

$$v_R\left(\frac{T}{2}\right) = V_0 e^{-\frac{T}{2\tau}}$$

$$v_C\left(\frac{T}{2}\right) = V_0 (1 - e^{-\frac{T}{2\tau}})$$

cioè, posto $e^{-\frac{T}{2\tau}} = k$

$$v_R\left(\frac{T}{2}\right) = k V_0$$

$$v_C\left(\frac{T}{2}\right) = V_0 (1 - k)$$

Per $\frac{T}{2} \leq t < T$

$$i(t) = -\frac{V_0(1-k)}{R} e^{-\frac{t-T}{\tau}}$$

$$v_R(t) = -V_0(1-k) e^{-\frac{t-T}{\tau}}$$

$$v_C(t) = V_0(1-k) e^{-\frac{t-T}{\tau}}$$

Si ha:

$$v_R(t) + v_C(t) = 0$$

Per $t = T/2$ si ha una discontinuità nella $v_R(t)$, che passa dal valore kV_0 al valore $-V_0(1-k)$: il valore di tale discontinuità è, come si può facilmente verificare, V_0 .

Per $T \leq t < T + \frac{T}{2}$ si ha

$$i(t) = \frac{V_0 - v_C(T)}{R} e^{-\frac{t-T}{\tau}} = \frac{V_0 - V_0(1-k)k}{R} e^{-\frac{t-T}{\tau}}$$

da cui si ricavano le corrispondenti espressioni per $v_R(t)$ e $v_C(t)$.

Dopo n periodi, per $nT \leq t < nT + \frac{T}{2}$ si ha:

$$v_C(t) = V_0 [1 - (1-k + k^2 - k^3 + \dots + k^{2n}) e^{-\frac{t-nT}{\tau}}] \quad (17)$$

e per $nT + \frac{T}{2} \leq t < (n+1)T$

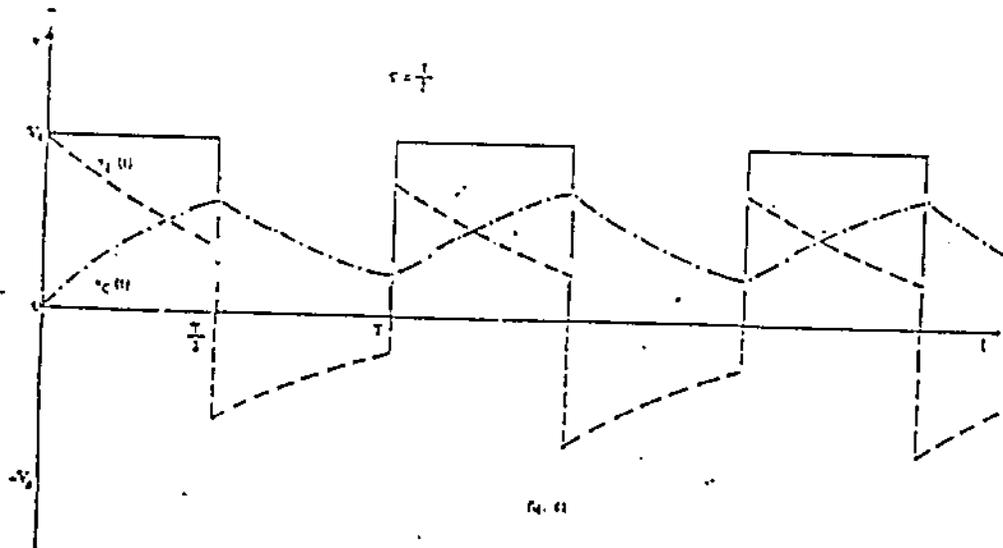
$$v_C(t) = V_0 (1 - k + k^2 - k^3 + \dots - k^{n+1}) e^{-\frac{t - (nT + \frac{T}{2})}{\tau}} \quad (18)$$

mentre negli stessi intervalli si ha

$$v_R(t) = V_0 (1 - k + k^2 - k^3 + \dots - k^n) e^{-\frac{t - nT}{\tau}} \quad (19)$$

$$v_R(t) = -V_0 (1 - k + k^2 - k^3 + \dots - k^{n+1}) e^{-\frac{t - (nT + \frac{T}{2})}{\tau}} \quad (20)$$

L'evoluzione temporale dei segnali $v_R(t)$ e $v_C(t)$ è riportata in fig. 61.



Per n molto grande (praticamente ∞) la somma delle serie in parentesi è $\approx 1/(1+k)$, per cui si ha:

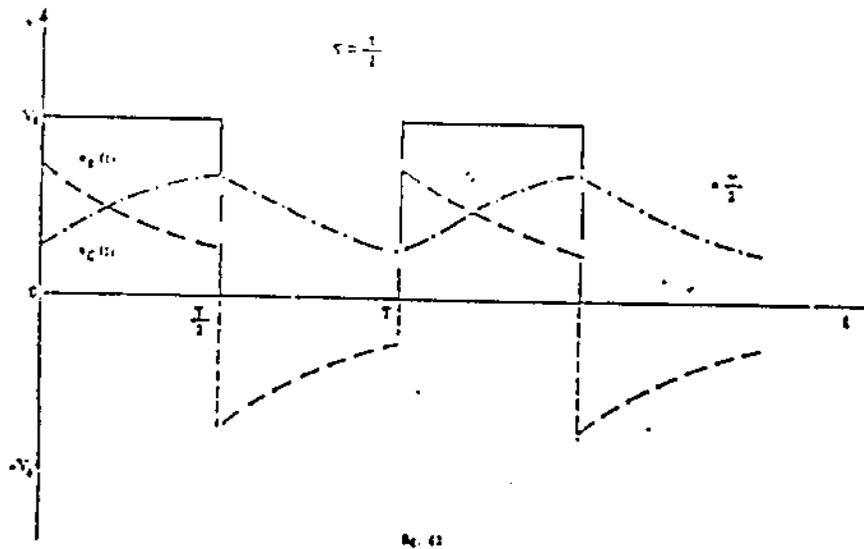
$$v_C(t) \approx V_0 \left[1 - \frac{1}{1+k} e^{-\frac{t - nT}{\tau}} \right] \quad (21)$$

$$v_C(t) \approx V_0 \frac{1}{1+k} e^{-\frac{t-(nT+\frac{T}{2})}{\tau}} \quad (22)$$

$$v_R(t) \approx V_0 \frac{1}{1+k} e^{-\frac{t-nT}{\tau}} \quad (23)$$

$$v_R(t) \approx -V_0 \frac{1}{1+k} e^{-\frac{t-(nT+\frac{T}{2})}{\tau}} \quad (24)$$

Le forme d'onda relative ai segnali $v_R(t)$ e $v_C(t)$ nella situazione asintotica in cui sono descritte dalle equazioni (21), (22), (23) e (24) sono rappresentate in fig. 62.

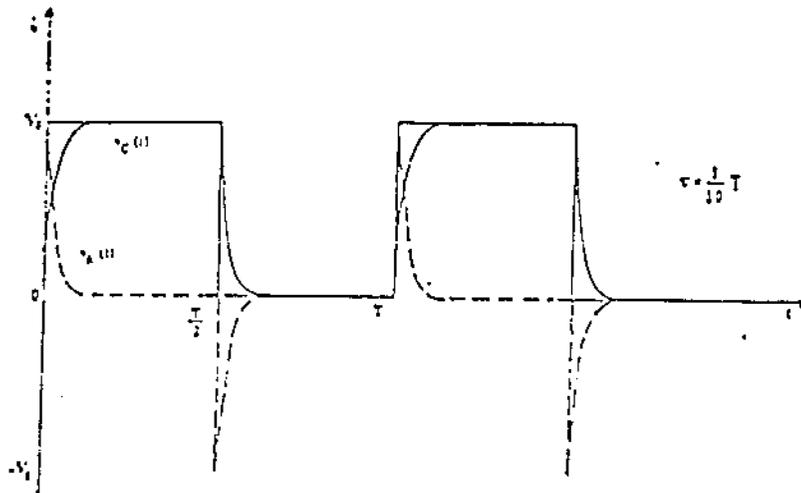


Le (22) e (24) per $T/2 \gg \tau$, e quindi $k \ll 1$, diventano

$$v_R(t) \approx V_0 e^{-\frac{t-nT}{\tau}} \quad (25)$$

$$v_R(t) \approx -V_0 e^{-\frac{t-(nT+\frac{T}{2})}{\tau}} \quad (26)$$

e sono rappresentate nella fig. 63 insieme agli andamenti (21) e (22) della $v_C(t)$ nelle stesse condizioni. Le (23) e (24) sono indicate a tratteggio.



63

La condizione di derivazione $|v_R(t)| \ll |v_C(t)|$ è, come si vede, verificata negli intervalli, in cui $nT < t < nT + \frac{T}{2}$ per $t - nT \gg \tau$;

in tali condizioni si ha

infatti $v_R(t) \approx 0$, cioè il segnale ai capi del resistore è direttamente proporzionale alla derivata temporale del segnale d'ingresso.

Si consideri ora il caso in cui $\tau \gg \frac{T}{2}$ per cui $k = e^{-\frac{T}{2\tau}} \approx 1 - \frac{T}{2\tau}$

e, poste $\frac{T}{2\tau} = \epsilon$ si ha $\frac{1}{1+k} \approx \frac{1}{2} + \epsilon$.

Si ottiene quindi in questo caso

$$v_C(t) = \frac{V_0}{2} \left[1 - 2\epsilon + \frac{t - nT}{\tau} (1 + 2\epsilon) \right] \quad (27)$$

$$v_C(t) = \frac{V_0}{2} (1 + 2\epsilon) \left[1 - \frac{t - (nT + \frac{T}{2})}{\tau} \right] \quad (28)$$

Le (27) e (28) sono rappresentate nella fig. 64.

Si noti che:

A) la pendenza del segnale sia nel caso (27) che nel caso (28) è in modulo $= V_0/2\tau$;

B) il valor medio del segnale è $= V_0/2$. La proporzionalità tra $v_C(t)$ e l'integrale del segnale in ingresso si ha dunque soltanto a meno di una costante che è praticamente coincidente con il valor medio di $v(t)$, cioè $V/2$. Ciò è in accordo col fatto che la condizione^C di integrazione $|v_C(t)| \ll |v_R(t)|$ non è in questo caso verificata.

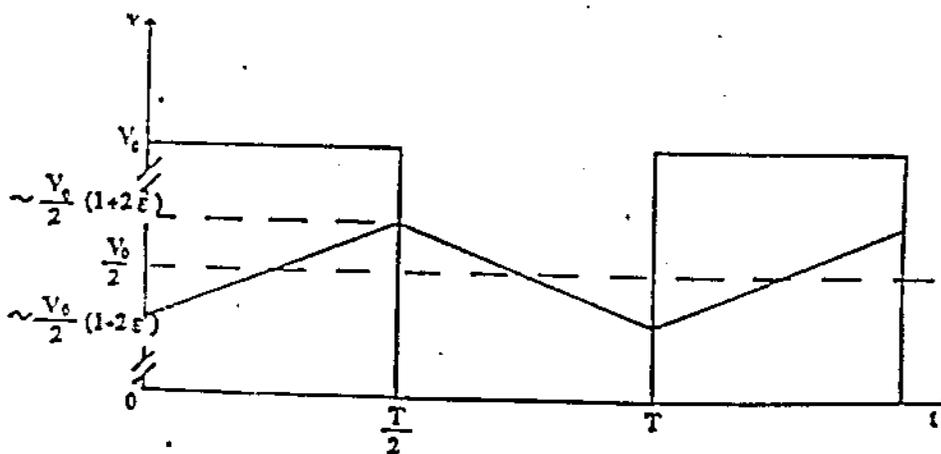


fig. 64

Se si considera un segnale a onda quadra avente l'andamento riportato in fig. 65

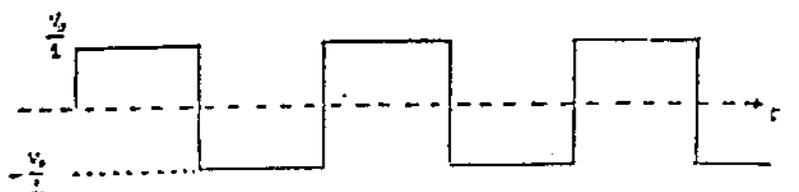


fig. 65

Le (21), (22), (23) e (24) assumono la forma

$$v_C(t) = \frac{V_0}{2} \left[1 - \frac{2}{1+k} e^{-\frac{t-nT}{\tau}} \right] \quad (29)$$

$$v_C(t) = -\frac{V_0}{2} \left[1 - \frac{2}{1+k} e^{-\frac{t-(nT+\frac{T}{2})}{\tau}} \right] \quad (30)$$

$$v_R(t) = \frac{V_0}{2} \left[\frac{2}{1+k} e^{-\frac{t-nT}{\tau}} \right] \quad (31)$$

$$v_R(t) = -\frac{V_0}{2} \left[\frac{2}{1+k} e^{-\frac{t-(nT+\frac{T}{2})}{\tau}} \right] \quad (32)$$

Le (31) e (32) sono identiche alle (23) e (24) mentre per $\tau \gg \gg T/2$ le (29) e (30) diventano:

$$v_C(t) = -\frac{V_0}{2} \left[2\epsilon + \frac{t-nT}{\tau} (1+2\epsilon) \right] \quad (33)$$

$$v_C(t) \approx \frac{V_0}{2} \left[2e^{-\frac{t - (nT + \frac{T}{2})}{\tau}} \right] \quad (34)$$

In questo caso il segnale $v_C(t)$ (v.eq. 33 e 34), è approssimativamente proporzionale all'integrale del segnale in ingresso essendo la costante additiva (rispettivamente $-V_0\varepsilon$ e $+V_0\varepsilon$) praticamente nulla; ciò è in accordo col fatto che la condizione di integrazione è verificata per ogni t .

2.3.3 segnale sinusoidale.

I circuiti RC e CR, in regime sinusoidale, sono stati già studiati riguardandoli come circuiti attenuatori. Si tratta ora di studiare quali siano le condizioni che devono verificarsi affinché essi si comportino come circuiti derivatori o integratori.

Si consideri un circuito RC alimentato da un generatore di tensione sinusoidale di ampiezza V_0 e di frequenza γ .

Per i segnali ai capi di R e C si possono scrivere, usando il metodo simbolico, le equazioni seguenti:

$$V_R = V_0 \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$V_C = V_0 \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

La condizione di derivazione $|v_R(t)| \ll |v_C(t)|$ per ogni t
equivale a

$$V_R \ll V_C$$

cioè, trattandosi di elementi in serie,

$$R \ll \frac{1}{\omega C}$$

Questa condizione è verificata per

$$RC = \tau \ll \frac{1}{\omega} \quad , \text{ ossia} \quad T \gg 2\pi\tau$$

In tal caso si ha

$$\bar{V}_R \approx \bar{V}_0 j\omega RC$$

cioè il segnale ai capi di R è proporzionale, attraverso la costante τ , alla derivata temporale del segnale di ingresso.

La condizione di integrazione $|V_C(t)| \ll |V_R(t)|$ per ogni t

equivale a $V_C \ll V_R$

e quindi a

$$\frac{1}{\omega C} \ll R$$

Tale condizione è verificata per $RC \gg \frac{1}{\omega}$, cioè $T \ll 2\pi\tau$.

Si ha allora

$$\bar{V}_C = \bar{V}_0 \frac{1}{j\omega RC}$$

cioè il segnale ai capi di C è proporzionale, attraverso la costante $1/\tau$, alla primitiva sinusoidale del segnale di ingresso.

2.4 Studio del circuito RLC serie in regime non sinusoidale.

In analogia allo studio dei circuiti RC e CR con segnali di ingresso a gradino ed a onda quadra, si vuole ora studiare la risposta a tali segnali da parte di un circuito RLC serie.

a) segnale a gradino.

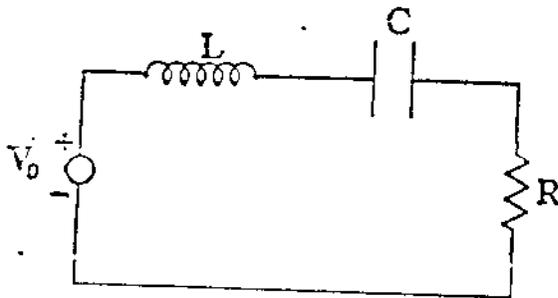


Fig. 66

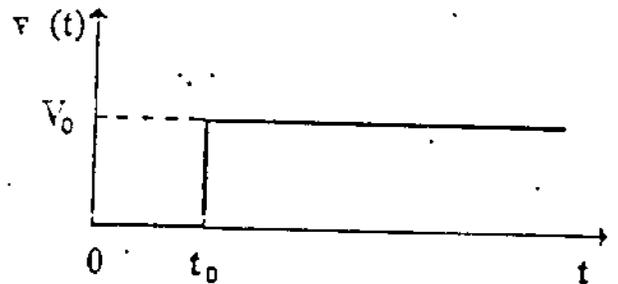


Fig. 67

Posto $t_0 = 0$ e supposto $v_C(t_0) = 0$, per $t > 0$ l'equazione del circuito è

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' + R i(t) = V_0$$

da cui, derivando rispetto al tempo,

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

La soluzione di tale equazione è del tipo

$$i(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

ove

$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

mentre C_1 e C_2 sono costanti da determinare in base alle condizioni iniziali.

Il caso sperimentalmente più interessante si presenta quando

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$$

cioè

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

[e quindi $Q > 1/2$].

Si ha in tal caso, posto $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 e^{-j\omega t} + C_2 e^{j\omega t})$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$i(0) = 0$$

$$e \quad L \frac{di(t)}{dt} = V_0$$

tale equazione diventa

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$$

da cui

$$v_R(t) = R \frac{V_0}{\omega \cdot L} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega t$$

Si ottiene così un'oscillazione smorzata di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

e di "coefficiente di smorzamento" $\frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L}$

L'andamento della $v_R(t)$ è riportato in fig. 68.

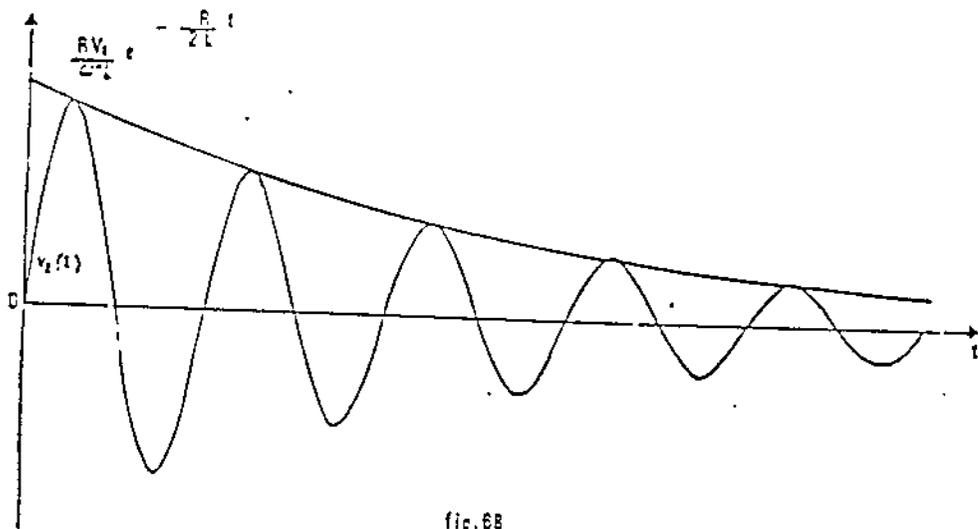


fig. 68

b) segnale a onda quadra.

Si considera qui soltanto il caso in cui $R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ e $\frac{T}{2} \gg \tau$.

essendo T il periodo dell'onda quadra.

Durante la semionda positiva, il circuito si comporta in modo del

tutto analogo a quello già studiato con il segnale a gradino; si ha cioè

$$v_R(t) = \frac{RV_0}{\omega \cdot L} e^{-\frac{t}{T}} \sin \omega t$$

in cui V_0 è l'ampiezza dell'onda quadra.

Per $t = T/2$ $v_R''(t) = 0$ e $v_C(t) = V_0$.

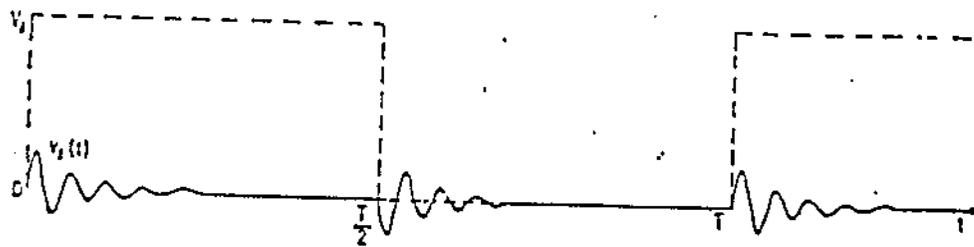
per $\frac{T}{2} \leq t < T$, il condensatore si scarica sugli altri elementi passivi e la corrente è

$$i(t) = -\frac{V_0}{\omega \cdot L} e^{-\frac{t}{T}(t-\frac{T}{2})} \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{T}{2} \right) \right]$$

per cui

$$v_R(t) = -R \frac{V_0}{\omega \cdot L} e^{-\frac{t}{T}(t-\frac{T}{2})} \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{T}{2} \right) \right]$$

I corrispondenti andamenti sono riportati in fig. 69 per $T = 10 \tau$.



(i).69

3. Diode

3.1 Cenni sulla struttura dei cristalli

Lo studio della struttura di un atomo, effettuata mediante l'applicazione delle leggi della meccanica quantistica, fornisce, come è noto, il seguente risultato: i singoli elettroni che costituiscono il guscio di un atomo isolato possono muoversi soltanto su particolari orbite. A ciascuna di tali orbite corrisponde un ben determinato livello energetico caratterizzato dal numero quantico totale n (intero), cui è associata l'energia E_n dell'elettrone

$$E_n = -k \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, \dots,$$

ove k è una costante.

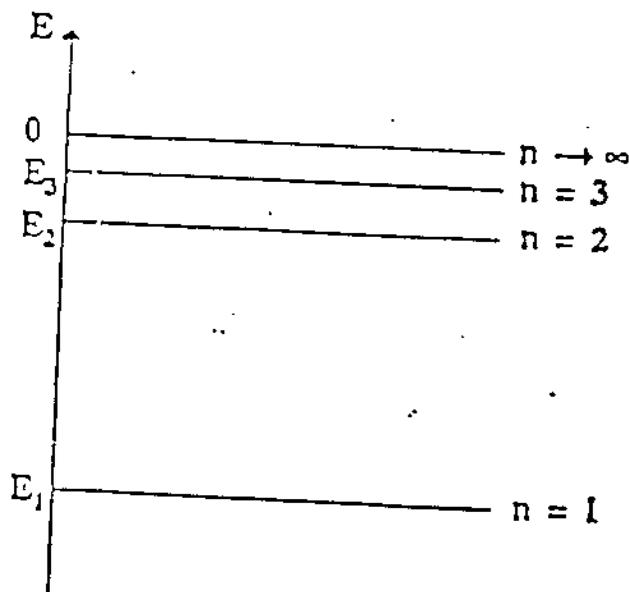


Fig. 70

Diversa è la situazione nel caso di un solido. In esso gli atomi sono disposti in modo regolare ai vertici dei moduli del reticolo cristallino e per effetto delle interazioni tra i numerosi atomi presenti ciascun livello energetico si suddivide in un insieme di N sottolivelli (ove N è il numero di atomi del cristallo) diffe-

renti l'uno dall'altro per piccole quantità di energia. Essendo N molto grande ($\sim 10^{22} \text{ cm}^{-3}$), l'insieme di tali sottolivelli può essere riguardato come una struttura continua alla quale si dà il nome di "banda".

I livelli energetici permessi per gli elettroni in un cristallo sono quindi raggruppabili in bande di energia; tra due "bande permesse" consecutive esiste un intervallo di energia che costituisce la "banda proibita".

Alla temperatura $T=0 \text{ K}$ gli elettroni occupano i livelli più bassi. In tale situazione un cristallo si comporta come un conduttore o un isolante a seconda che il numero di elettroni di ciascun atomo sia dispari e pari.

Nel primo caso, a cominciare dalla banda di energia minore, si trovano bande permesse completamente piene fino ad una che è piena per metà; le rimanenti sono tutte vuote.

Nel secondo caso le bande permesse sono o completamente piene (quelle di energia inferiore ad un certo livello) o completamente vuote. La banda di energia maggiore completamente piena prende il nome di banda di valenza mentre la banda di energia minore, vuota o parzialmente piena, prende il nome di banda di conduzione.

Affinchè un cristallo possa condurre è necessario che qualche elettrone sia presente nella banda di conduzione: ciò accade per $T=0$ soltanto per i conduttori. Per $T>0$ qualche elettrone, per effetto dell'agitazione termica, acquista l'energia sufficiente a passare dalla banda di valenza alla banda di conduzione superando l'intervallo di energia costituito dalla banda proibita.

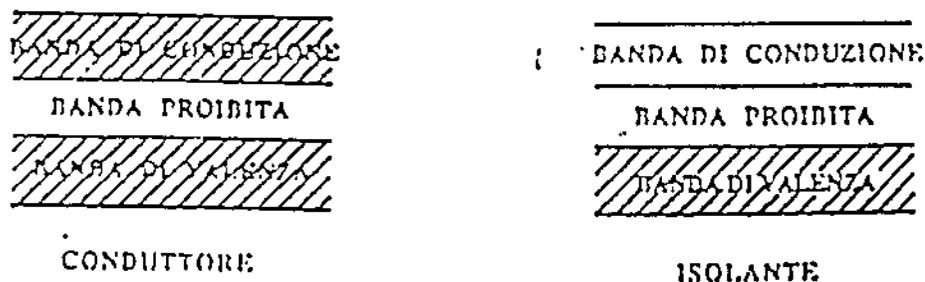


Fig. 71

In tal caso anche un non conduttore presenta una conducibilità non nulla. Tale conducibilità è praticamente nulla per gli isolanti per i quali la larghezza della banda proibita è dell'ordine di 10 eV, mentre può diventare considerevole per i semiconduttori che hanno la struttura degli isolanti, con banda proibita della larghezza di ~ 1 eV.

3.2 Proprietà dei semiconduttori

A causa del piccolo intervallo di energia che separa il livello superiore della banda di valenza dal livello inferiore della banda di conduzione, la conducibilità dei semiconduttori è, a parità di temperatura, molto maggiore di quella degli isolanti e, ovviamente, aumenta al crescere della temperatura.

Si deve tener conto inoltre del fatto che, per ogni elettrone che passa dalla banda di valenza alla banda di conduzione, nella banda di valenza viene creata una "lacuna", che ha una sua mobilità e si comporta come se fosse costituita da una carica positiva. La corrente in un semiconduttore è pertanto dovuta sia al moto degli elettroni che a quello delle lacune.

La conducibilità in un semiconduttore può essere aumentata aggiungendo al cristallo, nel suo processo di crescita, impurità di valenza diversa da quella degli atomi che lo costituiscono ("drogaggio" del cristallo).

Si consideri ad esempio il caso del Ge o del Si, che hanno entrambi quattro elettroni nella banda di valenza. Se il drogaggio viene eseguito con As, pentavalente, un atomo di As sostituisce nel reticolo cristallino un atomo di Ge in modo tale che 4 dei suoi 5 elettroni hanno energie comprese nella banda di valenza e il 5° ha energia situata nella banda di conduzione.

Nel caso in cui per il drogaggio si usino atomi di B, trivalente, si ha un eccesso di lacune nella banda di valenza. Si ottengono in tal modo, nel primo caso semiconduttori di tipo n in cui la conducibi-

lità è dovuta ad un eccesso di elettroni nella banda di conduzione; nel secondo caso si ottengono semiconduttori di tipo p in cui la conducibilità è dovuta ad un eccesso di lacune nella banda di valenza.



Fig. 72

3.3 Diodo a giunzione

Se un semiconduttore di tipo n e uno di tipo p vengono "saldati" insieme formando una "giunzione" si ha un processo di diffusione per cui gli elettroni passano dalla regione n alla regione p e le lacune dalla regione p alla n. Tale diffusione produce, ai lati della giunzione, la formazione di una sorta di doppio strato che impedisce al processo di continuare, consentendo semplicemente scambi nell'ambito di un equilibrio statico (v. Fig. 73).

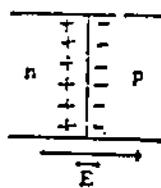


Fig. 73

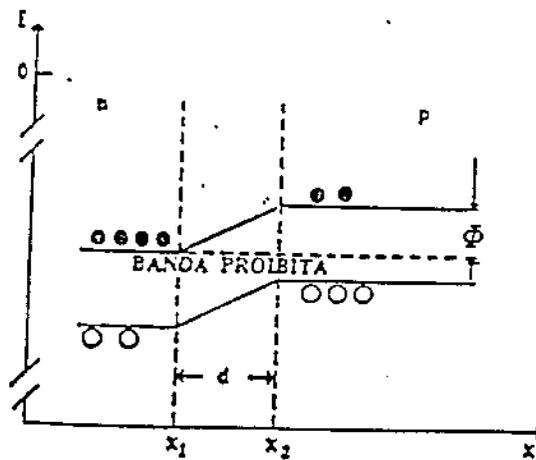


Fig. 74

La presenza del campo elettrico dovuto alla formazione del doppio strato produce un abbassamento dei livelli energetici degli elettroni della banda di conduzione nella zona n e un innalzamento per

quelli che si trovano nella zona p. Tra i livelli inferiori della banda di conduzione nelle due zone si viene così a creare una differenza di energia ϕ (v. fig. 74).

Limitando, per semplicità, le considerazioni relative al passaggio di corrente soltanto agli elettroni si può osservare che:

- i pochi elettroni che dalla zona p arrivano in x_2 passano nella zona n in quanto favoriti dal campo \vec{E} ;
- i molti elettroni che dalla zona n arrivano in x_1 trovano nel campo \vec{E} un ostacolo alla diffusione nella zona p, e possono realizzarla soltanto se la loro energia è $> \phi$.

La probabilità P che, alla temperatura assoluta T un elettrone abbia una energia $> \phi$ è, per la statistica di Boltzmann,

$$P = e^{-\frac{\phi}{kT}} \quad (k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1})$$

(v. nota a piè di pag.)

Pertanto la corrente elettronica da n a p ha un'intensità che è proporzionale alla probabilità P e può scriversi

$$I_{onp} = A e^{-\frac{\phi}{kT}}$$

NOTA

Il numero di elettroni di energia compresa tra \mathcal{E} e $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ può scriversi:

$$dN = C e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}} d\mathcal{E}$$

quindi il numero di elettroni di energia $\mathcal{E} > \phi$ risulta

$$N(\mathcal{E} > \phi) = C \int_{\phi}^{\infty} e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}} d\mathcal{E} = C k T e^{-\frac{\phi}{kT}}$$

Il numero totale di elettroni è:

$$N_{\text{tot}} = C \int_0^{\infty} e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}} d\mathcal{E} = k T C$$

per cui, per N molto grande,

$$P = \frac{N(\mathcal{E} > \phi)}{N_{\text{tot}}} = e^{-\frac{\phi}{kT}}$$

L'intensità della corrente I_{opn} da p a n, essendo, in condizioni di equilibrio statistico, nulla l'intensità totale attraverso la giunzione, deve essere opposta a I_{onp} ; si ha cioè uguaglianza tra i rispettivi valori assoluti

$$I_{opn} = I_{onp} = A e^{-\frac{\phi}{kT}} = I_0$$

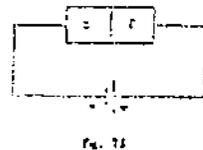
3.4 Polarizzazione di un diodo e caratteristica di esso

Un diodo può essere polarizzato applicando una differenza di potenziale ai suoi terminali. L'effetto di tale polarizzazione è quello di produrre una variazione del livello energetico.

Si distinguono due casi.

a) Polarizzazione diretta

Si ottiene connettendo la zona p con il polo positivo e la zona n con il polo negativo di un generatore di tensione continua (v. fig. 75).



La differenza di energia tra il livello inferiore della banda di conduzione della zona p e n risulta di conseguenza $\phi - eV$, essendo V la differenza di potenziale applicata. Ciò favorisce il flusso di elettroni da n a p mentre il flusso inverso rimane invariato, non dipendendo dal valore del dislivello energetico.

Si ha pertanto una corrente elettronica totale che circola da n verso p la cui intensità è

$$I_{np} - I_{opn} = A e^{-\frac{\phi - eV}{kT}} - A e^{-\frac{\phi}{kT}}$$

$$= A e^{-\frac{\phi}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{eV}{kT}} \right) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{eV}{kT}} \right)$$

Il diodo in tal caso si dice "in conduzione".

b) Polarizzazione inversa

Si ottiene connettendo il generatore come in fig. 76.

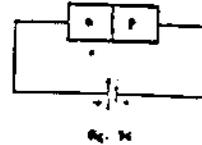
Il dislivello energetico risulta essere in questo caso $\phi + eV$ e l'in-

tensità della corrente elettronica che circola da p verso n è

$$I_{opn} - I_{np} = A e^{-\frac{e}{kT}} - A e^{-\frac{e+eV}{kT}} =$$

$$= I_0 (1 - e^{-\frac{eV}{kT}}).$$

Il diodo in questo caso si dice "in interdizione".



Le due equazioni possono riassumersi nella seguente:

$$I = I_0 (e^{\frac{eV}{kT}} - 1) \quad (35)$$

in cui I è ora l'intensità della corrente di verso convenzionale (opposta a quella elettronica) e V è la differenza di potenziale tra la zona p e la zona n (per cui è $V > 0$ in polarizzazione diretta e $V < 0$ in polarizzazione inversa). I risulta in ogni caso concorde con V .

L'equazione (35) definisce la caratteristica del diodo ed è rappresentata in fig. 77.

Si può definire una resistenza dinamica di giunzione

$$R^* = \frac{dV}{dI} = \frac{1}{\frac{dI}{dV}}$$

la quale è ovviamente variabile in funzione della tensione applicata, salvo nei tratti in cui la caratteristica può essere approssimata con una retta. In essi si ha

$$R_{dir}^* \ll R_{inv}^*$$

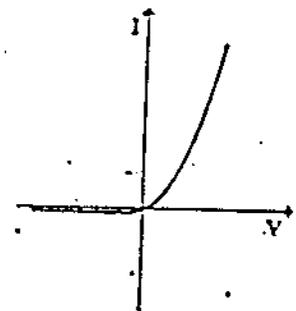


fig. 77

3.5 Impiego di un diodo in regime sinusoidale

Estrapolando la disuguaglianza precedente si può pensare a un diodo ideale come a un elemento passivo avente resistenza nulla in condizioni di polarizzazione diretta e resistenza infinita in condizioni

di polarizzazione inversa. Ciò consente di rappresentare in modo semplice l'andamento della intensità della corrente che attraversa il diodo e della differenza di potenziale ai capi di esso quando venga alimentato da un generatore che fornisce una tensione variabile sinusoidalmente nel tempo (fig.78 a).

Nella fig.78 b sono rappresentate la tensione $v(t)$ fornita dal generatore, la corrente $i_D(t)$ che attraversa il diodo (i valori della quale, durante i semiperiodi in cui il diodo è polarizzato direttamente, sono determinati, nella ipotesi semplificativa fatta, dalla sola resistenza interna del generatore) e la tensione $v_D(t)$ ai capi del diodo.

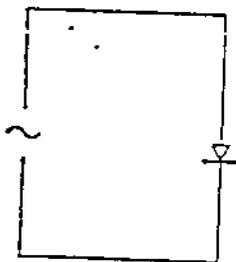


fig.78a

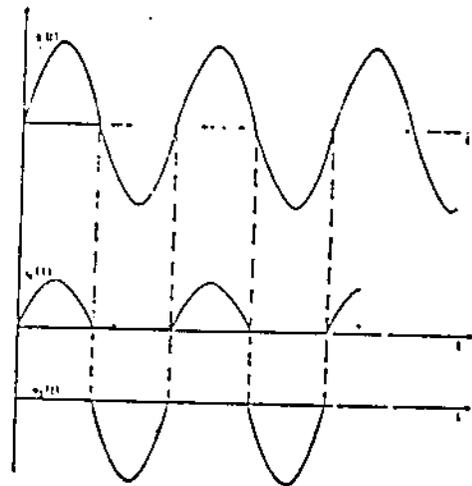


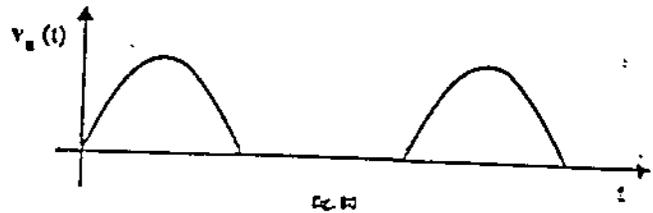
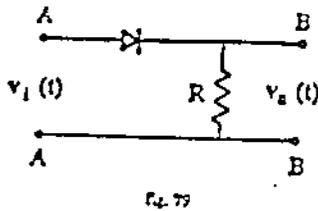
fig.78b

Questo comportamento del diodo consente la sua utilizzazione come "raddrizzatore"; è infatti possibile realizzare mediante esso un quadrupolo tale che, applicando in ingresso un segnale di tensione sinusoidale si ottenga in uscita un segnale di tensione continua, cioè di segno costante.

3.5.1 Raddrizzamento a una semionda. Fattore di ondulazione

In riferimento al circuito riportato in fig. 79, in cui R è una resistenza molto maggiore della resistenza dinamica diretta del diodo e molto minore di quella inversa, si supponga di applicare tra i terminali di ingresso AA un segnale sinusoidale di data frequenza.

Si ottiene, in uscita, un segnale il cui andamento temporale è riportato in fig. 80, l'ampiezza del quale è circa uguale a quella del segnale in ingresso.



Come si vede, si tratta di un segnale continuo, il cui andamento temporale differisce però sensibilmente da quello fornito da un generatore di tensione continua e costante. Per indicare la "bontà" del raddrizzamento si suole definire il fattore r di ondulazione ("ripple") nel seguente modo:

$$r = \frac{[v_u(t) - V_m]_{qm}}{V_m}$$

in cui V_m è il valor medio del segnale $v_u(t)$ e il simbolo $[v_u(t) - V_m]_{qm}$ è il valore quadratico medio della differenza tra $v_u(t)$ e il suo valor medio.

È evidente che tanto minore è r , tanto migliore è il raddrizzamento.

Si ha in generale, per un qualsiasi segnale periodico $v(t)$ di valor medio V_m ,

$$\begin{aligned} [v(t) - V_m]_{qm} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} [v(t) - V_m]^2 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_t^{t+T} v^2(t) dt + V_m^2 T - 2 V_m \int_t^{t+T} v(t) dt \right]} = \\ &= \sqrt{[v(t)]_{qm}^2 + V_m^2 - 2 V_m^2} = \sqrt{[v(t)]_{qm}^2 - V_m^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$r = \sqrt{\left(\frac{v(t)_{qm}}{V_m}\right)^2 - 1} .$$

Nel caso attuale in cui si operi su un segnale sinusoidale un raddrizzamento a una sola semionda,

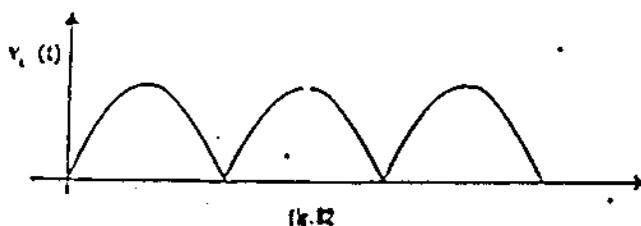
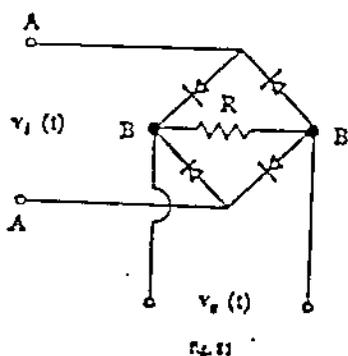
$$[v_u(t)]_{qm} = \frac{V}{2} , \quad V_m = \frac{V}{\pi}$$

per cui

$$r = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1} \approx 1,21 .$$

3.5.2 Raddrizzamento a due semionde

Il circuito di fig. 81 rappresenta un ponte di diodi, che può essere utilizzato per ottenere un raddrizzamento a due semionde qualora si applichi fra i terminali di ingresso AA un segnale di tensione sinusoidale.



Come è evidente dall'osservazione della fig. 81, tra i terminali di uscita BB è presente una ddp $v_u(t)$ sempre dello stesso segno, con l'andamento rappresentato in fig. 82. In questo caso si ha

$$[v_u(t)]_{qm} = \frac{V}{\sqrt{2}} , \quad V_m = \frac{2V}{\pi} .$$

per cui

$$r = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1} \approx 0,48 .$$

Le proprietà raddrizzatrici del diodo possono essere utilizzate, come sarà illustrato in seguito, per misurare ddp e intensità di corrente variabili sinusoidalmente nel tempo.

4 - Misurazione di tensione e corrente variabili periodicamente in funzione del tempo

Si vogliono ora studiare le risposte fornite da uno strumento analogico a bobina mobile del tipo già descritto per misurazioni di correnti e tensioni continue, nel caso in cui la sollecitazione sia costituita da un segnale sinusoidale o periodico. Lo studio in questione riguarda la risposta fornita dallo strumento in condizioni stazionarie, che si instaurano dopo un intervallo di tempo molto maggiore delle costanti di tempo che caratterizzano la fase transitoria.

4.1 Risposta ad una sollecitazione sinusoidale

L'equazione del moto dell'equipaggio mobile di uno strumento a bobina mobile si può scrivere, com'è noto,

$$J\ddot{\Theta} + \beta\dot{\Theta} + C\Theta = m(t) \quad (36)$$

ove $m(t)$ è il momento della coppia di forze attiva la quale dipende dalla grandezza da misurare (ddp o intensità di corrente).

Nell'ipotesi che $m(t)$ vari sinusoidalmente col tempo, in condizioni stazionarie la (36) può essere scritta, col metodo simbolico, come segue:

$$(-\omega^2 J - j\omega\beta + C)\vec{\Theta} = \vec{M}$$

da cui

$$\vec{\Theta} = \frac{\vec{M}}{C - J\omega^2 + j\beta\omega}$$

Il modulo Θ di $\vec{\Theta}$ fornisce l'ampiezza dell'oscillazione:

$$\Theta = \frac{M}{\sqrt{(C - J\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}$$

la quale nel caso di smorzamento critico, in cui $\beta^2 = 4J C = \beta_c^2$

diventa

$$\Theta = \frac{M}{C + j\omega^2} \quad (37)$$

che, tenendo conto della relazione $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ ove T_0 è il periodo proprio di oscillazione dell'equipaggio mobile, ed indicando con T il periodo di $m(t)$ si può scrivere

$$\Theta = \frac{M}{C \left[1 + \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \right]} \quad (38)$$

Il termine stazionario della soluzione della (36) che, come si è detto, è l'unico che abbia interesse nel caso attuale, può dunque scriversi

$$\Theta = \Theta \cos(\omega t + \delta)$$

ove Θ , nel caso attualmente considerato di smorzamento critico, è espresso dalla (38).

La differenza di fase φ tra la deviazione $\Theta(t)$ dell'equipaggio mobile ed il momento $m(t)$ della coppia attiva è

$$\varphi = \arctg \frac{\beta \omega}{C - j\omega^2} = \arctg \frac{\beta \frac{2\pi}{T}}{C \left[1 - \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \right]} \quad (39)$$

Le relazioni (38) e (39) consentono di studiare il comportamento dell'equipaggio mobile; i casi di maggior interesse sono i seguenti:

- a) $T \gg T_0$, in cui $\Theta \approx \frac{M}{C}$ e $\varphi \approx \arctg \frac{2\pi\beta}{CT}$
 b) $T \ll T_0$, in cui $\Theta \approx 0$ e quindi $\varphi \approx 0$.

Come si vede:

- nel caso a), quando cioè il periodo T di $m(t)$, che è anche il periodo della grandezza in misura, è molto maggiore del periodo proprio T_0 dello strumento, la deviazione dell'equipaggio mobile segue le variazioni della grandezza in misura con uno sfasamento che è tanto minore quanto maggiore è T .

Per valori di T sufficientemente elevati la deflessione istantanea dell'equipaggio mobile si può esprimere come $\Theta(t) = \frac{m(t)}{C}$,

relazione analoga alla $\Theta_0 = \frac{1}{C} f(I)$ che si riferisce a condizioni di equilibrio nel caso di corrente continua e costante.

- nel caso b) invece l'equipaggio mobile non riesce a seguire le variazioni della grandezza che ne sollecita il moto, e la deflessione Θ è praticamente nulla.

4.2 Risposta ad una sollecitazione periodica

Le considerazioni precedenti, valide nell'ipotesi che $m(t)$ abbia andamento sinusoidale, possono essere estese al caso in cui $m(t)$ abbia un andamento periodico qualsiasi.

Infatti, sviluppando $m(t)$ in serie di Fourier si ha

$$m(t) = M_0 + \sum_n M_n \cos\left(n \frac{2\pi t}{T} + \alpha_n\right) \quad (40)$$

per cui, sostituendo questa espressione nel secondo membro della (36), si ottiene un'equazione la cui soluzione stazionaria, per la linearità della (36), è la somma delle soluzioni stazionarie delle infinite equazioni il cui primo membro è uguale al primo membro della (36) ed il secondo è costituito via via da uno degli addendi dello sviluppo (40).

Il modulo di ciascuna soluzione, nel caso in cui il moto dell'equipaggio sia aperiodico critico, può essere scritto (v. eq. 38)

$$\Theta_n = \frac{M_n}{C \left[1 + \left(\frac{nT_0}{T}\right)^2\right]} \quad (41)$$

per cui la soluzione stazionaria complessivamente può scriversi

$$\Theta(t) = \frac{M_0}{C} + \sum_n \frac{M_n}{C \left[1 + \left(\frac{nT_0}{T}\right)^2\right]} \cos\left(n \omega t + \delta_n\right)$$

Il caso più interessante, dal punto di vista delle applicazioni pratiche, è quello in cui il periodo T della $m(t)$ soddisfa la condizione $T_0 \gg T$; ne segue, a maggior ragione, $T_0 \gg T/n$, ove T/n è il periodo dell'armonica di ordine n dello sviluppo di Fourier.

4.3 Impiego di uno strumento analogico per misurazioni di correnti e tensioni sinusoidali

Le caratteristiche in uno strumento a bobina mobile sono tali che la condizione $T \ll T_0$ è generalmente verificata per segnali sinusoidali di frequenza dell'ordine dell'hertz. Ne segue che per frequenze superiori la risposta a una sollecitazione sinusoidale è una deviazione praticamente nulla.

Pertanto, per eseguire la misurazione di una corrente o di una tensione sinusoidale si trasforma la sollecitazione medesima in un'altra, periodica, della stessa frequenza e di valor medio non nullo. Lo strumento fornisce quindi, come si è visto, una risposta proporzionale a tale valor medio.

Per ottenere questa trasformazione si utilizzano le proprietà raddrizzatrici dei diodi.

In linea di principio sarebbe sufficiente inserire un diodo in serie alla bobina mobile B dello strumento (fig.83), ottenendo in tal modo un segnale di corrente raddrizzato a una semionda. Uno strumento così modificato,

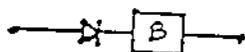


fig 83

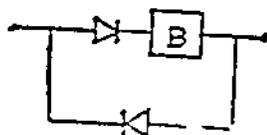


fig 84

posto in serie in un circuito allo scopo di misurare un'intensità di corrente, perturberebbe però drasticamente la grandezza in misura; questa perturbazione viene evitata ponendo in parallelo al sistema di fig.83 un diodo con polarità invertita (fig.84).

Ricordando quanto detto circa il valor medio di un segnale raddrizzato a una semionda, si ha che la deviazione angolare ϑ dell'equi-

paggio mobile è

$$\vartheta = \frac{k I}{C \pi} = \frac{k 2}{C \pi} I_{\text{eff}}$$

Si suole tarare la scala dello strumento in termini di I_{eff} ; ciò

La relazione (41) si riduce allora alla

$$\Theta = \frac{H_0}{C}$$

cioè la deviazione dell'equipaggio mobile raggiunge un valore "di regime" e lo mantiene indipendentemente dal tempo. Tale valore può essere precisato integrando la (40) rispetto al tempo sull'intervallo di un periodo; si ottiene infatti

$$\int_0^T m(t) dt = H_0 T + \int_0^T \sum_n H_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \alpha_n\right) dt$$

da cui

$$m_0 = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) dt = \overline{m(t)}$$

ove con $\overline{m(t)}$ si è indicato il valor medio del momento della coppia deviatrice. Si può quindi esprimere la deflessione costante Θ dell'equipaggio mobile come

$$\Theta = \frac{\overline{m(t)}}{C}$$

Pertanto, verificandosi la condizione $T \ll T_0$, la deviazione dell'equipaggio mobile è proporzionale al valor medio del momento della coppia deviatrice; perciò gli strumenti a scala lineare, per i quali $m(t) = k i(t)$, hanno

$$\Theta = \frac{k}{C} \overline{i(t)}$$

e consentono quindi di leggere il valor medio della grandezza in misura; gli strumenti a scala quadratica, per i quali $m(t) = k i^2(t)$, hanno

$$\Theta = \frac{k}{C} \overline{i^2(t)} = \frac{k}{C} \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{k}{C} I_{eff}^2$$

e possono quindi essere usati per la misura di grandezze periodiche a condizione che i valori letti sulla scala tarata per grandezze indipendenti dal tempo siano interpretati come valori efficaci della grandezza in misura.

si ottiene semplicemente cambiando la costante di proporzionalità, come si vede dalla formula precedente. La non linearità della caratteristica dei diodi impiegati fa sì che la scala dello strumento per misurazioni di intensità di corrente sinusoidale non possa coincidere esattamente con quella per le correnti continue e costanti. Per misurazioni di ddp sinusoidali non è necessario l'impiego del secondo diodo, poichè lo strumento viene inserito in parallelo.

Uno strumento che consenta di misurare, utilizzando la stessa bobina mobile, sia correnti e tensioni continue e costanti, sia, mediante l'impiego dei diodi, correnti e tensioni sinusoidali, fornisce per queste ultime grandezze misure meno precise a causa della dipendenza dalla temperatura delle caratteristiche dei diodi.

Il tipo di raddrizzamento descritto consente di controllare, invertendo i contatti con i puntali dello strumento, la simmetria delle due semionde della sinusoide.

Utilizzando un ponte di diodi secondo lo schema di fig.85 si ottiene un raddrizzamento a due semionde e conseguentemente un raddoppiamento della sensibilità dello strumento.

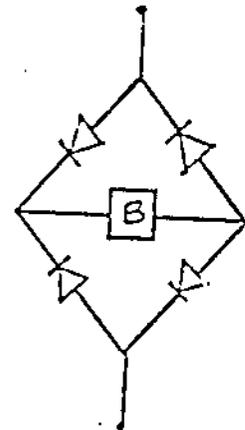


fig.85

INDICE

	PG
1 - Reti elettriche in regime sinusoidale	1
1.1 Generalità sulle grandezze periodiche	1
1.2 Rappresentazione simbolica di una grandezza sinusoidale	5
1.3 Derivata di una grandezza sinusoidale	8
1.4 Integrale di una grandezza sinusoidale	9
1.5 Relazioni tra tensione e corrente nei circuiti in regime sinusoidale	9
1.5.1 Principi di Kirchhoff	10
1.5.2 Relazioni tra tensione e corrente per elementi passivi ideali	11
1.5.3 Impedenza	14
1.5.4 Impedenza equivalente di una rete passiva	15
1.5.5 Esempi di risoluzione di circuiti	18
1.5.6 Teoremi di Thevenin e di Norton	20
1.6 Circuiti attenuatori o sfasatori	23
1.6.1 Quadrupoli passivi	23
1.6.2 Alcuni particolari circuiti attenuatori o sfasatori	24
1.7 Circuiti risonanti	29
1.7.1 Circuito RLC serie	30
1.7.2 Circuito RLC serie come filtro passa-banda	32
1.7.3 Sovratensioni	38
1.7.4 Circuito RLC parallelo	39
1.7.5 Circuito antirisonante in corrente	39
1.7.6 Circuito antirisonante in tensione	41
1.8 Elementi reali di circuito	44
1.8.1 Schema equivalente per un bipolo passivo	47
1.8.2 Schemi di circuiti equivalenti con elementi reali	49
1.9 Potenza in regime sinusoidale	50

2 - Circuiti derivatori e integratori	PG
2.1 Circuiti derivatori	53
2.2 Circuiti integratori	53
2.3 Circuiti derivatori ed integratori con segnali in ingresso di tipo particolare	54
2.3.1 Segnale a gradino	57
2.3.2 Segnale a onda quadra	57
2.3.3 Segnale sinusoidale	59
2.4 Studio del circuito RLC serie in regime non si- nusoidale	67
	69
3 - Diodo	73
3.1 Cenni sulla struttura dei cristalli	73
3.2 Proprietà dei semiconduttori	75
3.3 Diodo a giunzione	76
3.4 Polarizzazione di un diodo e caratteristica di esso	78
3.5 Impiego di un diodo in regime sinusoidale	79
3.5.1 Raddrizzamento a una semionda. Fattore di on- dulazione	80
3.5.2 Raddrizzamento a due semionde	82
4 - Misurazione di tensione e corrente variabili periodicamente in funzione del tempo	84
4.1 Risposta ad una sollecitazione sinusoidale	84
4.2 Risposta ad una sollecitazione periodica	86
4.3 Impiego di uno strumento analogico per misu- razioni di correnti e tensioni sinusoidali	88

Oscilloscopio

di

Alessio - Improta

Hanno collaborato:

G.Cesareni
G.Grossi
C.DeAngelis
L.DeDominicis
D.Guerrucci
M.Pedace
M.L.Ronzoni

OSCILLOGRAFO A RAGGI CATODICI

1.1 Descrizione dello strumento

L'oscillografo a raggi catodici è il più utile strumento per studiare grandezze elettriche variabili nel tempo.

La parte principale di un oscillografo è costituita da un tubo a raggi catodici (TRC), sul cui schermo viene visualizzata la grandezza elettrica in esame.

Un TRC è costituito da una ampolla di vetro (fig. 1), nella quale è stato praticato il vuoto, fornita di un dispositivo, detto cannone elettronico, che produce un fascio di elettroni di velocità circa uguale tra loro e collimato sul punto centrale O dello schermo.

Il cannone è a sua volta costituito da un catodo C , che riscaldato per effetto Joule da un filamento F , emette elettroni per effetto termoelettrico, e da alcuni altri elettrodi A_1, A_2, A_3 di forma, dimensioni, e posizioni diverse, che servono ad accelerare gli elettroni (l'elettrodo acceleratore è posto ad una tensione maggiore di 1000 V), a regolarne il flusso ed a collimarli sullo schermo.

Subito dopo il cannone gli elettroni passano tra le due coppie ortogonali di placchette P_x, P_y .

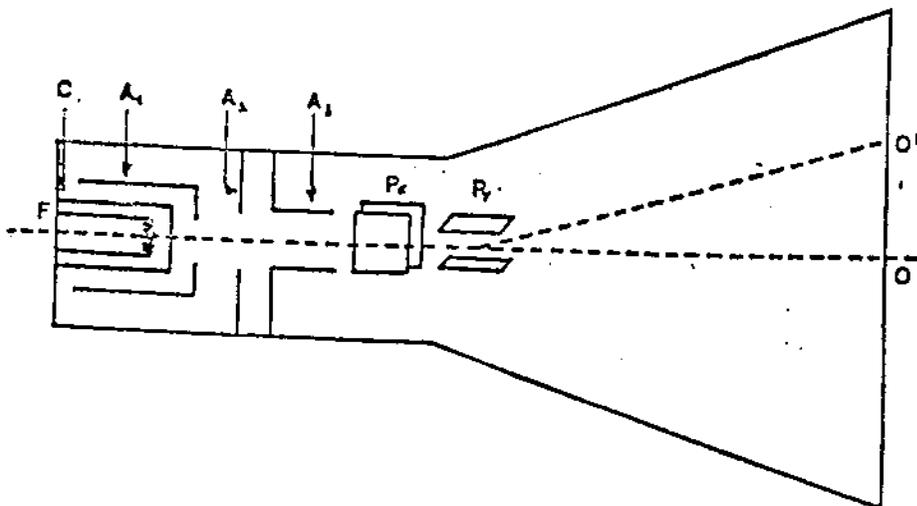


fig. 1

1.2 Traiettoria del fascio di elettroni nel campo elettrico deflettore

Consideriamo ora il moto di un elettrone quando passa tra due placchette alle quali sia applicata una differenza di potenziale V_x .

Ammettendo che l'elettrone esca dal catodo C con velocità trascurabile (*), se la differenza di potenziale tra il catodo C e l'ultimo anodo A_3 è V_0 , l'energia fornita dal campo acceleratore sarà

$$\mathcal{E} = e V_0 \quad (1)$$

e l'elettrone procederà con velocità costante

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} \quad (2)$$

finché non entrerà nel campo elettrico

$$E_x = \frac{V_x}{d} \quad (3)$$

A questo punto la traiettoria prima rettilinea viene deflessa (fig. 2).

Le equazioni del moto sono

$$z = v_0 t \quad (4)$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \quad (5)$$

con

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eV_x}{m d} \quad (6)$$

(*) Anche non tenendo conto dell'energia di legame, la massima energia con cui un elettrone potrà uscire dal catodo sarà:

$$\mathcal{E}_T = \frac{3}{2} K T \approx 1.6 \times 10^{-20} \text{ Joule}$$

con $T = 800^\circ K$, $K = 1,38 \times 10^{-23} \text{ Joule}^\circ K^{-1}$.

Questa energia va confrontata con l'energia ceduta all'elettrone dal campo elettrico acceleratore

$$\mathcal{E}_x = e V_x \approx 1.6 \times 10^{-16} \text{ Joule}$$

con $V = 1.000 \text{ Volts}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ coulomb}$.

Il rapporto $\mathcal{E}_T / \mathcal{E}_x \approx 10^{-14}$ rende plausibile l'ipotesi fatta

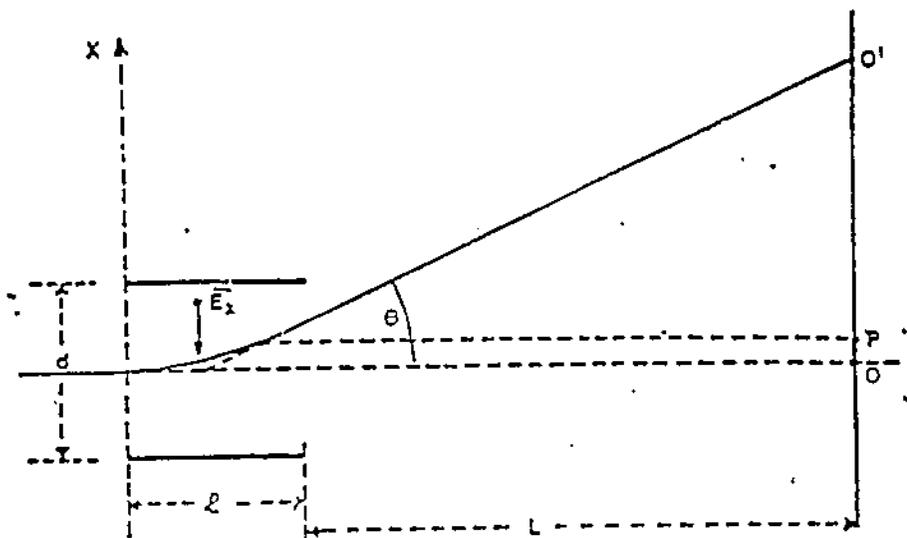


fig. 2

L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando t tra la (4) e la (5):

$$x = \frac{1}{2} a \frac{z^2}{v_0^2} \quad (7)$$

Tenendo conto della (2) e della (6) si ha anche

$$x = \frac{1}{4d} \frac{V_x}{V_0} z^2 \quad (8)$$

Una volta uscito dal campo elettrico l'elettrone procederà di moto rettilineo uniforme con una deflessione θ dalla traiettoria originaria tale che

$$\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{z=l} = \frac{l}{2d} \frac{V_x}{V_0} \quad (9)$$

Dalla figura 2 si ricava che la deflessione X letta sullo schermo è proporzionale a V_x , e la sua espressione è

$$X = \overline{OO'} = \overline{OP} + \overline{PO'} = \frac{1}{4d} \frac{V_x}{V_0} l^2 + L \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2d} \frac{l}{V_0} \left(\frac{l}{2} + L \right) \cdot V_x \quad (10)$$

La costante che moltiplica V_x nella (10) è chiamata "fattore di deflessione". La deflessione può anche essere ottenuta facendo passare una corrente in avvolgimenti aventi l'asse ortogonale all'asse del TRC. I campi magnetici così generati deviano, secondo la legge di Lorentz, gli elettroni dalla loro traiettoria rettilinea. Si noti che mentre nel primo caso la deflessione sullo schermo del TRC è proporzionale a differenze di potenziale, in questo se-

1.3 Studio di forme d'onda

Esaminiamo ora cosa succede qualora si applichi sulle placchette verticali il segnale da esaminare e su quelle orizzontali un potenziale a dente di sega. Il risultato è chiaramente mostrato in fig. 3

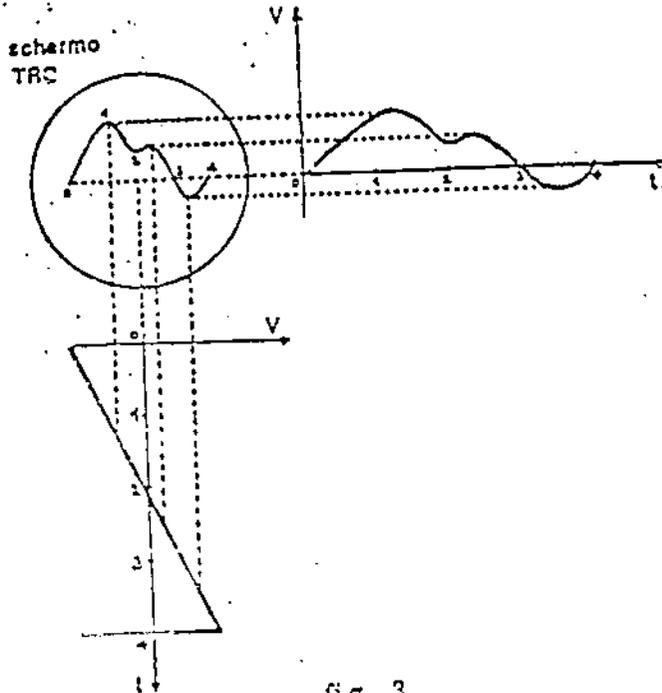


fig. 3

Il potenziale a dente di sega causa uno spostamento orizzontale con $V_x = \text{cost.}$ della traccia del punto luminoso, mentre il segnale in esame determina una deflessione verticale.

Poiché per ogni ciclo di dente di sega si ha:

$$V_x = \alpha t \quad (11)$$

dalla (10) risulta

$$X = \varphi V_x = \varphi \alpha t = \beta t \quad (12)$$

dove φ è il fattore di deflessione orizzontale. Il risultato è che la coordinata spaziale X è proporzionale alla coordinata temporale t .

La trasformazione di coordinate (12), insieme alla relazione (10) permette quindi di passare dal grafico $Y(X)$ disegnato sullo schermo alla funzione temporale $V(t)$.

Quando il potenziale a dente di sega torna dal valore massimo al valore minimo, il punto luminoso ritorna immediatamente nella posizione di partenza, mentre viene spento (blank) il fascetto di elettroni per eliminare la traccia di ritorno.

Un successivo ciclo del dente di sega e del segnale permetteranno di tracciare il medesimo disegno, se il segnale ha un periodo che è sottomultiplo del periodo del dente di sega. Altrimenti, perché questo avvenga ugualmente, occorre che il segnale ed il dente di sega siano sincronizzati in modo tale che il dente di sega parta sempre esattamente allo stesso punto della forma d'onda del segnale. Per assicurare questa condizione si usano dei circuiti elettronici (trigger) associati al TRC.

Alla maggior parte delle frequenze di interesse il punto luminoso si muove troppo velocemente per essere visto come un punto, ed il disegno sullo schermo appare come un'onda stazionaria. Ciò è dovuto alla persistenza della luce di fluorescenza. Un elemento distintivo tra i vari oscillografi è proprio il diverso valore di tale tempo dipendente dal diverso impiego che se ne vuol fare.

1.4 Diagramma a blocchi

Il diagramma a blocchi di un oscilloscopio è il seguente:

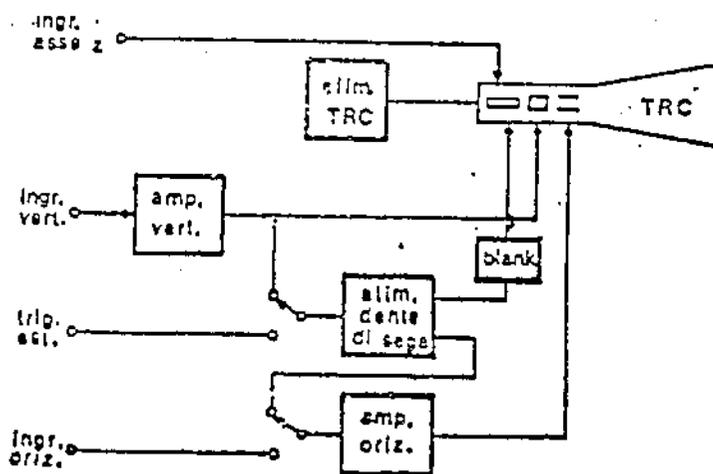


fig. 4

Il segnale da studiare viene applicato ai terminali d'ingresso dell'amplificatore verticale. Il segnale amplificato, in modo da ottenere una deviazione apprezzabile sullo schermo, viene inviato alla placchetta di deviazione verticale. Una porzione dello stesso è usato per permettere una sincronizzazione dei due segnali, (orizzontale e verticale).

Il generatore del dente di sega fornisce anche un impulso che spegne il fascetto di elettroni quando il dente di sega stesso lo riporta nella posizione iniziale.

Qualche volta è utile sincronizzare il dente di sega con un segnale esterno; l'oscilloscopio è quindi fornito di un ingresso per il trigger esterno che può essere connesso mediante un deviatore al generatore del dente di sega.

Un altro deviatore permette, disinserendo il generatore del dente di sega, di applicare all'amplificatore ed alle placchette orizzontali un segnale esterno.

E' anche possibile modulare l'intensità del fascetto di elettroni e quindi la luminosità della traccia sullo schermo variando il potenziale di griglia del cannone elettronico.

1.5 La frequenza limite

Prima di passare ad esaminare in dettaglio le caratteristiche di un particolare oscillografo, può essere utile fare qualche considerazione sulla frequenza massima del segnale che deve essere analizzato dallo strumento.

Questa frequenza massima è fissata dal tempo di transito di un elettrone nel campo elettrico delle placchette deviatrici.

Perché siano valide le considerazioni fatte nelle precedenti pagine bisogna che, durante il transito dell'elettrone, il potenziale ai capi delle placchette deviatrici possa essere considerato costante. Questa approssimazione è valida se

$$T \gg T_{tr} \quad (13)$$

dove T è il periodo del segnale e T_{tr} è il tempo di transito, per il quale vale l'espressione

$$T_{tr} = \frac{l}{v_e} = l \sqrt{\frac{m}{2eV_e}} \approx 1.7 \times 10^{-6} \frac{l}{\sqrt{V_e}} \quad (\text{unità. S.I.}) \quad (14)$$

Considerando un caso realistico $l = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$, $V_e = 1000 \text{ V}$ si ha:

$$T_{tr} \approx 10^{-9} \text{ s.}$$

La condizione (13) è quindi già soddisfatta abbastanza bene per un periodo

$$T = 10^{-8} \text{ s}$$

corrispondente ad una frequenza di 100 MHz.

1.6 Altri usi dell'oscillografo

Un oscillografo a raggi catodici può essere utilizzato per misure di tipo diverso da quelle già menzionate nelle precedenti pagine. Ne accenniamo qui a tre delle più importanti.

a) Misure di differenza di potenziale

Se $V_x = 0$ e $V_y = d. d. p.$ da misurare, la deflessione verticale del punto luminoso ci permette di risalire conoscendo il fattore di deflessione (10), alla differenza di potenziale applicata alla coppia di placchette verticali.

b) Misure di fase

Se applichiamo alle due coppie di placchette di deflessione due segnali sinusoidali di ugual frequenza, otterremo le seguenti deflessioni X e Y in funzione del tempo.

$$X(t) = \alpha v_x(t) = \alpha a \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (15)$$

$$Y(t) = \beta v_y(t) = \beta b \cos(\omega t + \varphi_y)$$

dove α e β sono i due fattori di deflessione.

Eliminando il parametro tempo si ottiene

$$\frac{X^2}{\alpha^2 a^2} + \frac{Y^2}{\beta^2 b^2} - \frac{2XY}{\alpha\beta ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (16)$$

dove

$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

La (16) è l'equazione di un'ellisse centrata nell'origine (mancano i termini del primo ordine) del diagramma X, Y. (fig. 5)

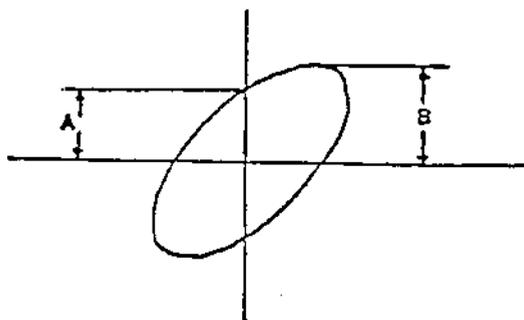


fig. 5

Quando $X = 0$ dalla (16) si ha:

$$\sin \varphi = \frac{Y}{b} = \frac{A}{b}$$

essendo B , il valore massimo della deflessione verticale. Casi particolari:

$$\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0 \quad (18)$$

l'ellisse degenera in una retta.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad A = B \quad (19)$$

il massimo della deflessione verticale coincide con il minimo della deflessione orizzontale.

In questo caso gli assi principali dell'ellisse coincidono con gli assi cartesiani.

c) Misura del rapporto tra le frequenze di due onde sinusoidali

Se il rapporto tra le frequenze di due onde sinusoidali è un numero reale, applicando i due segnali alle placchette di deflessione, si ottengono sullo schermo del TRC delle figure note come figure di Lissajous. Questi disegni permettono di ricavare il rapporto tra le due frequenze facendo il rapporto tra il numero dei massimi della deflessione orizzontale e il numero dei massimi della deflessione verticale

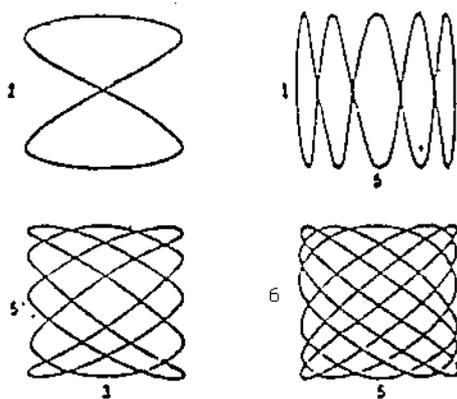


fig. 6

DESCRIZIONE DEI COMANDI E DEI CONNETTORI
DELL'OSCILLOSCOPIO "NATIONAL" mod. VP-5220A

1 - COMANDI DEL TUBO A RAGGI CATODICI (TRC).

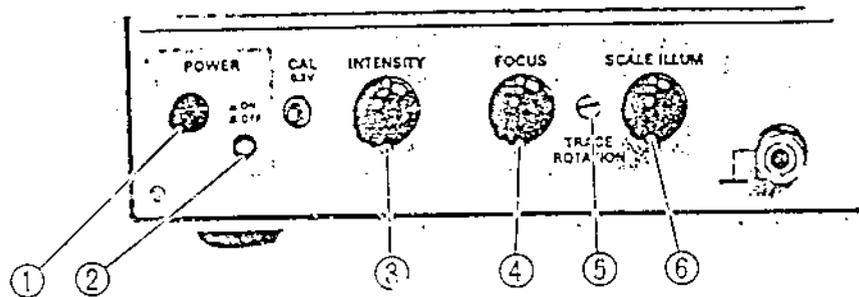


Fig. 1

- 1 - POWER ON/OFF (interruttore) : premere per accendere, premere nuovamente per spegnere.
- 2 - POWER ON (indicatore) si illumina quando l'apparecchio è acceso.
- 3 - INTENSITY : regola la luminosità del segnale rappresentato sul TRC. La luminosità aumenta girando la manopola in senso orario.
4. - FOCUS : corregge un segnale sfocato.
- 5 - TRACE ROTATION :compensa la deflessione causata dal magnetismo terrestre correggendo la pendenza del segnale. "
- 6 - SCALE ILLUM : regola l'illuminazione della scala .

2 - COMANDI PER L'ASSE VERTICALE (ASSE Y)

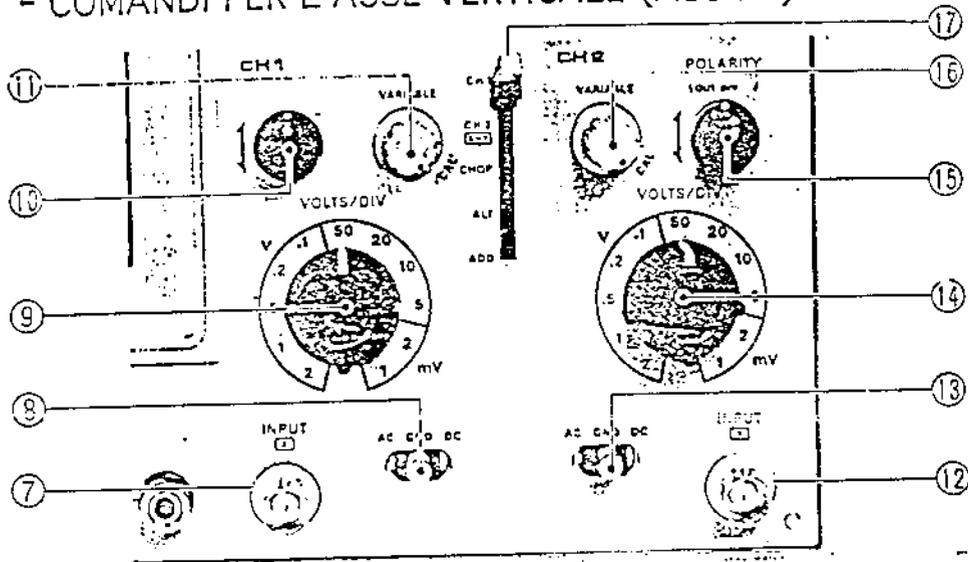


Fig. 2

7- CH1/X INPUT : ingresso di un segnale nel canale 1 mediante un cavo BNC o una sonda . Si utilizza per l'ingresso del segnale sull'asse X quando si opera nel modo X-Y.

8 e 13 - AC-GND-DC : a seconda della conformazione del segnale in ingresso, ed allo scopo di facilitarne l'osservazione, è possibile selezionare un accoppiamento in regime alternato (AC) o continuo (DC).

AC: un condensatore viene inserito in serie tra l'origine del segnale e l'amplificatore per bloccare la componente continua. Ciò è utile per l'osservazione di segnali costituiti da piccole componenti alternate sovrapposte a grandi componenti continue. Il limite inferiore di frequenza è di ~ 5 Hz.

GND : l'ingresso dell'amplificatore è collegato a terra per fornire una posizione di riferimento sul TRC. (Il terminale d'ingresso non viene collegato a terra per evitare danni al circuito in osservazione).

DC: tutte le componenti del segnale sono inviate all'amplificatore.

9 e 14 - VOLTS/DIV : riduce il segnale d'ingresso ad un'ampiezza adatta all'osservazione sul TRC. Se si compiono osservazioni

con una sonda di attenuazione 10:1 l'ampiezza misurata deve essere moltiplicata per un fattore 10.
Accertarsi che "VARIABLE" (v.11 e 16) si trovi nella posizione CAL se si vuole usufruire della calibrazione.

- 10 e 15 - regolatore della posizione verticale. Modifica verticalmente la posizione della traccia sul TRC. Il regolatore di posizione del Canale 2 consente, se tirato verso l'operatore, di invertire la polarità del segnale.
- 11 e 16 - VARIABLE: varia la sensibilità entro le possibilità offerte dal regolatore a scatti VOLTS/DIV.
Completamente ruotato in senso orario, posizione CAL, indica che la sensibilità è quella selezionata mediante il regolatore VOLTS/DIV; ruotato in senso antiorario riduce la sensibilità selezionata mediante VOLTS/DIV di un fattore pari a circa 2,5.
- 17 - Selettore delle modalità di rappresentazione verticale.
- CH1 : è rappresentato solo il segnale del CANALE 1
- CH2 : è rappresentato solo il segnale del CANALE 2 (usato anche per il modo x-y).
- CHOP : i segnali del CANALE 1 e 2 vengono rappresentati alternativamente alla frequenza di un oscillatore interno allo strumento. E' utile per l'osservazione di due segnali che si ripetono con bassa frequenza.
- ALT: i segnali del CANALE 1 e del CANALE 2 vengono rappresentati alternativamente, in corrispondenza di successive corse orizzontali della traccia. E' utile per l'osservazione di due segnali che si ripetono con frequenza elevata.
- ADD : viene rappresentata la somma algebrica dei segnali del CANALE 1 e del CANALE 2. Se il comando POLARITY del CANALE 2 è regolato nel modo INVERT, viene rappresentata la differenza.

3 COMANDI PER L'ASSE ORIZZONTALE (ASSE X)

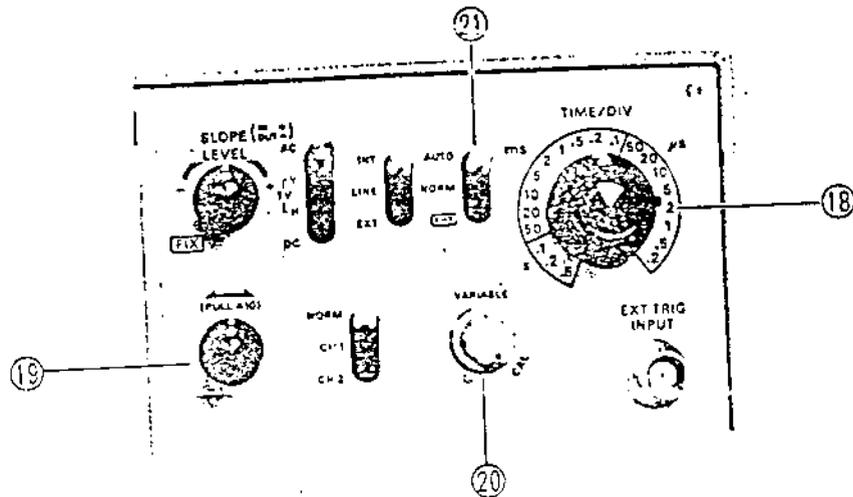


Fig. 3

- 18 - TIME/DIV:** selettore del periodo del segnale a dente di sega e quindi della velocità di spostamento della traccia lungo l'asse x, da 0.5 s/div a un massimo di 20 ns/div (con amplificazione $\times 10$, v. paragrafo 19) in venti passi calibrati.
- 19 -** Regolatore della posizione orizzontale. Modifica orizzontalmente la posizione della traccia sul TRC. Inoltre, se il regolatore viene tirato verso l'operatore, la velocità orizzontale della traccia viene amplificata 10 volte.
- 20 - VARIABLE:** quando è ruotato completamente in senso orario la velocità orizzontale della traccia è quella selezionata mediante il comando TIME/DIV; ruotandolo in senso antiorario, la velocità orizzontale della traccia varia con continuità tra quelle corrispondenti alle divisioni del comando TIME/DIV.
- 21 AUTO-NORM-X-Y :** selettore della modalità di "triggerazione" (=avvio dello spostamento orizzontale della traccia).
- AUTO :** corse libere della traccia lungo l'asse orizzontale in assenza di un opportuno segnale di "trigger". La "triggerazione" avviene per segnali di trigger con frequenza maggiore di 100Hz.

NORM : il segnale a dente di sega viene applicato alle placchette di deviazione orizzontale quando l'apposito circuito riceve un adeguato segnale di "trigger" (=avvio). In assenza del segnale di trigger non viene visualizzata alcuna traccia.

X-Y : sull'asse x viene rappresentato il segnale d'ingresso del canale 1; sull'asse y viene rappresentato il segnale d'ingresso del canale 2.
N.B. Quando si usa questo modo, il selettore della modalità di rappresentazione verticale (17) deve essere posizionato nel modo CH2.

4 - COMANDI DEL "TRIGGER".

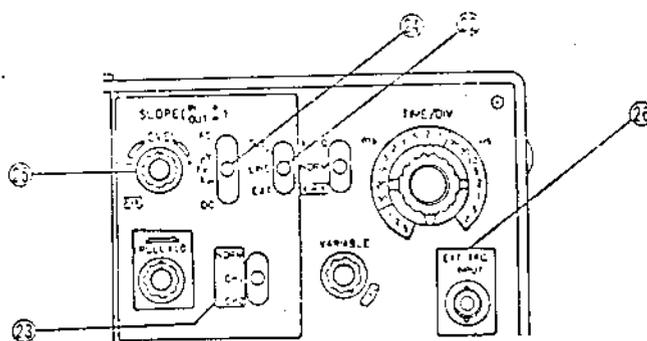


FIG. 4

22 - INT-LINE-EXT: Selettore della sorgente di trigger.

INT: viene utilizzato come sorgente di trigger il segnale d'ingresso del Canale 1 o del Canale 2.

LINE: la triggerazione viene effettuata alla frequenza di rete

EXT: il segnale di trigger è quello in ingresso al connettore EXT TRIGGER SIGNAL INPUT (26).

23- NORM-CH1-CH2 : selettore della sorgente interna di trigger. La sorgente di trigger viene selezionata come segue dai segnali applicati a CH1 o CH2 INPUT quando il selettore della sorgente di trigger (22) è su INT.

CH1 : La sorgente trigger è il segnale APPLICATO al CH1.

NORM : La sorgente di trigger è il segnale rappresentato sul TRC.

CH2 : La sorgente di trigger è il segnale applicato al CH2.

24-AC-TV(V)-TV(H)-DC: Selettore di accoppiamento del segnale di trigger.

Il segnale di trigger viene filtrato mediante un circuito apposito prima di entrare in funzione come avvio dell'asse dei tempi.

AC : il filtro è costituito da un condensatore per bloccare ogni componente continua, in modo che la triggerazione venga effettuata indipendentemente dal livello di tale componente continua.

DC: il segnale di trigger viene utilizzato per la triggerazione con tutte le sue componenti.

25 - LEVEL, FIX, SLOPE : questo comando fornisce il controllo fine del valore di tensione al quale il segnale di trigger avvia l'asse dei tempi. Quando è completamente ruotato in senso antiorario, su FIX, il livello di trigger è fissato nel modo ottimale. Questo comando inoltre, consente di stabilire in corrispondenza di quale valore del segnale di ingresso parte il segnale a dente di sega: quando la manopola viene tirata verso l'osservatore e ruotata in corrispondenza del segno -, è possibile scegliere tale valore in corrispondenza della "pendenza" negativa del segnale in studio; quando è spinta verso l'interno e ruotata in corrispondenza del segno +, si può sceglierlo in corrispondenza della "pendenza" positiva del segnale in studio.

26 - EXT TRIGGER INPUT : connettore d'ingresso per un segnale di trigger esterno.

N76

5 - ALTRI COMANDI E CONNETTORI

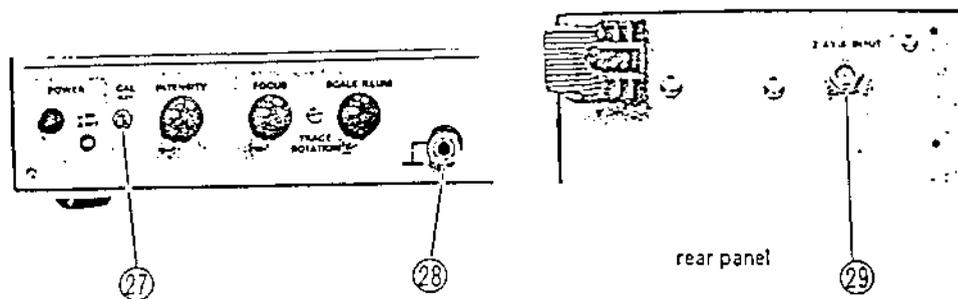


FIG. 5

- 27 - CAL : fornisce un segnale di calibrazione a onda quadra della frequenza di $\sim 1\text{KHz}$ e di ampiezza 0.3 v.
- 28 - : collegamento di massa della carcassa : permette una facile connessione alla carcassa .
- 29 - Z AXIS INPUT (pannello posteriore): applicando a questo ingresso un segnale positivo (+5V o più) viene ridotta l'intensità della traccia.

DESCRIZIONE DEI COMANDI E DEI CONNETTORI
DELL'OSCILLOSCOPIO HEWLETT PACKARD MOD. 1205 A/B.

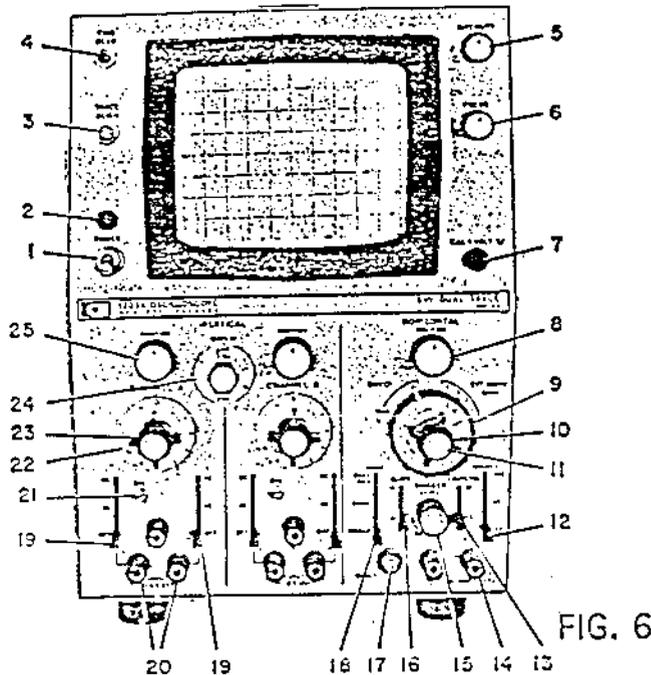


FIG. 6

- 1 - POWER : fornisce tensione al circuito primario dello strumento .
- 2 - Indicatore: si illumina quando viene acceso lo strumento.
- 3 - TRACE ALIGN: allinea la traccia con le rette orizzontali del reticolo sullo schermo.
- 4 - FIND BEAM : quando viene premuto la traccia ritorna sullo schermo.
- 5 - INTENSITY : regola la luminosità della traccia.
- 6 - FOCUS : regola la nitidezza della traccia.
- 7 - CAL 1 VOLT: fornisce un'onda quadra di ampiezza 1V picco-picco e di frequenza di rete (50 Hz).
- 8 - POSITION : regola la posizione orizzontale della traccia.
- 9 - SWEEP/EXT HORIZ: posizionato su SWEEP applica un segnale a dente di sega tra le placchette di deviazione orizzontale. In particolare, su "x1", gli inversi della velocità orizzontale della traccia sono quelli indicati dal comando n.10; su "MAG", la velocità orizzontale della traccia aumenta di un fattore 10.

Posizionato su EXT HORIZ consente di selezionare il fattore di deflessione essendo il segnale esterno applicato al connettore TRIG & HORIZ INPUT.

10-Time/Division: seleziona la velocità orizzontale della traccia.

11-Horizontal CAL: fornisce una regolazione continua del fattore di deflessione orizzontale fra i valori consentiti dal selettore n. 9 quando è posizionato su "EXT HORIZ".

12 SOURCE: seleziona la sorgente del segnale di "TRIGGER" che dà l'avvio allo spostamento della traccia.
In posizione LINE viene usato come trigger un segnale con frequenza di rete.
In posizione INT, viene usato come trigger il segnale del canale A se il comando "DISPLAY" (n. 24) è regolato su A, ALT, o CHOP; il segnale del canale B se il comando "DISPLAY" è regolato su B.
In posizione EXT, viene usato come trigger il segnale applicato al connettore TRIG & HORIZ INPUT.

13 - Horizontal COUPLING : in posizione AC il segnale in ingresso viene filtrato mediante un circuito capacitivo allo scopo di eliminare l'eventuale componente continua; in posizione DC il segnale in ingresso conserva tutte le proprie componenti.

14 - TRIG & HORIZ INPUT : consente l'applicazione di un segnale esterno di trigger o l'applicazione di un segnale esterno alle placchette di deviazione orizzontale.

15 - TRIGGER: seleziona, nella forma d'onda del segnale di trigger, il valore del potenziale che dà l'avvio allo spostamento orizzontale della traccia.
In posizione AUTO vengono generati trigger automatici con una frequenza di 40Hz.

16 - SLOPE: consente di scegliere se dare inizio allo spostamento orizzontale della traccia in corrispondenza a pendenza positiva o negativa del segnale di trigger.

17 - RESET : premendolo, se la levetta "MODE" (n. 18) è posizionata su "SINGLE", si ottiene per una sola volta la corsa orizzontale della traccia. Rilasciandolo, l'apposito circuito viene nuovamente predisposto; l'indicatore si illumina quando questa operazione è completata.

- 18 - MODE : nella posizione NORM, il moto orizzontale della traccia ha inizio all'arrivo di ciascun segnale di trigger. Nella posizione SINGLE la traccia viene fatta partire una sola volta in corrispondenza dell'arrivo del segnale di trigger, dopodichè l'apposito circuito deve essere nuovamente predisposto con operazione manuale (v. n. 17). Nella posizione FREE RUN la traccia viene fatta partire continuamente e la velocità orizzontale del suo moto è selezionabile mediante la manopola n. 10 (Time/Division).
- 19 -Vertical COUPLING: analogo del n. 13 per quanto riguarda i segnali avviati alle placchette di deviazione verticale.
- 20-INPUT: ingresso di segnali agli amplificatori verticali. Applicando un segnale tra il connettore "+" e quello collegato a terra, il segnale viene rappresentato sullo schermo col suo segno; applicandolo tra il connettore "-" e quello a terra il segnale appare invertito. E' possibile anche appiccare il segnale tra i connettori + e -. In tal caso non c'è collegamento a terra.
- 21- BAL : minimizza lo spostamento della traccia quando si cambia la posizione della manopola n. 22 (Volt/Division).
- 22-Volt/Division:permette di selezionare il fattore di deflessione dell'amplificatore verticale fra 17 valori.
- 23- Vertical CAL : fornisce una regolazione continua del fattore di deflessione fra i valori selezionabili mediante la manopola n. 22 (Volt/Division). Nella posizione CAL, il valore della deflessione verticale è quella indicata dalla manopola n. 22 (Volt/Division).
- 24 - DISPLAY : seleziona l'immagine visibile sullo schermo.
- Posizione A: è visibile l'immagine del segnale in ingresso al canale A.
 - Posizione B: è visibile l'immagine del segnale in ingresso al canale B.
 - Posizione ALT: è visibile separatamente l'immagine del segnale in ingresso a ciascun canale, in

corrispondenza di corse orizzontali alternate della traccia.

- Posizione CHOP: per ciascuna corsa orizzontale della traccia vengono presentati alternativamente, con una frequenza di circa 100 KHz, i segnali in ingresso ai due canali. Quando la levetta n. 12, "SOURCE", si trova nella posizione INT, come segnale di trigger viene usato quello del canale A.
- Posizione A vs B; è visibile un diagramma X-Y dei segnali in ingresso ai due canali: il segnale del canale A viene inviato alle placchette di deviazione verticale, quello del canale B alle placchette di deviazione orizzontale.

25 - POSITION : regola la posizione verticale della traccia.

181

OSC. H.P.

Model 1205A/B

Section

Table 1-1. Specifications

VERTICAL AMPLIFIERS

DEFLECTION FACTOR:

Ranges: From 5 mV/div to 20 V/div (12 positions) in 1, 2, 5 sequence. $\pm 3\%$ accuracy with Vernier in calibrated position.
Vernier: Continuously variable between all ranges; extends maximum deflection factor to at least 50 V/div.

BANDWIDTH: Dc to 500 kHz with a maximum risetime of 0.7 μ sec. 2 Hz to 500 kHz when ac coupled.

INPUT: Differential or single-ended on all ranges, selectable by front-panel control.

COMMON MODE:

Frequency: Dc to 10 kHz on all ranges.
Rejection Ratio: At least 50 dB with dc input coupling on 5 mV/div to 0.2 V/div ranges. CMRR is at least 30 dB on the 0.5 V/div to 20 V/div ranges.
Signal maximum: ± 3 V (dc + pk ac) on 5 mV/div to 0.2 V/div ranges; ± 300 V (dc + pk ac) on all other ranges.

INPUT COUPLING: Front-panel selection of DC, AC, or OFF for both + and - inputs.

INPUT RC: 1 megohm shunted by 45 pF; constant on all ranges.

MAXIMUM INPUT: ± 400 V (dc + pk ac).

DISPLAY: Channel A. Channel B. Channels A and B (either Chop or Alternate). Channels A and B vs. horizontal input (Chop only). Channel A vs. B (A-vertical, B-horizontal). Chop frequency is approximately 100 kHz.

INTERNAL TRIGGER: By channel A signal for A, Chop, and Alternate displays. Channel B signal for B display.

ISOLATION: Greater than 80 dB between channels at 500 kHz with input connectors shielded.

PHASE SHIFT: (For Channel A vs. B) Less than 1° to 100 kHz (Verniers in calibrated position).

TIME BASE

SWEEP:

Ranges: From 1 μ sec/div to 5 sec/div (21 positions) in 1, 2, 5 sequence. $\pm 3\%$ accuracy with Vernier in calibrated position.
Vernier: Continuously variable between ranges; extends slowest sweep to at least 12.5 sec/div.

X10 MAGNIFIER: Indicates magnified sweep time/division directly with $\pm 5\%$ accuracy.

AUTOMATIC TRIGGERING: Baseline is displayed in absence of an input signal.

Internal: 50 Hz to above 500 kHz on most signals causing 0.5 division or more vertical deflection. Triggering on line frequency also selectable.
External: 50 Hz to above 1 MHz on most signals at least 0.2V p-p.
Trigger Slope: Positive or negative slope on internal, external or line trigger signals.

AMPLITUDE SELECTION TRIGGERING:

Internal: Dc to above 500 kHz on signals causing 0.5 division or more vertical deflection.
External: Dc to 1 MHz on signals at least 0.2V p-p. Input impedance is 1 megohm shunted by approximately 20 pF.
Trigger Level and Slope: Internal, any point on vertical waveform displayed; or continuously variable from +100V to -100V on either slope of the external trigger signal.
Trigger Coupling: Dc or ac for external, line, or internal triggering. Lower ac cutoff is 1.6 Hz for external; 5 Hz for internal.

SINGLE SWEEP: Selectable by front-panel switch, reset pushbutton with armed indicator light.

FREE RUN: Selectable by front-panel switch.

MAXIMUM INPUT: ± 350 V (dc + pk ac).

OSC. H. P.

Section I

Table 1-1. Specifications (Cont'd)

Model 1205 A/

HORIZONTAL AMPLIFIER

BANDWIDTH: Dc to 300 kHz. With input ac coupled, low frequency cutoff is 1.6 Hz.

DEFLECTION FACTOR:

Ranges: 0.1 V/div, 0.2 V/div 0.5 V/div, and 1 V/div:

Vernier: Continuously variable between ranges; extends maximum deflection factor to at least 2.5 V/div.

INPUT: Single-ended.

INPUT RC: 1 megohm shunted by approximately 20 pF.

MAXIMUM INPUT: $\pm 350\text{V}$ (dc + pk ac).

GENERAL**CATHODE-RAY TUBE.**

Type: Mono-accelerator, 3000V accelerating potential; P31 phosphor standard (see Modifications for other phosphors); etched safety glass faceplate reduces glare.

Graticule: 8 x 10 divisions; parallax-free internal graticule; 0.2 subdivision markings on horizontal and vertical major axes, 1 div = 1 cm.

Intensity Modulation: +2V signal blanks trace of normal intensity; +8V signal blanks any intensity. Dc coupled input on rear panel; amplifier risetime approximately 200 ns; input resistance is 5 kilohms.

CALIBRATOR:

Type: Line frequency square wave.

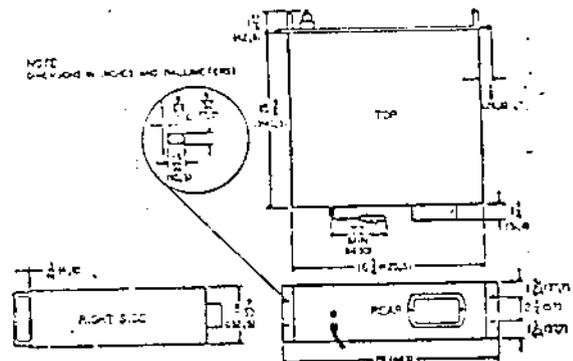
Output: $1\text{V} \pm 1.5\%$, front-panel connector.

BEAM FINDER: Pushbutton to locate beam on CRT screen regardless of setting of vertical, horizontal, and intensity controls.

DIMENSIONS:

Cabinet: 8-5/16 in. wide x 11-3/4 in. high x 18-11/16 in. deep (211,1 mm, 293,5 x 374,4 mm).

Rock: Refer to outline drawing.

**WEIGHT:**

Cabinet: Net, 25 lb (11,3 kg); shipping, 34-1/2 lb (15,6 kg).

Rock: Net, 22-1/2 lb (10,2 kg); shipping, 35 lb (15,8 kg).

POWER: 115 or 230V $\pm 10\%$; 47 to 440 Hz; approximately 45W.

MODIFICATIONS

CRT PHOSPHORS: (specify by phosphor number): P31 standard, P2, P7 (with amber filter), and P11 available at no extra cost.

OPTIONS AND SPECIALS: Refer to Section VII for further information.

Characteristic	Performance	Operational information
----------------	-------------	-------------------------

X-Y Operation

Deflection factor	1 mV/DIV to 2V/DIV Channel 1 as X-axis Channel 2 as Y-axis	
Deflection accuracy	1 mV/DIV, 2mV/DIV \pm 7% 5mV/DIV to 2V/DIV \pm 5%	
Frequency bandwidth	VP-5220A	VP-5231A
Y-axis	1mV/DIV	DC to 5MHz -3dB
	2mV/DIV	DC to 5MHz -3dB
	5mV/DIV	DC to 20MHz -3dB
X-axis	DC to 500kHz, -3dB	
Phase difference	<3° at 50kHz	<8° at 200kHz

Z axis

Polarity and sensitivity	A positive going input voltage (from +5V) will decrease intensity.	
Bandwidth	DC to 5MHz	
Input resistance	50k Ω \pm 20%	
Input coupling	DC	
Maximum input voltage	50V (DC + AC peak)	

Calibrator

Output voltage	0.3V, \pm 3%	
Waveform	Positive square wave	
Frequency	1kHz \pm 20%	

Cathode-ray Tube

Tube type	VP-5220A	VP-5231A
	8 x 10DIV Internal graticule	8 x 10DIV Internal graticule
Accelerating potential Graticule area	2kV \pm 10%	6kV \pm 10%
	8 DIV vertical by 10 DIV horizontal 1 DIV \approx 10mm	8 DIV vertical by 10 DIV horizontal 1 DIV \approx 9.5mm
Scale illumination	Yes	Yes

184

Characteristic	Performance			Operational information
Power Supply				
Line voltage	VP-5220A	VP-5231A		
Rating	100V.	90 to 110V	90 to 110V	
	115V.	104 to 126V	104 to 126V	
	215V.	194 to 236V	194 to 236V	
	230V.	207 to 250V	207 to 250V	
Line frequency	50Hz to 60Hz	50Hz to 60Hz		
Power Consumption	55W	45W		at 50Hz, 100V
Environmental Conditions				
Assured performance temperature or humidity	15°C to 35°C			
	20% to 80%			
Operating temperature	0°C to 45°C			
Operating relative humidity	20% to 80%			
Storage temperature	-20°C to 70°C			
Mechanical Characteristics				
Dimensions	Height (mm)	Width (mm)	Depth (mm)	
Main body only	177 ± 3	264 ± 3	400 ± 3	
Measured at Maximum point	188 or less	312 or less	530 or less	
Weight (without accessories)	Approx. 8 kg.			
Accessories				
Instruction Manual	x 1			— note — 500mA (TSC500MA) is added for 215V/230V model.
Probes	x 2	— VQ-054N3015 —		
Fuse	x 1	— 1A (TSC1A) — see note.		
Lamp	x 1			
Optional Accessories				
Hood	VQ-035C10			
Stand	VQ-037F			
Front Cover	VQ-039E20			
Rack Mount	VQ-039R10			
1/10 Attenuator for 10MΩ Probe	VQ-031S			

Specifications

Characteristic	Performance	Operational information
Vertical Deflection (Both channels)		
Deflection factor	1 mV/DIV to 2V/DIV, 1-2-5 sequence	11 steps
Accuracy (+20°C)	1 mV/DIV to 2mV/DIV ±5% 5 mV/DIV to 2V/DIV ±3%	
Variable sensitivity	Reduces the selected VOLTS/DIV sensitivity by a factor of approximately 2.5.	
Frequency response	VP-5220A	VP-5231A
1 mV/DIV, 2mV/DIV	DC to 5MHz, -3dB	DC to 5MHz, -3dB
5 mV/DIV	DC to 20MHz, -3dB	DC to 30MHz, -3dB
Input impedance	1MΩ paralleled by approx. 30pF 10MΩ paralleled by approx. 19pF	
Direct with Probe	300V (DC + AC peak), 600V peak-peak for 10 minutes.	
Maximum input voltage	CH1, CH2, CHOP, ALT, ADD	
Vertical display mode	Signal frequency is less than 1 kHz.	
Signal delay	Available (VP-5231A only)	
Horizontal Deflection System		
Horizontal Display mode	0.5s/DIV to 0.2μs/DIV in 20 calibrated steps in 1-2-5 sequence.	
Sweep mode	AUTO, NORM, X-Y	
Sweep rate accuracy	±5%	
Sweep variable	Reduces the selected sweep rate by a factor of approximately 2.5.	
Sweep magnification	The waveform at the center of CRT is magnified 10 times.	
Magnification Accuracy	0.5s/DIV to 0.5μs/DIV ±7% 0.2μs/DIV ±10%	
Maximum sweep rate	20ns/DIV	
Sweep length	11.5 DIV ± 1.5 DIV	

