

Elementi di Teoria dei Gruppi

Giovanni Salmè - Anno Accademico 2012-2013

La nozione di **Simmetria** è tra le più importanti in Fisica. Sotto l' azione di una particolare trasformazione (od operazione) il sistema, o alcune proprietà del sistema, o le leggi che governano il sistema rimangono invariate.

Esempio banale: se ruotiamo una sfera attorno ad un qualsiasi diametro, la sfera rimane invariata. Quindi se descriviamo la sfera in termini matematici, tale descrizione matematica deve risultare invariante per trasformazioni di rotazione attorno al diametro.

Esempio meno banale: se l' interazione tra i costituenti di un sistema non varia con il tempo, si ha l' invarianza (costanza) dell'energia totale del sistema. Di nuovo, una descrizione matematica del sistema dovrà contenere questa proprietà di simmetria (invarianza).

Le simmetrie possono essere **discrete** (p.e. parità, coniugazione di carica, inversione temporale) o **continue** (p.e. traslazioni, rotazioni, trasformazioni da un riferimento inerziale ad un altro, ecc.), cioè dipendenti da una o più variabili continue (coordinate, angoli, velocità, ecc.).

Le simmetrie sono appropriatamente descritte in linguaggio matematico, utilizzando due concetti : **Gruppo** ed **Algebra**.

I Gruppi

Un Gruppo \mathcal{G} è un insieme di elementi g_1, g_2, g_3, \dots (forse un fisico preferirebbe dire di **un insieme di trasformazioni**) che deve

- essere dotato di una **legge di composizione**, (detta *moltiplicazione* e che indicheremo con m), che ha le seguenti proprietà
 - **Chiusura**: se $g_1 \in \mathcal{G}$ e $g_2 \in \mathcal{G}$, anche $m(g_1, g_2) \in \mathcal{G}$
 - **Associativa**: $m(g_1, m(g_2, g_3)) = m(m(g_1, g_2), g_3)$
- contenere i seguenti elementi:
 - **L'identità** e , tale che $m(e, g) = m(g, e) = g, \forall g \in \mathcal{G}$
 - **L'inverso** g^{-1} , tale che $m(g^{-1}, g) = m(g, g^{-1}) = e, \forall g \in \mathcal{G}$

I° Esempio

I Numeri Interi (positivi e negativi): \mathbb{Z}

Legge di composizione: Addizione

- **Chiusura**: $z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}$
- **Associativa**: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- **L'identità**: $0 + z_i = z_i + 0 = z_i$
- **L'inverso**: $z_i + (-z_i) = 0$

quindi le proprietà gruppali **sono verificate**

Se cambiamo legge di composizione ed adottiamo la familiare moltiplicazione, cosa succede?

Legge di composizione: Moltiplicazione

- **Chiusura:** $z_1 \times z_2 \in \mathbb{Z}$
- **Associativa:** $z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
- **L'identità:** $1 \times z_i = z_i \times 1 = z_i$
- **L'inverso:** $1/z_i \notin \mathbb{Z} !!!$

Le proprietà gruppali **non sono verificate**.

Si può estendere l'insieme, includendo i numeri razionali ed escludendo lo zero, ottenendo così un gruppo per la Moltiplicazione.

II° Esempio (di rilievo per la Fisica)

Il gruppo complesso delle fasi $\mathcal{G} = \mathbf{U}(1) = \{e^{i\theta}\}$

Legge di composizione: Moltiplicazione

- **Chiusura:** $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} \in \mathbf{U}(1)$
- **Associativa:** $e^{i\theta_1} \times (e^{i\theta_2} \times e^{i\theta_3}) = (e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}) \times e^{i\theta_3}$
- **L'identità:** $e^0 \times e^{i\theta_i} = e^{i\theta_i} \times e^0 = e^{i\theta_i}$
- **L'inverso:** $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^0 = 1$

Il gruppo $\mathbf{U}(1)$ è composto da matrici 1×1 , complesse, **unitarie** ($UU^\dagger = U^\dagger U = 1$). Questo gruppo governa la simmetria del campo elettromagnetico, nel senso che le Equazioni di Maxwell (\equiv unificazione dell'elettromagnetismo) sono invarianti sotto l'azione di un elemento $\in \mathbf{U}(1)$.

Alcune nozioni utili

- **L'ordine di un gruppo** è il numero di elementi che compongono il gruppo. Se l'ordine è finito il gruppo si dice finito. Il gruppo delle permutazioni di 3 oggetti, \mathbf{S}_3 è finito ($3! = 6$ elementi), mentre il gruppo delle matrici $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ che rappresentano le rotazioni proprie nello spazio euclideo \mathbf{R}^3 , $\mathbf{SO}(3)$, è infinito ($\mathbf{SO}(3)$ è un sottogruppo, vedi più in basso, di $\mathbf{O}(3)$, che contiene anche le inversioni spaziali).
- Un gruppo infinito è detto **continuo** se il numero degli elementi è infinito non denumerabile (cioè non in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri interi).
- Un gruppo \mathcal{G} è detto **commutativo** o **abeliano** se $\forall \{g_1, g_2\} \in \mathcal{G}$ si ha

$$m(g_1, g_2) = m(g_2, g_1).$$

Se g_1 e g_2 sono matrici e m è il prodotto righe per colonne:

$g_1 g_2 = g_2 g_1$. Il gruppo delle traslazioni o il gruppo delle rotazioni attorno ad un asse sono abeliani, mentre i gruppi \mathbf{S}_3 e $\mathbf{SO}(3)$ (che contiene tutte le possibili rotazioni) sono non abeliani.

- Un sottoinsieme $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ è detto **sottogruppo** di \mathcal{G} se l'insieme dei suoi elementi è un gruppo con la stessa legge di composizione di \mathcal{G} (in particolare è **chiuso**). Le permutazioni pari (che si ottengono con un numero pari di scambi dalla sequenza principale $\{1, 2, 3\}$) costituiscono un sottogruppo di \mathbf{S}_3 . Il gruppo delle rotazioni attorno all'asse z è un sottogruppo di $\mathbf{SO}(3)$
- Un sottogruppo, \mathcal{I} , del gruppo \mathcal{G} si chiama **invariante** se $\forall i \in \mathcal{I}$ e $\forall g \in \mathcal{G}$ si ha

$$m(g, m(i, g^{-1})) = i' \in \mathcal{I}$$

Se g e i sono matrici e m è il prodotto righe per colonne:

$$g i g^{-1} = i' \in \mathcal{I}$$

- Un gruppo \mathcal{G} si chiama **semplice** se non ha sottogruppi invarianti (a parte l'identità e il gruppo stesso). È detto **semi-semplice** se non ha sottogruppi invarianti abeliani, ma può averne di non-abeliani (se il gruppo è semplice sarà anche semi-semplice, poichè non ha sottogruppi invarianti per definizione; non è vero il viceversa!).

Nelle applicazioni fisiche i gruppi semi-semplici hanno un particolare rilievo, poichè le loro rappresentazioni matriciali hanno importanti proprietà che descriveremo di seguito (Teorema di Racah: numero di operatori di Casimir \equiv rango dell'algebra, \rightarrow generatori diagonalizzabili simultaneamente). Esempio I: il sottogruppo delle rotazioni tridimensionale attorno ad un asse è un sottogruppo abeliano di $\mathbf{SO}(3)$ *ma non è invariante*, quindi $\mathbf{SO}(3) \in$ Gruppi semplici. Esempio II: $\mathbf{SU}(n)$ è semplice per $n \geq 2$, come vedremo in dettaglio per $\mathbf{SU}(2)$.

- A partire da due gruppi \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 è possibile definire **il gruppo prodotto diretto**, $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$, costituito dall'insieme di tutte le coppie ordinate (g_1, g_2) , con $g_1 \in \mathcal{G}_1$ e $g_2 \in \mathcal{G}_2$, che verifica le proprietà gruppali ed è dotato della seguente legge di composizione, \mathcal{M} , tra due coppie ordinate (g_1, g_2) e (g'_1, g'_2)

$$\mathcal{M} [(g_1, g_2), (g'_1, g'_2)] = [m_1(g_1 g'_1), m_2(g_2 g'_2)]$$

L'addizione del momento angolare orbitale e dello spin è un esempio di prodotto diretto tra i gruppi $\mathbf{SO}(3)$ e $\mathbf{SU}(2)$. Altri esempi relevantissimi:

- l'unificazione delle interazioni debole (governata dalla simmetria dello spin debole: $\mathbf{SU}(2)$) ed elettromagnetica ($\mathbf{U}(1)$): $\mathbf{SU}(2) \otimes \mathbf{U}(1)$
- l'unificazione ulteriore con le interazioni forti ($\mathbf{SU}(3)$): $\mathbf{SU}(3) \otimes \mathbf{SU}(2) \otimes \mathbf{U}(1)$ (modello standard).

Come sono state definite le funzioni di numeri reali (complessi) [cioè una ben definita legge che associa ad un numero reale (complesso) uno o più altri numeri reali (complessi)], così si può definire una funzione (una **applicazione**) che associ ad un elemento di un gruppo uno o più elementi di un altro gruppo.

Una applicazione $\phi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ è chiamata **omeomorfismo** se

$$g_1 \rightarrow \phi(g_1) \quad g'_1 \rightarrow \phi(g'_1) \quad \forall \{g_1, g'_1\} \in \mathcal{G}_1$$

$$\text{con } \phi(g_1) \text{ e } \phi(g'_1) \in \mathcal{G}_2$$

implica che

$$m(g_1, g'_1) \rightarrow \phi [m(g_1, g'_1)] = m [\phi(g_1), \phi(g'_1)] \in \mathcal{G}_2$$

In particolare,

- se l'omeomorfismo è **biunivoco** (cioè, esiste una relazione uno a uno tra gli elementi di \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2) si chiama **isomorfismo**.
- se l'applicazione è tale che $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1$, allora un omeomorfismo diventa un endomorfismo ed un isomorfismo un **automorfismo**. (cioè se a $g_1 \in \mathcal{G}_1$ corrisponde uno ed un solo $\phi(g_1) \in \mathcal{G}_2 \equiv \mathcal{G}_1$)

Questo concetto di applicazione, p.e., sarà utilizzato per introdurre la nozione di rappresentazione matriciale di un gruppo.

Breve Legenda

Le notazioni utilizzate per indicare i vari gruppi sono costruite per indicare le proprietà rilevanti del gruppo.

- $\mathbf{G} \equiv$ generale
- $\mathbf{S} \equiv$ speciale, il determinante della rappresentazione matriciale di un generico elemento è uguale a 1
- $\mathbf{L} \equiv$ lineare il generico elemento agisce su uno spazio lineare
- $\mathbf{O} \equiv$ ortogonale, $G^T G = I$, il prodotto del trasposto di un elemento per l'elemento stesso è uguale a 1 (conservazione del prodotto scalare, generalizzazioni dallo spazio euclideo a metriche non definite)
- $\mathbf{R} \equiv$ nella rappresentazione matriciale di un generico elemento vi sono soltanto numeri reali
- $\mathbf{C} \equiv$ nella rappresentazione matriciale di un generico elemento vi sono soltanto numeri complessi
- $\mathbf{U} \equiv$ il generico elemento è unitario, $G^\dagger G = I$
- $(n) \equiv$ dimensione dello spazio R^n , su cui agisce la rappresentazione fondamentale. Per spazi a metrica non definita si ha la notazione (m, n) , dove nella metrica avrò m segni negativi e n segni positivi, o viceversa a secondo della convenzione adottata (p.e. per lo spazio di Minkowski si ha $(3, 1)$)

Gruppi di Lie

Un Gruppo di Lie è un **gruppo continuo** i cui elementi sono **funzioni analitiche** (continue e infinitamente differenziabili), di un numero finito di parametri $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Hanno un particolare rilievo i gruppi di Lie *connessi*, poichè grazie alla proprietà di analiticità, **si può connettere con continuità l'elemento IDENTITÀ a qualsiasi altro elemento del gruppo**.

Un gruppo di Lie connesso avrà un numero infinito di elementi in un intorno dell'identità. In particolare, sono di rilievo per le applicazioni in Fisica (poichè devono avere sicuramente una rappresentazione matriciale e si connettono *univocamente* all'identità) i gruppi di Lie che dipendono **linearmente** dai parametri ($\partial/\partial\alpha_i \neq 0$), per piccoli valori degli stessi. In questo caso, quando si è **infinitesimalmente** vicini all'identità si ha

$$\lim_{\text{piccolo } \vec{\alpha}} g \simeq 1 + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{T}}$$

dove

- i parametri (reali o complessi) $\{\alpha_i\}$, con $i = 1, 2, \dots, N$, sono parametri continui. Il gruppo si dice **compatto** se i parametri variano in un intervallo chiuso e limitato. Esempi: **Rotazioni \Rightarrow compatto**; **Traslazioni \Rightarrow non compatto**
- N : è la **dimensione** del gruppo di Lie in esame,
- L'insieme di **operatori** $\{\mathbf{T}_i\} \equiv \{-i\partial g/\partial\alpha_i|_{\vec{\alpha}=0}\}$, con $i = 1, 2, \dots, N$, sono chiamati **generatori del gruppo di Lie** in esame

I generatori permettono attraverso l'**esponenziazione** di scrivere un qualsiasi elemento del gruppo in modo economico, nel senso che è più semplice studiare le proprietà dei generatori che sono soltanto N , invece delle proprietà degli infiniti elementi che compongono il gruppo di Lie in esame. Un elemento del gruppo si ottiene applicando infinite volte la trasformazione infinitesima

$$g(\vec{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + i \frac{\vec{\alpha}}{n} \cdot \vec{\mathbf{T}} \right]^n = \exp \left[i \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{T}} \right]$$

N.B. D'ora in poi con gruppi di Lie ci riferiremo a gruppi di Lie che si possono esponenziare

Se il gruppo di Lie è **unitario e a parametri reali**, allora i generatori sono **hermitiani**. Infatti, poichè $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$, vuol dire che $U^\dagger = U^{-1}$,

$$\begin{aligned} U^\dagger &= \left\{ \exp \left[i \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{T}} \right] \right\}^\dagger = \exp \left[-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{T}}^\dagger \right] = \\ &= \exp \left[-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{T}} \right] = U^{-1} \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzata l'hermitianità dei generatori ! Le proprietà gruppali, si traducono immediatamente (grazie alla esponenziazione) in relazioni di commutazione tra generatori

- dalla composizione: $[\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j] = i C_{ij}^k \mathbf{T}_k$ con $\{C_{ij}^k\} \equiv$ **costanti di struttura**
- Dalla associatività \Rightarrow le identità di Jacobi

$$[[\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j], \mathbf{T}_n] + [[\mathbf{T}_j, \mathbf{T}_n], \mathbf{T}_i] + [[\mathbf{T}_n, \mathbf{T}_i], \mathbf{T}_j] = 0$$

$$\text{ovvero } C_{ij}^k C_{kn}^\ell + C_{jn}^k C_{ki}^\ell + C_{ni}^k C_{kj}^\ell = 0$$

- Le regole di commutazione dei generatori e le identità di Jacobi definiscono **l'algebra** associata al gruppo di Lie in esame. Ricordiamo che un'algebra è uno spazio vettoriale lineare dotato di una legge di composizione. **L'algebra di Lie** è lo spazio vettoriale astratto i cui elementi sono i generatori, la legge di composizione sono le regole di commutazione (o anticommutazione o miste, ecc.) e si deve verificare le identità di Jacobi.
- Una subalgebra dell'algebra di Lie, A , è chiamata *un ideale*, \mathcal{I} , se $\forall i \in \mathcal{I}$ e $\forall a \in A$ si ha $[i, a] \in \mathcal{I}$.
- Un'algebra di Lie si dice **semplice**, se ha solo ideali triviali (p.e. l'algebra stessa). Sarà chiamata **semi-semplice** se **non ha** ideali abeliani. Un'algebra semplice è anche semi-semplice, ma non è vero il viceversa.
- Lo studio delle algebre di Lie semi-semplici è quello più rilevante per le applicazioni fisiche (vedi $SU(n)$), poichè le **algebre di Lie semi-semplici** sono esprimibili come **somma diretta** di algebre semplici. A livello di gruppi, un **gruppo semi-semplice** si potrà esprimere come **prodotto diretto** di gruppi semplici. Vedi il Teorema di Racah per un'altra importante proprietà.

- Il **rango dell'algebra** di Lie è dato dal numero massimo di generatori commutanti tra loro. Quindi dà il numero di generatori che potranno essere rappresentati da matrici diagonalizzabili simultaneamente.
P.e., il rango dell'algebra dei generatori di $\mathbf{SU}(n)$ è $n - 1$ (la dimensione, cioè il numero dei generatori, è $n^2 - 1$).
- Dati due gruppi \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , **l'algebra del gruppo prodotto diretto** è l'algebra dei generatori del primo e del secondo gruppo.
- Gli operatori (almeno del **secondo ordine** o di **ordine superiore**) che si costruiscono a partire dai generatori del gruppo e che 1) commutano con tutti i generatori e 2) commutano tra di loro, si chiamano **operatori di Casimir**. Per esempio, se $\mathbf{T}^2 = \sum_i \mathbf{T}_i^2$ commuta con tutti i generatori, $\{\mathbf{T}_i\}$, allora \mathbf{T}^2 è un operatore di Casimir. L'esempio più noto è il quadrato del momento angolare. Per i gruppi semi-semplici il numero degli operatori di Casimir è uguale al rango (Teorema di Racah).

Questa proprietà apre la possibilità, p.e., di identificare i multipletti, formati da autostati degeneri di una data Hamiltoniana, per mezzo degli autovalori degli operatori di Casimir relativi al gruppo di simmetria della Hamiltoniana (vedi il caso di Hamiltoniane con invarianza rotazionale, $\mathbf{SO}(3)$).

Dato un gruppo di Lie, si individua una sola algebra. Non è vero il viceversa. Data un'algebra si possono individuare gruppi di Lie diversi (ovviamente in relazione l'uno con l'altro). Un esempio tipico: **l'algebra delle matrici di Pauli e quella dei generatori delle rotazioni tridimensionali è la stessa**, ma le matrici 2×2 di Pauli conducono al gruppo speciale unitario, $\mathbf{SU}(2)$ (spin seminteri ed interi), **omeomorfo** al gruppo speciale ortogonale delle rotazioni, $\mathbf{SO}(3)$, che ha come generatori delle matrici 3×3 . L'omeomorfismo $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$ è del tipo $2 \rightarrow 1$. $\mathbf{SU}(2)$ descrive le rotazioni sia degli stati corrispondenti a momenti angolari semi-interi ed interi, mentre $\mathbf{SO}(3)$ solo interi. Diversamente, Le loro algebre sono isomorfe!

Gruppo di Lie \Rightarrow **Generatori del Gruppo** \Rightarrow **Algebra di Lie (dei generatori)**

Algebra di Lie (dei generatori) \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Gruppo di Lie} \\ \text{Gruppo di Lie} \\ \dots \end{array} \right.$

Esempio

$\mathbf{SO}(3)$: gruppo delle Rotazioni nello Spazio Euclideo \mathbb{R}^3

Le rotazioni nello spazio euclideo tridimensionale dipendono in modo continuo da **tre** parametri che definiscono la rotazione stessa (i *tre* angoli di Eulero: sono gli angoli che governano la rotazione più generale possibile, p.e. rotazioni attorno a i) \hat{z} , ii) \hat{y}' , iii) \hat{z}'). Si può passare con continuità dalla matrice identità $(\delta_{i,k})$ ad una qualsiasi altra rotazione, poichè la dipendenza dagli angoli è data dalle funzioni analitiche coseno e seno. Inoltre il gruppo è compatto, poichè gli angoli variano comunque nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Le rotazioni agiscono su vettori dello spazio \mathbb{R}^3 e sono *rappresentate* da matrici 3×3 . Vedremo in seguito che se agiranno su spazi di funzioni, la loro rappresentazione potrà cambiare dimensionalità, o perfino assumere una forma differenziale (dimensionalità infinita della rappresentazione).

Il gruppo delle **matrici 3×3** che rappresentano le rotazioni proprie (connesse con continuità all'identità) in \mathbf{R}^3 viene indicato con la sigla **$\mathbf{SO}(3)$** , dove **S** sta per *speciale* (le matrici hanno $\det = +1$), ed **O** per *ortogonale*. L'aggettivo ortogonale ci ricorda la ben nota proprietà delle rotazioni: il prodotto scalare tra due vettori non cambia se applichiamo la stessa rotazione ai due vettori. Vedremo in dettaglio come questa proprietà si traduce in una ben definita caratteristica delle matrici che descrivono le rotazioni. Come ultima osservazione, è utile sottolineare la differenza con il gruppo $\mathbf{O}(3)$, di cui $\mathbf{SO}(3)$ è un sottogruppo: $\mathbf{O}(3)$ contiene anche l'inversione spaziale, I_s , ($\det = -1$), che *non può essere connessa con continuità alla identità, diversamente dalle rotazioni proprie* ($\det = +1$). Va notato che **l'inversione spaziale commuta con tutti e tre i generatori delle rotazioni**, e quindi $\mathbf{O}(3) = \mathbf{SO}(3) \cup \mathbf{SO}(3) \otimes I_s$.

Per semplicità consideriamo una rotazione attorno all'asse z . Basterà un solo angolo, θ , per definirla

$$\begin{aligned}x' &= \cos\theta x + \sin\theta y \\y' &= -\sin\theta x + \cos\theta y \\z' &= z\end{aligned}$$

In forma matriciale, se consideriamo vettori colonna, si ha

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R}_z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

il determinante di \mathcal{R}_z è uguale a $+1$ (!).

Per vettori riga si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \mathcal{R}_z^T \end{aligned}$$

La proprietà di invarianza del modulo del vettore (meglio del prodotto scalare tra due vettori) si traduce in una relazione che lega la matrice \mathcal{R}_z alla sua trasposta \mathcal{R}_z^T . In particolare

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 &= \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \mathcal{R}_z^T \mathcal{R}_z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \mathcal{R}_z^T \mathcal{R}_z = \mathbf{I} \end{aligned}$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità. Per una generica rotazione

$$\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathbf{I}$$

Per piccoli valori dell'angolo θ la matrice di rotazione diventa

$$\lim_{\text{piccoli } \theta} \mathcal{R}_z = \lim_{\text{piccoli } \theta} \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + i\theta \mathbf{T}_3 \simeq \exp[i\theta \mathbf{T}_3]$$

dove \mathbf{T}_3 è una matrice hermitiana che può essere diagonalizzata con una opportuna **trasformazione di similitudine** S

$$\mathbf{T}_3 = -i S \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se si esegue una analisi simile per il caso generale si ottiene che

$$\mathcal{R}(\alpha, \phi, \theta) = \exp[i\alpha \mathbf{T}_1 + i\phi \mathbf{T}_2 + i\theta \mathbf{T}_3]$$

dove

$$\mathbf{T}_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che sotto l'azione della trasformazione di similitudine cambieranno rappresentazione. **N.B. si può diagonalizzare un solo generatore alla volta, il rango è 1.**

Come si può verificare con un calcolo diretto, i generatori, $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$ verificano le seguenti regole di commutazione

•

$$[\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2] = i\mathbf{T}_3$$

$$[\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3] = i\mathbf{T}_1$$

$$[\mathbf{T}_3, \mathbf{T}_1] = i\mathbf{T}_2$$

• dalla proprietà di associatività si ottiene

$$\underbrace{[[\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2], \mathbf{T}_3] + [[\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3], \mathbf{T}_1] + [[\mathbf{T}_3, \mathbf{T}_1], \mathbf{T}_2]} = 0$$

Identità di Jacobi

e quindi $\{\mathbf{T}_i\}$ fornisce l'algebra di $\mathbf{SO}(3)$, che si indica con $\mathfrak{so}(3)$.

Le regole di commutazione tra due generatori si possono scrivere in modo compatto utilizzando il tensore di Levi-Civita

$$\epsilon_{ikj} = \begin{cases} 0 & \text{se due indici sono uguali} \\ -1 & \text{se } \{i, k, j\} = \text{permutazione dispari di } \{1, 2, 3\} \\ 1 & \text{se } \{i, k, j\} = \text{permutazione pari di } \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

Si ha

$$[\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_k] = i \epsilon_{ikj} \mathbf{T}_j \quad (\epsilon_{ikj} \equiv \text{costanti di struttura})$$

È di particolare rilievo la seguente combinazione quadratica dei generatori

$$\mathbf{T}^2 = (\mathbf{T}_1)^2 + (\mathbf{T}_2)^2 + (\mathbf{T}_3)^2$$

Questo nuovo operatore è l'**operatore di Casimir** e commuta con tutti i generatori del gruppo. Come facilmente si riconosce, le regole di commutazione dei generatori delle rotazioni sono le stesse degli operatori di momento angolare e l'operatore di Casimir per $\mathbf{SO}(3)$ non è altro che l'operatore modulo quadro del momento angolare.

Un' ultima osservazione che mette in luce l'importanza dell'analisi fatta: se invertiamo i passi fatti, 1) **consideriamo un'algebra di Lie** e 2) **esponenziamo i generatori**, 3) **otteniamo un gruppo di Lie**.

È chiaro che lo studio dell'algebra è equivalente allo studio delle proprietà del gruppo, ma risulta più semplice, poichè il numero di generatori è finito. Questa osservazione sarà di particolare rilievo quando si passerà dalle trasformazioni delle coordinate cartesiane alle trasformazioni di funzioni (o di vettori di spazi astratti) che dipendono da coordinate cartesiane (\rightarrow la *teoria delle rappresentazioni*).

Infine, va ricordato che oltre alle rotazioni esistono molte simmetrie, rilevanti nello studio di processi fisici, che hanno la proprietà di avere una struttura infinitesimale, e quindi si possono investigare analizzando direttamente l'algebra di Lie dei generatori, piuttosto che il gruppo di Lie associato alla simmetria (p.e. $\mathbf{SU}(2)$, $\mathbf{SU}(3)$, il gruppo proprio di Lorentz, ecc.).

Alcuni Gruppi di Lie rilevanti per la Fisica

- **Gruppi ortogonali:** matrici **reali** $n \times n$ ortogonali con $|\det(a)| = 1$ (a generico elemento). I generatori sono $n(n - 1)/2$.

Se consideriamo l'invarianza del prodotto scalare tra due vettori dello spazio euclideo, si ottiene la proprietà di ortogonalità familiare:

$\mathbf{O}^T \mathbf{O} = \mathbf{I}$. Il gruppo si indica con $\mathbf{O}(n)$, Esempio I: $O(3)$ descrive nello spazio tridimensionale sia le rotazioni proprie, cioè connesse all'identità ($\det(a) = +1$), sia le rotazioni improprie, ottenute moltiplicando le proprie per l'inversione spaziale ($\det(a) = -1$). L'inversione spaziale commuta con tutti i generatori.

Se la proprietà di ortogonalità è più generale: $\mathbf{O}^T g \mathbf{O} = g$, con $g_{\mu\nu}$ il cosiddetto tensore metrico, (cioè una matrice diagonale che ha m elementi $= +1$ e n elementi $= -1$), il gruppo si indica con $\mathbf{O}(m, n)$, Esempio II: $O(3, 1)$ descrive nello spazio di Minkowski sia le rotazioni spazio-temporali ($\det(a) = +1$), sia le inversioni spaziali e temporali ($\det(a) = -1$).

- **Gruppi ortogonali speciali (connessi):** Hanno $N = n(n - 1)/2$ generatori hermitiani, e il rango è $[N/2]$, cioè il più grande numero intero che approssima o è uguale a $N/2$. Tutti gli elementi hanno $\det(a) = +1$, e a seconda della proprietà di ortogonalità considerata avremo $\mathbf{SO}(n)$ o $\mathbf{SO}(m, n)$. Esempio I: $\mathbf{SO}(3) \rightarrow$ rotazioni nello spazio euclideo tridimensionale (è molto rilevante notare che $\mathbf{SU}(2)$ ha la stessa algebra dei generatori di $\mathbf{SO}(3)$). Esempio II: $\mathbf{SO}(3, 1) \rightarrow$ trasformazioni di Lorentz (rotazioni tridimensionali + cambiamenti di sistema di riferimento, o boosts).
- **Gruppi unitari (connessi):** si indicano con $\mathbf{U}(n)$, \Rightarrow matrici complesse $n \times n$ unitarie ($\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$). Sono definite da n^2 parametri, e i generatori hermitiani sono n^2 . Lasciano invariato il prodotto scalare tra due vettori complessi. Esempio: $\mathbf{U}(1) \Rightarrow$ elettromagnetismo

- **Gruppi unitari speciali (connessi):** si indicano con $\mathbf{SU}(n)$ (N.B. $\mathbf{U}(n) \supset \mathbf{SU}(n)$) \Rightarrow matrici complesse $n \times n$ unitarie con $\det(a) = +1, \forall a \in \mathbf{SU}(n)$. I generatori, Hermitiani, sono $n^2 - 1$, a causa del vincolo $\det(a) = +1$. Devono avere traccia nulla poichè ($a = \exp [i \sum_n \alpha_n T_n]$)

$$\det(a) = \exp \left[i \sum_n \alpha_n \text{Tr} (T_n) \right] = 1$$

Il rango è $n - 1$. Esempio: $\mathbf{SU}(2) \Rightarrow$ interazioni deboli, $\mathbf{SU}(3) \Rightarrow$ interazioni forti. Per $\mathbf{U}(n)$ i generatori hanno $\text{Tr} (T_n) \neq 0$.

- **Gruppi speciali lineari complessi:** si indicano con $\mathbf{SL}(n, C)$, \Rightarrow matrici complesse $n \times n$ con $\det(a) = +1$, hanno $2(n^2 - 1)$ generatori a traccia nulla, e rango $2(n - 1)$. Esempio: $\mathbf{SL}(2, C)$, che ha la stessa algebra dei generatori di $\mathbf{SO}(3, 1)$.
- **Gruppi simplettici:** $\mathbf{Sp}(2n)$, matrici reali $2n \times 2n$ che lasciano invariata ($g^T S g = S$ con $g \in \mathbf{Sp}(2n)$) la matrice antisimmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{I}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} \quad S^2 = - \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n \times n} \end{pmatrix} = -\mathbf{I}$$

Analogia con $i^2 = -1$ (simplettico come sinonimo di complesso, nel senso che ci ricorda che il quadrato della matrice = -1). Hanno $n(2n + 1)$ generatori, e rango n . Lasciano invariata la parte immaginaria del prodotto scalare di due vettori complessi, $\vec{a}^* \cdot \vec{b}$, che si può scrivere con la matrice S se ordiniamo i vettori in questo modo: $(x_R, y_R, \dots; x_I, y_I \dots)$. Esempio: $\mathbf{Sp}(6)$ struttura hamiltoniana dello spazio delle fasi.

- **Gruppi eccezionali:** sono in totale 5, $\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$ e descrivono simmetrie sul campo degli ottonioni (ottuple di numeri, generalizzazione dei numeri complessi). Esempi: $\mathbf{E}_6 \rightarrow$ teoria grandunificata, $\mathbf{E}_8 \rightarrow$ Teoria grandunificata supersimmetrica.

Rappresentazioni di un Gruppo

Finora abbiamo considerato l'azione delle rotazioni sugli elementi di uno spazio euclideo tridimensionale (l'insieme delle coordinate cartesiane $\{x, y, z\}$). Ora generalizzeremo lo spazio su cui gli elementi del gruppo agiscono. Di particolare rilievo è l'azione sugli elementi di uno spazio vettoriale lineare, che sta alla base del linguaggio matematico utilizzato in Meccanica Quantistica. Per essere concreti la domanda a cui vogliamo rispondere, p.e. prendendo in esame il gruppo delle rotazioni, è:

Se applichiamo una rotazione (3D) alle coordinate, $\{x, y, z\}$, come si **trasforma** la funzione d'onda, $\psi(x, y, z)$, del sistema quantistico in esame ? Come sarà rappresentata la **trasformazione** che agisce nello spazio (infinito dimensionale) di Hilbert degli stati $|\psi\rangle$?

Consideriamo un elemento g del gruppo \mathcal{G} . Se all'elemento g possiamo far corrispondere (*un'applicazione*) l'azione di una trasformazione, lineare ed invertibile, che agisce su un vettore, che appartiene ad uno spazio vettoriale lineare a N dimensioni (con N finito), allora avremo una corrispondenza tra l'elemento g e **la sua rappresentazione** matriciale $N \times N$, G .

$$g \rightarrow G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}$$

In generale questa corrispondenza non è biunivoca. Inoltre potremmo pensare a **spazi vettoriali più astratti**, (p.e. spazi di funzioni quadrato-sommabili, ecc.) e in questo caso avere **rappresentazioni infinito dimensionali**. Esempio: per le rotazioni, si hanno differenti rappresentazioni per i tre generatori, sia rappresentazioni infinito dimensionali (forma differenziale) che finito dimensionali (quando si applicano i generatori alle armoniche sferiche).

Come possiamo costruire le rappresentazione di un certo gruppo \mathcal{G} ?

Questo è uno dei problemi fondamentali della teoria delle rappresentazioni dei gruppi. La pratica più usuale in Meccanica Quantistica è trovare le rappresentazioni degli operatori rilevanti per il problema fisico che si sta studiando, utilizzando le loro autofunzioni. Ma non è l'unico modo di procedere.

Come esempio pratico riprendiamo in esame il gruppo delle rotazioni $\mathbf{SO}(3)$. Abbiamo precedentemente ottenuto, in modo esplicito, la rappresentazione dei generatori di $\mathbf{SO}(3)$ **quando lo spazio vettoriale è lo spazio euclideo tridimensionale. Vediamo cosa succede se consideriamo uno spazio vettoriale più astratto**, p.e. lo spazio delle funzioni scalari integrabili su \mathbb{R}^3

Per semplicità consideriamo una **funzione, $\psi(\vec{r})$, scalare** (cioè rimane invariata se ruotiamo il sistema di riferimento), e **rotazioni attorno all'asse z** : $\vec{r}' = \mathcal{R}_z \vec{r}$, con $\vec{r} \equiv \{x, y, z\}$ e $\vec{r}' \equiv \{x', y', z\}$. La rotazione può essere interpretato in due modi. Il sistema di riferimento rimane fisso e cambiamo la posizione del vettore \vec{r} (**trasformazione attiva**), oppure il vettore rimane fisso e trasformiamo il sistema di riferimento (**trasformazione passiva**). Ora consideriamo un vettore $|\psi\rangle$ che appartiene ad un certo spazio di Hilbert. La sua rappresentazione nello spazio delle coordinate sarà un certo *prodotto scalare*: $\psi(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \psi \rangle$, cioè la nostra funzione scalare. Se ruotiamo il sistema di riferimento, p.e. una rotazione attorno all'asse z , \mathcal{R}_z , allora

$$|\psi'\rangle = \mathcal{U}[\mathcal{R}_z] |\psi\rangle$$

dove \mathcal{U} è l'operatore che produce la rotazione nello spazio dei vettori $|\psi\rangle$.

$$\langle \vec{r}' | \psi' \rangle = \langle \vec{r}' | \mathcal{U}[\mathcal{R}_z] | \psi \rangle$$

Come sarà fatto (o meglio, che rappresentazione avrà) l'operatore \mathcal{U} ? La risposta sarà fornita da \mathcal{U} nella *rappresentazione delle coordinate*:

$$\langle \vec{r}' | \mathcal{U} | \vec{r}'_1 \rangle.$$

Per ottenere $\langle \vec{r}' | \mathcal{U} | \vec{r}'_1 \rangle$ ricordiamo che per ipotesi abbiamo una quantità scalare, cioè

$$\langle \vec{r}' | \psi' \rangle = \psi'(\vec{r}') = \psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle.$$

Analizziamo questa relazione per una rotazione infinitesima attorno all'asse z ,

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}' | \psi' \rangle &= \psi'(\vec{r}') = \psi(\vec{r}) = \psi(\mathcal{R}_z^{-1} \vec{r}') \simeq \psi(\vec{r}' - i\phi \mathbf{T}_3 \vec{r}') \simeq \\ &\simeq \psi(x' + \phi y', y' - \phi x', z) \simeq \\ &\simeq \psi(\vec{r}') + \phi y' \frac{\partial \psi(\vec{r}')}{\partial x'} - \phi x' \frac{\partial \psi(\vec{r}')}{\partial y'} = \\ &= \psi(\vec{r}') + \phi \left[y' \frac{\partial}{\partial x'} - x' \frac{\partial}{\partial y'} \right] \psi(\vec{r}') = \\ &= \left\{ 1 - \phi \left[x' \frac{\partial}{\partial y'} - y' \frac{\partial}{\partial x'} \right] \right\} \psi(\vec{r}') \simeq \\ &\simeq \exp[-i\phi L_3] \psi(\vec{r}') = \exp[-i\phi L_3] \langle \vec{r}' | \psi \rangle = \\ &= \int d\vec{r}'_1 \exp[-i\phi L_3] \delta(\vec{r}' - \vec{r}'_1) \langle \vec{r}'_1 | \psi \rangle = \\ &= \int d\vec{r}'_1 \exp[-i\phi L_3] \langle \vec{r}' | \vec{r}'_1 \rangle \langle \vec{r}'_1 | \psi \rangle = \\ &= \int d\vec{r}'_1 \langle \vec{r}' | \mathcal{U} | \vec{r}'_1 \rangle \langle \vec{r}'_1 | \psi \rangle = \langle \vec{r}' | \mathcal{U} | \psi \rangle \end{aligned}$$

avendo usato la completezza $\int d\vec{r}'_1 | \vec{r}'_1 \rangle \langle \vec{r}'_1 |$ e

$L_3 = -i [x \partial / \partial y - y \partial / \partial x]$. Quindi la rappresentazione cercata è

$$\langle \vec{r}' | \mathcal{U} | \vec{r}'_1 \rangle = \exp[-i\phi L_3] \langle \vec{r}' | \vec{r}'_1 \rangle = \exp[-i\phi L_3] \delta(\vec{r}' - \vec{r}'_1)$$

e ci permette di descrivere una trasformazione attiva da $|\psi\rangle$ a $|\psi'\rangle$ (vettori di uno spazio funzionale), avendo fissato il sistema di riferimento.

$$\langle \vec{r}' | \psi' \rangle = \langle \vec{r}' | \mathcal{U} | \psi \rangle$$

Nello spazio infinito-dimensionale della rappresentazione delle coordinate, il generatore \mathbf{T}_3 ha la forma familiare: L_3 (con $\vec{L} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla}$), cioè la derivata rispetto all'angolo di rotazione attorno all'asse z (angolo polare). Se invece consideriamo gli autostati di \mathbf{T}_3 , possiamo costruire uno spazio vettoriale finito dimensionale su cui opera il generatore. Di nuovo possiamo chiederci che rappresentazione ha \mathbf{T}_3 (e quindi \mathcal{R}_z) in questo caso: si otterrà una rappresentazione matriciale. Gli autostati sono dati da

$$\frac{\exp(i m \phi)}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{con } m \in [-m_{max}, m_{max}]$$

dove $m_{max} = 0, 1, 2, 3, \dots$. Fissiamo m_{max} (da ricordare che questo valore fornisce l'autovalore dell'operatore di Casimir \mathbf{T}^2), si individua un sottospazio vettoriale che ha come base gli autostati di \mathbf{T}_3 dati da $\exp(i m \phi)/\sqrt{2\pi}$ con $m \in [-m_{max}, m_{max}]$. Allora il generatore \mathbf{T}_3 avrà la seguente rappresentazione **finito dimensionale**

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} m_{max} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_{max} - 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -m_{max} + 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & -m_{max} \end{pmatrix}$$

Per $m_{max} = 1$, si ottiene una rappresentazione *equivalente* a quella ottenuta nel caso di uno spazio euclideo tridimensionale.

- Un gruppo \mathcal{G} può avere molte (infinite) rappresentazioni.
- Se esiste una corrispondenza **biunivoca** tra matrici ed elementi g del gruppo \mathcal{G} , si parla di **rappresentazione fedele**.
- Le dimensioni di una rappresentazione sono le dimensioni dello spazio vettoriale su cui si sta applicando il gruppo \mathcal{G} . Una rappresentazione può avere dimensioni finite o infinite.
- La moltiplicazione tra matrici (legge di composizione) è associativa, quindi è automaticamente soddisfatta anche questa proprietà gruppane.
- Deve essere possibile costruire l'inversa della matrice che rappresenta l'elemento g del gruppo \mathcal{G} , per poter soddisfare la proprietà gruppane di esistenza dell'inverso.
- La rappresentazione fondamentale di un gruppo è la rappresentazione fedele con le dimensioni più piccole. Per i gruppi abeliani la rappresentazione fondamentale è 1×1 (i numeri commutano tra di loro e quindi si ottiene una rappresentazione fedele di un gruppo abeliano), mentre per i gruppi non abeliani (p.e. i gruppi $\mathbf{SU}(n)$ con $n \geq 2$) la dimensionalità della rappresentazione fondamentale deve essere maggiore di 1 (bisogna avere delle matrici per soddisfare le regole di commutazione dei generatori ed avere quindi una rappresentazione fedele).
- Grazie alla esponenziazione, per ottenere le rappresentazioni dei gruppi di Lie connessi, basta concentrarsi sulle rappresentazioni dei generatori
- Le costanti di struttura forniscono un'altra importante rappresentazione dei generatori di un gruppo di Lie: **la rappresentazione aggiunta**.

$$C_{kl}^j = (T^j)_{kl}$$

La dimensionalità della rappresentazione aggiunta è uguale al numero dei generatori. Per $\mathbf{SU}(2)$ è 3, e per $\mathbf{SU}(3)$ è 8.

- Una rappresentazione si chiama **unitaria** se le matrici della rappresentazione sono unitarie ($UU^\dagger = I$). Le rappresentazioni unitarie di un gruppo, se esistono, sono particolarmente importanti poichè conservano il prodotto scalare tra i vettori di uno spazio vettoriale complesso (p.e. lo spazio di Hilbert).
- Ogni rappresentazione di un **gruppo compatto di Lie** (o di un gruppo finito) è equivalente ad una **rappresentazione unitaria** (esiste una trasformazione che rende unitaria la rappresentazione).
- Se $D(g)$ è una rappresentazione dell'elemento $g \in \mathcal{G}$, allora $D^*(g)$ è la **rappresentazione complessa coniugata del gruppo**. P.e. se abbiamo una certa rappresentazione di g corrispondente ad una rappresentazione dei generatori \mathbf{T}_i

$$D(g) = \exp \left[i \sum_i \alpha_i \mathbf{T}_i \right]$$

la rappresentazione complessa coniugata sarà

$$D^*(g) = \exp \left[-i \sum_i \alpha_i \mathbf{T}_i^* \right]$$

Quindi i generatori ($-\mathbf{T}_i^*$) sono i generatori della **rappresentazione complessa coniugata**. Ultima osservazione, **importante per SU(3)**: se le due rappresentazione dei generatori \mathbf{T}_i e $-\mathbf{T}_i^*$ non sono equivalenti, (cioè $S\mathbf{T}_i S^{-1} \neq -\mathbf{T}_i^*$) allora abbiamo vettori di base (autovalori) diversi per la rappresentazione e la sua coniugata. Per SU(2) coincidono!

- Date due rappresentazioni $D(g)$ e $D'(g)$ del gruppo \mathcal{G} , il **prodotto diretto delle due rappresentazioni** è la rappresentazione di g che agisce sullo spazio vettoriale ottenuto dal **prodotto tensoriale tra i vettori base** delle rappresentazioni $D(g)$ e $D'(g)$, rispettivamente.

$$[D(g)v_i] \otimes [D'(g)v'_k] = [D(g) \otimes D'(g)] (v_i \otimes v'_k).$$

Rappresentazioni Riducibili ed Irriducibili

Una rappresentazione matriciale si chiama **rappresentazione riducibile**, se si può trasformare la matrice (attraverso trasformazioni di similitudine) in una **matrice a blocchi**. P.e., se

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

dove A, B, C sono rappresentazioni di dimensionalità in generale diversa ($a \times a, b \times b, c \times c$) e con 0 si intende matrici con tutti zero. Allora D è **riducibile**, poichè è costruita a partire da ben individuate rappresentazioni più piccole. Più esplicitamente, se A è una matrice 2×2 , B è una matrice 3×3 e C è una matrice 2×2 si ha

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

La matrice A opera su vettori bidimensionali, B opera su vettori tridimensionali e C opera su vettori bidimensionali. Quindi lo spazio vettoriale su cui opera D si decompone in sottospazi invarianti, grazie alla forma a blocchi. Potrà esistere una trasformazione S_A che diagonalizza A , ma ovviamente non diagonalizza B e C , lo stesso se esiste S_B o S_C .

Un generico vettore dello spazio su cui opera D si potrà scrivere nel modo seguente: $\vec{d} \equiv \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, dove $\vec{a} \in$ al sottospazio su cui opera A , $\vec{b} \in$ al sottospazio su cui opera B e $\vec{c} \in$ al sottospazio su cui opera C .

Sotto l'azione di D , grazie alla forma a blocchi, i tre sottospazi (quello relativo ad A , a B e a C) non si mischiano tra di loro, e $\vec{d}' = D\vec{d}$ sarà dato da $\vec{d}' \equiv \{\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'\}$, dove $\vec{a}' \in$ al sottospazio su cui opera A , ecc.

Le rappresentazioni che non possono essere scritte in una forma a blocchi (cioè che non hanno matrici di dimensionalità ≥ 2 lungo la diagonale), si chiamano irriducibili.

Se l'operatore Hamiltoniano di un sistema gode di una certa simmetria, i suoi autostati si potranno raggruppare per formare multipletti (degeneri). Il multipletto corrisponde a una ben precisa rappresentazione irr. del gruppo che descrive la simmetria dell'operatore Hamiltoniano. Esempio: i multipletti di un Hamiltoniano che gode della simmetria per rotazioni nello spazio euclideo. Gli autostati di H , che saranno anche autostati di \mathbf{T}^2 , \mathbf{T}_3 si raggrupperanno in multipletti, basi delle rapp. irr. del momento angolare.

La rappresentazione riducibile si può quindi descrivere completamente attraverso le rappresentazioni irriducibili che ne formano i blocchi. In particolare si dice che è la somma diretta di tali rappresentazioni irriducibili:

$$D = A \oplus B \oplus C$$

★ Per i gruppi di Lie semi-semplici, gli operatori di Casimir permettono di catalogare le rappresentazioni irriducibili del gruppo stesso (Vedi il Teorema di Racah).

★ ★ *Per i gruppi di Lie compatti ogni rappresentazione unitaria è (completamente) riducibile, e ogni rappresentazione irriducibile è finito dimensionale.*

Commenti:

Se un certo sistema gode di una certa proprietà di simmetria (segnalata sperimentalmente dall'esistenza di multipletti), vedremo che i seguenti passaggi logici ci permetteranno una analisi astratta di enorme potenza predittiva.

- Trovare il gruppo di trasformazioni associato alla simmetria in esame
- Trovare tutte le rappresentazioni irriducibili (o meglio darne la catalogazione)
- Le autofunzioni corrispondenti alle varie rappresentazione irriducibili sono le uniche autofunzioni permesse per il sistema che gode della simmetria in esame.

Questa catena logica, a volte seguita anche per simmetrie che si manifestano solo in modo approssimato, permette eventualmente di predire l'esistenza di multipletti ancora non osservati, e/o membri di un certo multipletto non ancora visti, individuando i numeri quantici che li identificano.

Da ricordare: per un gruppo di Lie potremmo indifferentemente discutere delle rappresentazioni degli elementi del gruppo o delle rappresentazioni dei generatori, grazie all'esponenziazione che lega i due insiemi

Esempio: SU(2)

Il generico elemento di $\mathbf{SU}(2)$ è unitario con $\det = +1$, quindi *i tre generatori sono hermitiani e a traccia nulla*, e si indicano, come è ben noto, con $\{S_x, S_y, S_z\}$. L'algebra ha dimensione 3 ($\equiv n^2 - 1$), e rango 1 ($\equiv n - 1$), cioè i generatori commutano solo con se stessi, poichè verificano le seguenti regole di commutazione (si somma sugli indici ripetuti)

$$[S_i, S_j] = i \epsilon_{ijk} S_k \quad (\epsilon_{ijk} \equiv \text{tensore di Levi - Civita})$$

e l'**identità di Jacobi**

$$\underbrace{[[S_1, S_2], S_3] + [[S_2, S_3], S_1] + [[S_3, S_1], S_2]} = 0$$

Al massimo avremo un solo generatore che ha una rappresentazione matriciale diagonale.

★ La rappresentazione fondamentale, che si indica con $D^{1/2}$ o con $\mathbf{2}$ (mettendo in evidenza la sua dimensionalità) è **la 2×2** . Per questa dimensionalità è nota la relazione tra i generatori e le matrici di Pauli: $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$. Lo spazio vettoriale su cui si agisce è dato dai due vettori base: $|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle$.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da notare la seguente relazione di **anticommutazione** ($\sigma_i^2 = 1$)

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{i,j}$$

Infine, combinando le regole di commutazione ed anticommutazione si può scrivere l'utile relazione valida per $i \neq j$: $\sigma_i \sigma_j = i \sigma_k$

★★★ Un solo operatore di Casimir (rango = 1, v. Teorema di Racah), dato da

$$\mathbf{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2, \quad \text{con autovalori } S(S+1).$$

Il valore di S **permette di catalogare le rappresentazioni irriducibili.**

La forma generica di un elemento del gruppo di $\mathbf{SU}(2)$ è

$$\mathcal{U}(\vec{\theta}) = \exp [i\vec{\theta} \cdot \vec{S}]$$

★★★ Partendo dalla rappresentazione dei **generatori** si ottiene la rappresentazione irr. degli **elementi del gruppo**. Esempio: la rapp. 2×2 per la rotazione, \mathcal{R}_z , di uno stato attorno all'asse z

$$\begin{aligned} \mathcal{U}[\mathcal{R}_z(2\beta)] &= \exp [i\beta\sigma_z] = \sum_n \frac{(i\beta\sigma_z)^n}{n!} = \\ &= \sum_n \frac{(i\beta)^{2n}}{(2n)!} \sigma_z^{2n} + \sigma_z \sum_n \frac{(i\beta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sigma_z^{2n} = \\ &= \mathbf{I} \sum_n (-1)^n \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} + i \sigma_z \sum_n (-1)^n \frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \mathbf{I} \cos\beta + i \sigma_z \sin\beta \end{aligned}$$

con \mathbf{I} la matrice identità 2×2 .

Per ottenere la **rappresentazione coniugata** $\left[D^{\frac{1}{2}}\right]^*$ si devono costruire i generatori $-\sigma_i^*$. Ma questi generatori **sono equivalenti** ai generatori iniziali, poichè esiste una trasformazione di similitudine che li mette in relazione. Infatti

$$\sigma_y \sigma_x \sigma_y = -(\sigma_x)^* \quad \sigma_y \sigma_y \sigma_y = -(\sigma_y)^* \quad \sigma_y \sigma_z \sigma_y = -(\sigma_z)^*$$

Quindi non si hanno rappresentazioni differenti. Per $\mathbf{SU}(3)$ la situazione cambia (!) e $D(g) \neq D^*(g)$.

La **rappresentazione aggiunta** (D^1 indicata anche con **3**) dei generatori è data dalle matrici 3×3

$$(T_j)_{kl} = -i\epsilon_{jkl} \quad \leftarrow \text{costanti di struttura dell'algebra}$$

(confrontare con la rappresentazione dei generatori di $\mathbf{SO}(3)$).

Per costruire rappresentazione irr. di più alta dimensionalità, analizziamo il prodotto diretto

2 \otimes 2

Si genera uno **spazio vettoriale su cui agiranno matrici 4×4** . Lo spazio si ottiene dal prodotto diretto dei vettori base, cioè

$|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle_2$. Avremo le seguenti 4 combinazioni:

$$\left(\begin{array}{l} \psi^{11} = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ \psi^{12} = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ \psi^{21} = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ \psi^{22} = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{array} \right)$$

ovvero un tensore a due indici, $\psi^{ij} = \chi^i \chi^j$ ($i, j = 1, 2$)

Su questo spazio operano gli elementi del gruppo prodotto diretto

$$\exp \left[-i\hat{\beta} \cdot \vec{S}_1 \right] \otimes \exp \left[-i\hat{\beta} \cdot \vec{S}_2 \right] = \exp \left[-i\hat{\beta} \cdot \vec{S} \right]$$

con \vec{S} dato da (grazie alla forma esponenziale e a $[\vec{S}_1, \vec{S}_2] = 0$),

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

I vettori base si catalogano utilizzando i) **gli autovalori della terza componente** di \vec{S} (dati dalla somma degli autovalori della terza componente di \vec{S}_1 e \vec{S}_2) e ii) **l'autovalore dell'operatore di Casimir (S^2)**.
Le componenti del tensore: ψ^{11} e ψ^{22} , corrispondono direttamente a $S_Z = \pm 1$ e $S = 1$ rispettivamente, e sono simmetriche rispetto allo scambio degli indici.

Le componenti del tensore: ψ^{12} e ψ^{21} hanno entrambe $S_Z = 0$ mentre non hanno S definito! Allora, possiamo costruire due opportune combinazioni lineari, che corrispondono rispettivamente alla i) combinazione **simmetrica**, $S = 1$ e $(m_1 + m_2) = 0$, cioè $|1, 0\rangle$ e ii) a quella **antisimmetrica**, $S = 0$ e $m_1 + m_2 = 0$, cioè $|0, 0\rangle$.

$$\begin{cases} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} [|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle] \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle] \end{cases}$$

Dal prodotto diretto dei vettori base delle rappresentazioni 2×2 , si ha

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$$

Quindi la rappresentazione riducibile 4×4 si decompone in due rapp. irr. di dimensione 1×1 e 3×3 , con i ben noti vettori base (singoletto e tripletto). **È fondamentale notare che per ottenere questa decomposizione abbiamo sfruttato le proprietà di permutazione degli indici del tensore ψ^{ij}** .
Il metodo generale da utilizzare per ottenere i vettori base esplicitamente, si basa sul gruppo delle permutazioni S_n (proprietà della statistica!).

Metodo grafico per ottenere gli autovalori che individuano le rappresentazioni irriducibili del prodotto tensoriale $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$: il baricentro del secondo segmento (che rappresenta la seconda rapp. $\mathbf{2}$), va sovrapposto sugli estremi del primo segmento (cioè la prima rapp. $\mathbf{2}$). L'autovalore 0 è due volte degenere.

Metodo grafico per ottenere gli autovalori che individuano le rappresentazioni irriducibili del prodotto tensoriale $\mathbf{2} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{2} \oplus \mathbf{4}$. Notare che gli autovalori $\pm 1/2$ sono due volte degeneri.

★ Quindi, se siamo interessati soltanto agli autovalori che individuano i vettori base (\rightarrow i multipletti) delle rappresentazioni irriducibili di un sottospazio di una data rappresentazione riducibile, si può generalizzare il Metodo grafico precedente, che risulta essere nient'altro che la traduzione grafica dell'azione degli operatori di innalzamento e di abbassamento :

$$S_{\pm} = S_x \pm iS_y,$$

Questi operatori fanno passare da un vettore, p.e. $|S, S_3\rangle$, ad un altro, $|S, S_3 \pm 1\rangle$, che appartiene allo stesso multipletto, identificato dall'autovalore dell'operatore di Casimir S^2 .

★★ Se invece siamo interessati alla forma esplicita degli stati delle rappresentazioni irriducibili di dimensionalità $n > 2$, dobbiamo **estendere l'analisi** fatta per il caso del prodotto $2 \otimes 2$, dove abbiamo utilizzato le 2 rapp. irr. del gruppo S_2 , simmetrica e antisimmetrica, cioè gli autostati dell'operatore permutazione. Dobbiamo considerare gli indici del tensore base della rappresentazione riducibile $\psi^{i_1 i_2 \dots i_n}$ (con $i_\ell = 1, 2$) e le rapp. irr. del gruppo delle permutazioni di n oggetti, S_n . Questo si può fare in modo sistematico utilizzando un ulteriore Metodo grafico detto Metodo dei Tableaux di Young.

Aggiungendo le proprietà di ortonormalizzazione degli stati di un dato multipletto possiamo arrivare alla costruzione delle famigliari tavole dei coefficienti di **Clebsch-Gordan** che permettono di costruire gli stati di ogni multipletto presente nella decomposizione del prodotto tensoriale in esame

$$D^{S_1} \otimes D^{S_2} = \bigoplus_{S=|S_1-S_2|}^{S_1+S_2} D^S$$

P.e., gli stati $|S, M_S\rangle$, del multipletto individuato dall'autovalore S dell'operatore di Casimir, sono dati da

$$D^S \rightarrow |S, M_S\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle S_1 m_1 S_2 m_2 | S M_S \rangle |S_1, m_1\rangle |S_2, m_2\rangle$$

dove il simbolo $\langle S_1 m_1 S_2 m_2 | S M_S \rangle$ indica i coefficienti di **Clebsch-Gordan**.

Questa scrittura ci suggerisce l'immediata generalizzazione al caso di più particelle con spin. Le rappresentazioni che appaiono in un prodotto tensoriale possono considerarsi come appartenenti ciascuna allo spazio invariante (con vettori base i vettori del corrispondente multipletto) di una singola particella.

Sistema di due fermioni

Lo spin totale si otterrà dal **prodotto diretto di due rappresentazioni irr. 2**, esattamente come prima. Ma se analizziamo come si trasforma il vettore base della rappresentazione irr. **1** sotto l'azione dello scambio di posto dei due fermioni, si trova che lo stato base è **antisimmetrico**, mentre i tre vettori base della rappresentazione irr. **3** sono **simmetrici**. Quindi possiamo riscrivere la decomposizione del prodotto diretto $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ mettendo in evidenza le proprietà di permutazione dei vettori base.

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1}_A \oplus \mathbf{3}_S$$

Sistema di tre fermioni

Per ricavare le rappresentazione irr. di più bassa dimensionalità, si dovrà decomporre il prodotto diretto $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ ricorrendo alle rapp. irr. di \mathbf{S}_3 con in più il vincolo $i, j, k = 1, 2$ (caveat). Grazie alla proprietà associativa possiamo sfruttare la decomposizione del caso di due fermioni. Quindi si avranno due casi

$$\mathbf{2} \otimes [\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}] = \begin{cases} \mathbf{2} \otimes \mathbf{1}_A \\ \mathbf{2} \otimes \mathbf{3}_S \end{cases}$$

Il primo caso produce una rappresentazione $\mathbf{2}$, ma con proprietà di scambio di tre particelle diverso dal caso *simmetrico* o *antisimmetrico*: gli stati base sono **misti-antisimmetrici**. Sono antisimmetrici nello scambio di due sole particelle (p.e. $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 3, 2\}$), mentre se scambio tutte e tre le particelle (p.e. $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\}$) non si ha una simmetria definita. Simbolicamente

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{1}_A = \mathbf{2}_{MA}$$

Per il secondo caso si hanno due rappresentazioni irr. di dimensione $\mathbf{2}$ e $\mathbf{4}$. La prima ha vettori base **misti-simmetrici** mentre la seconda ha vettori base completamente *simmetrici* nello scambio di tutte e tre le particelle. Simbolicamente

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{3}_S = \mathbf{2}_{MS} \oplus \mathbf{4}_S$$

È importante notare che nell'ambito di $\mathbf{SU}(2)$ non è possibile costruire **stati di tre particelle completamente antisimmetrici** (poichè in ψ^{ijk} si ha $i, j, k = 1, 2$, e il principio di Pauli), mentre nell'ambito di $\mathbf{SU}(3)$ questo è possibile poichè gli indici $\in [1, 3]$.

Esempio: SU(3)

Lo studio di $SU(3)$ è una generalizzazione di quanto abbiamo visto per $SU(2)$. Si passa da un'algebra di rango 1 ad un'algebra di rango 2, e quindi avremo due generatori diagonalizzabili simultaneamente e due operatori di Casimir. Inoltre avremo maggiore libertà nel costruire i multipletti, poichè la rappresentazione coniugata non coincide con quella fondamentale. Questa proprietà gioca un ruolo essenziale nell'applicazione alla fisica adronica di $SU(3)$ (particelle/antiparticelle).

Per poter avere delle rappresentazione unitarie con $\det = +1$, come al solito i generatori devono essere **Hermitiani e a traccia nulla**. L'algebra ha **dimensione** $8 = 3^2 - 1$ e **rango** $2 = 3 - 1$. Nella letteratura, gli **8** generatori di $SU(3)$ sono indicati con F_i con $i = 1, 8$ (F-spin). Le regole di commutazione sono date da (si somma sugli indici ripetuti)

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k$$

Le costanti di struttura f_{ijk} , come nel caso del tensore di Levi-Civita per $SU(2)$ sono totalmente **antisimmetriche**, cioè $f_{ijk} = -f_{jik} = -f_{ikj}$. I valori espliciti per le componenti **indipendenti e non nulle**, sono 9

i j k	f_{ijk}
123	1
147	1/2
156	-1/2
246	1/2
257	1/2
345	1/2
367	-1/2
458	$\sqrt{3}/2$
678	$\sqrt{3}/2$

Per $\mathbf{SU}(3)$ abbiamo 56 ($=8!/3! 5!$) **identità di Jacobi**, poichè abbiamo 8 generatori e ne dobbiamo scegliere 3 diversi alla volta (per $\mathbf{SU}(2)$, abbiamo 3 generatori ed una sola identità di Jacobi). In generale si ha

$$[[F_i, F_j], F_k] + [[F_j, F_k], F_i] + [[F_k, F_i], F_j] = 0$$

La rappresentazione fondamentale è la 3×3 e si indica con $\mathbf{3}$. In questa rapp. i generatori F_i sono dati in termini delle matrici di Gell-Mann, λ_i : $F_i = \lambda_i/2$.

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Tr \lambda_i = 0$$

$$\text{Normalizzazione : } Tr \lambda_i \lambda_k = 2\delta_{i,k}$$

Le regole di anticommutazione sono date da

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3}\delta_{i,j}I + 2 d_{ijk} \lambda_k$$

Il tensore d_{ijk} è totalmente **simmetrico** con 16 componenti indipendenti

i j k	d_{ijk}
118	$1/\sqrt{3}$
146	1/2
157	1/2
228	$1/\sqrt{3}$
247	-1/2
256	1/2
338	$1/\sqrt{3}$
344	1/2

i j k	d_{ijk}
355	1/2
366	-1/2
377	-1/2
448	$-1/2\sqrt{3}$
558	$-1/2\sqrt{3}$
668	$-1/2\sqrt{3}$
778	$-1/2\sqrt{3}$
888	$-1/\sqrt{3}$

- Da un rapido controllo della tabellina delle costanti di struttura, f_{ijk} , si ottiene che

$$[F_3, F_8] = 0$$

Quindi F_3 e F_8 sono due candidati per la diagonalizzazione, come verificato direttamente nella forma esplicita 3×3 .

- Per $i = 1, 2, 3$

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che formano un sottogruppo di **SU(3)** con l'algebra di **SU(2)**, (altri due sottogruppi con l'algebra di **SU(2)**: $\{\lambda_4, \lambda_5\}$ e $\{\lambda_6, \lambda_7\}$, con l'opportuno terzo elemento combinazione di $\{\lambda_3, \lambda_8\}$)

★ Il generico elemento del gruppo si scrive

$$\mathcal{U}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_8) = \exp \left[i \sum_i \phi_i F_i \right]$$

★★ Nelle applicazioni di fisica adronica, dove si utilizza $\mathbf{SU}(3)$ di **Sapore (Flavour)**, per catalogare le masse dei barioni e dei mesoni (raccogliendole in multipletti... approssimati...), i generatori diagonali sono interpretati come terza componente dell'isospin e come ipercarica

$$T_3 = F_3 \quad Y = S + B = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

(Nella $\mathbf{3}$, utilizzando le matrici di Gell-Mann, $T_3 = \lambda_3/2$ e $Y = \lambda_8/\sqrt{3}$)

★★★ Il rango di $\mathbf{SU}(3)$ è **due** e avremo due operatori di Casimir, p.e.

$$\begin{aligned} C_1 = \mathbf{F}^2 &= \sum_{i=1,8} F_i^2 = \\ &= T_3^2 + 2T_3 + \frac{3}{4}Y^2 + T_-T_+ + V_-V_+ + U_+U_- \end{aligned}$$

dove $T_{\pm} = F_1 \pm iF_2$ ($\Delta t_3 = \pm 1$ e $\Delta y = 0$), $V_{\pm} = F_4 \pm iF_5$ ($\Delta t_3 = \pm 1/2$ e $\Delta y = \pm 1$) e $U_{\pm} = F_6 \pm iF_7$ ($\Delta t_3 = \mp 1/2$ e $\Delta y = \pm 1$)

$$C_2 = \sum_{i,j,k} d_{ijk} F_i F_j F_k$$

O possiamo utilizzare combinazioni di C_1 e C_2 .

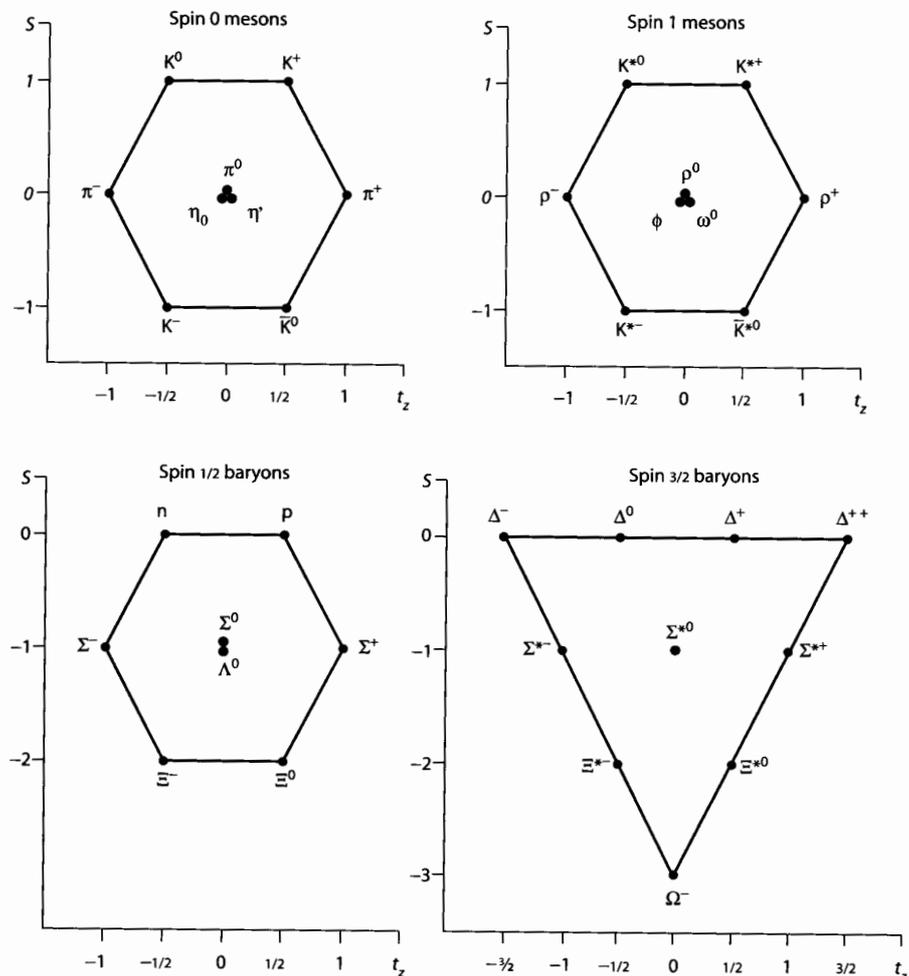
Esempio: il valore di aspettazione di C_1 per lo stato con più alti autovalori di T_3 e Y , $|\psi\rangle_{hi}$, in un multipletto (cioè quello che è annichilato dai tre operatori T_+ , V_+ e U_-) è dato in termini dei generatori diagonali

$$\langle F^2 \rangle_{hi} = \langle \psi | T_3^2 | \psi \rangle_{hi} + 2 \langle \psi | T_3 | \psi \rangle_{hi} + \frac{3}{4} \langle \psi | Y^2 | \psi \rangle_{hi}$$

★ Gli autovalori di C_1 e C_2 identificano una data Rapp. Irriducibile, cioè un dato multipletto

★ ★ Gli stati in un multipletto sono individuati dagli autovalori di T_3 e Y : $|C_1, C_2; T_3, Y\rangle$.

Nell'algebra di $SU(3)$ c'è una subalgebra di $SU(2)$ (v. le rappresentazioni esplicite della matrici di Gell-Mann), allora può essere utile aggiungere anche l'autovalore dell'isospin ($T(T+1)$), poichè $SU(3)$ di sapore è più approssimata di $SU(2)$ di isospin, a causa della massa del quark strano. Quindi, dal punto di vista pratico è bene sottolineare l'appartenenza di stati di multipletto di $SU(3)$ a multipletti anche di $SU(2)$. **Anticipando la struttura dei multipletti....**



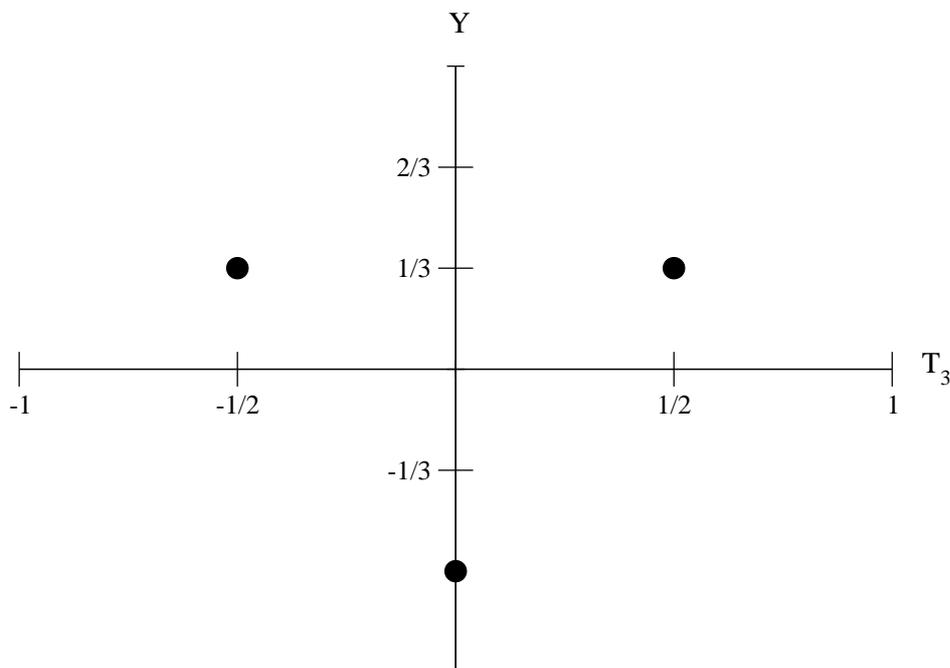
$Y = B + S$

La rapp. fondamentale, la **3**, ha tre vettori base, identificati da una coppia di autovalori $\{t_3, y\}$ degli operatori diagonali $\{T_3, Y\}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right); \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right); \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(0, -\frac{2}{3}\right)$$

. Lo stato che è annichilato da T_+ , V_+ e U_- è $(1/2, 1/3)$, con valor medio $\langle F^2 \rangle_{hi} = 4/3$. Anche per gli altri due stati del multipletto il valor medio di $\langle F^2 \rangle$ è $4/3$ (F^2 è un Casimir !!), ma se utilizziamo questi stati, allora nel calcolo si deve tener conto dell'azione di T_+ , V_+ e U_- . Gli operatori di abbassamento T_- , V_- e U_+ fanno passare dallo stato con autovalori $(1/2, 1/3)$ agli altri due stati.

Differentemente da **SU(2)** dove un solo autovalore distingue gli stati di un dato multipletto (basta una retta per ordinare gli autovalori del multipletto) per **SU(3)** abbiamo bisogno di un piano. In particolare se riportiamo sulle ascisse gli autovalori di T_3 e sulle ordinate quelli di Y , per la rappresentazione **3** si ottiene un triangolo isoscele.

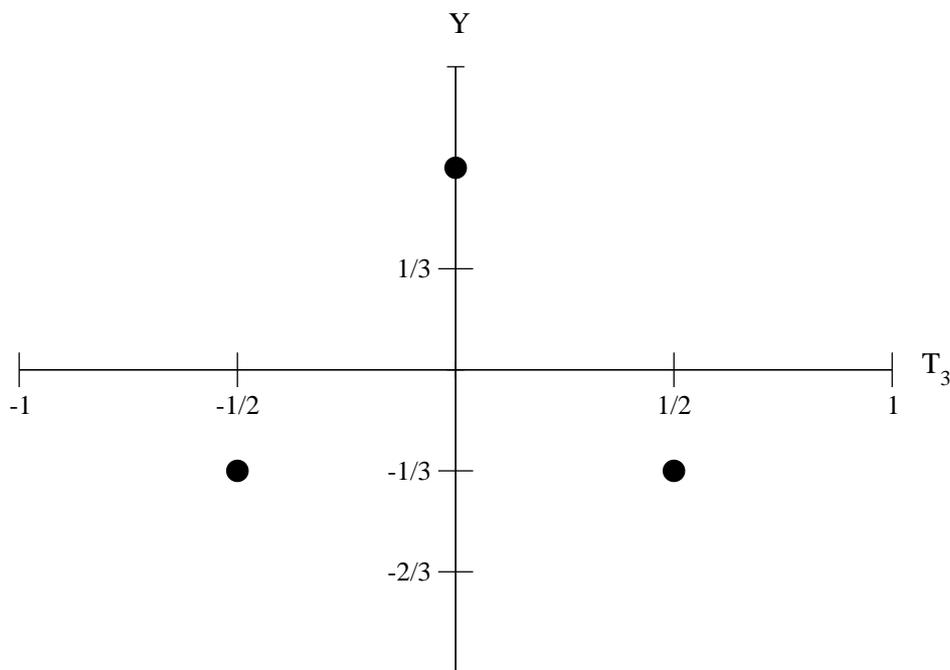


Rappresentazione grafica (bidimensionale) delle coppie di numeri quantici (ipercarica, terza componente dell'isospin) che individuano i vettori base della rapp. fondamentale di **SU(3)**, la **3**

Le rappresentazioni coniugate sono quelle dei generatori $(-F_i^*) = (-F_i^T)$ e i vettori base sono individuati dagli autovalori degli operatori $-T_3$ e $-Y$ (T_3 e Y sono hermitiani e diagonali, quindi reali). Il tripletto di vettori base della rappresentazione coniugata a quella fondamentale si indica con $\bar{\mathbf{3}}$, ed ha i seguenti autovalori (notare anche l'effetto della trasposizione dei generatori, che si manifesta nei vettori, ovvero non si cambia solo il segno degli autovalori).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (0, \frac{2}{3}); \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}); \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$$

Le coppie di autovalori di $\mathbf{3}$ individuano in un piano cartesiano i vertici di un triangolo isoscele con orientazione **opposta** a quella relativa al triangolo di $\mathbf{3}$. Quindi la $\bar{\mathbf{3}}$ è distinta dalla $\mathbf{3}$. Nel caso di $\mathbf{SU}(2)$, $\bar{\mathbf{2}}$ e $\mathbf{2}$ coincidono.



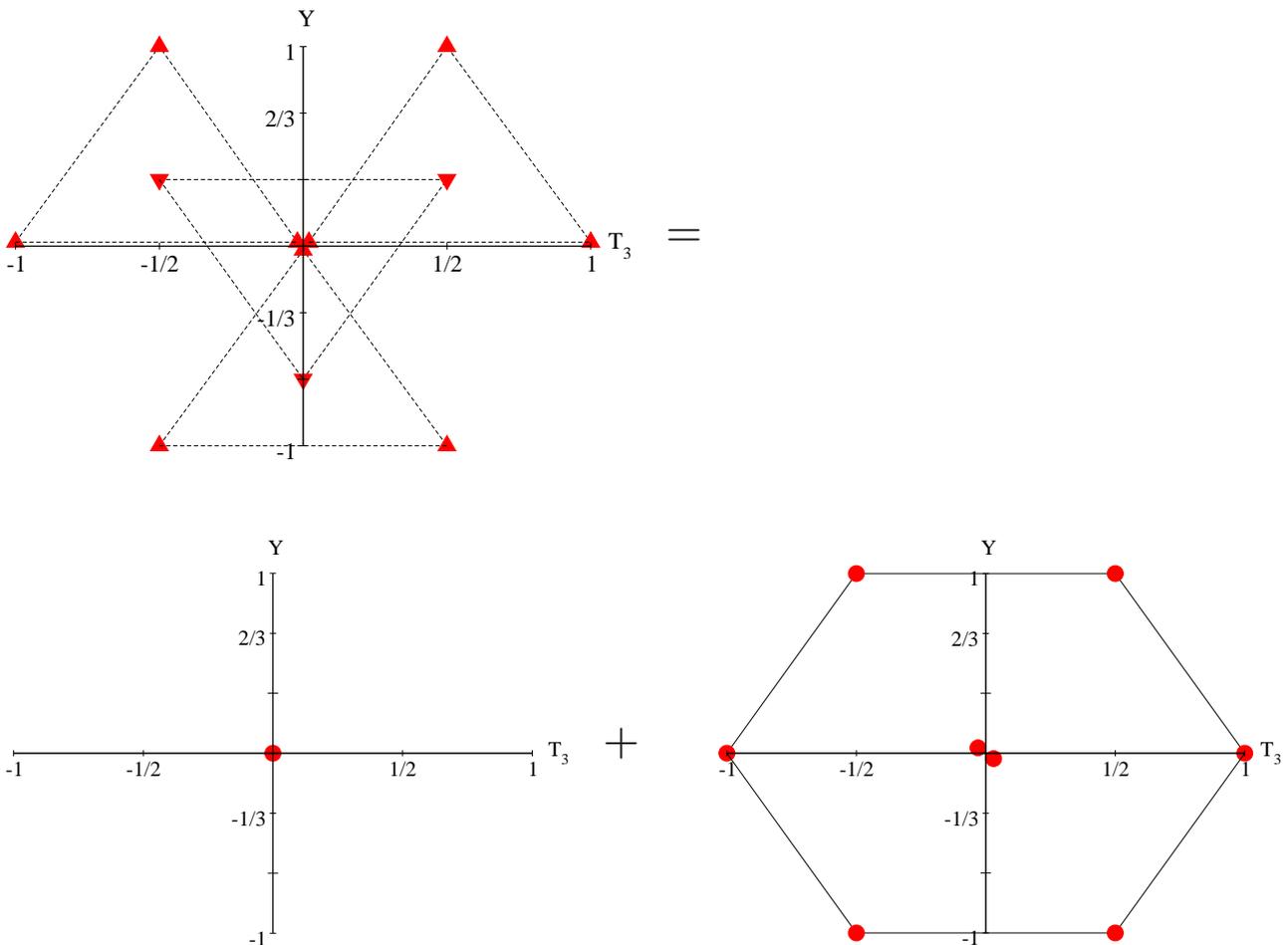
Rappresentazione grafica (bidimensionale) per il tripletto $\bar{\mathbf{3}}$ (antitripletto), coniugato al fondamentale $\mathbf{3}$.

★ La rappresentazione aggiunta è la rappresentazione $\mathbf{8}$, cioè quella data da $[F_i]_{jk} = f_{ijk}$

I multipletti di dimensionalità superiore si ottengono decomponendo il tensore base del prodotto diretto, che in generale sarà il prodotto diretto di "p" rapp. $\mathbf{3}$ e "q" rapp. $\bar{\mathbf{3}}$. (v. anche il caso esplicito $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ di $\mathbf{SU}(2)$)

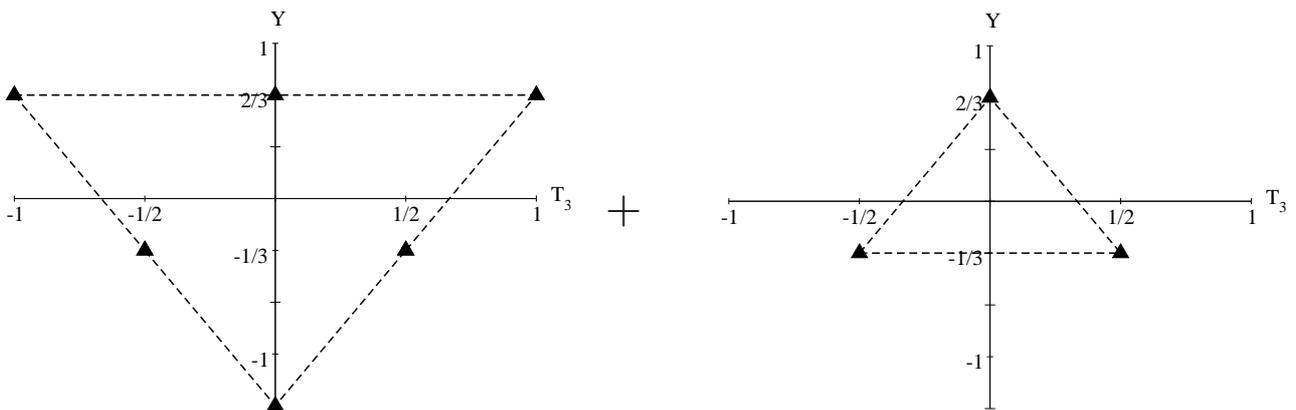
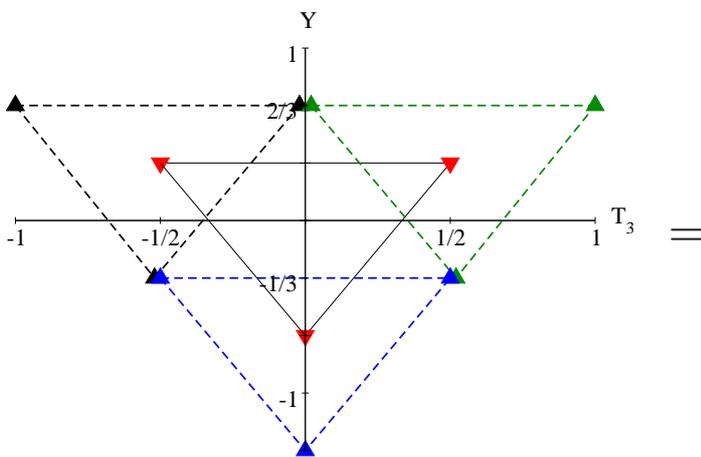
★ Per ottenere gli autovalori $\{t_3, y\}$ che individuano i vettori base di un dato multipletto si ricorre alla generalizzazione al piano del metodo grafico introdotto per $\mathbf{SU}(2)$. Il metodo era basato sull'azione della coppia di operatori di innalzamento ed abbassamento S_{\pm} . Per $\mathbf{SU}(3)$, abbiamo 3 insiemi di operatori, T_{\pm} , V_{\pm} e U_{\pm} .

★ ★ Metodo grafico per ottenere gli autovalori che individuano le rappresentazioni irriducibili del prodotto tensoriale $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} + \mathbf{8}$: il baricentro del triangolo che rappresenta la rapp. $\bar{\mathbf{3}}$, va sovrapposto sui 3 vertici del triangolo, che rappresenta la rapp. $\mathbf{3}$.



N.B. $T_3 = 0$ e $Y = 0$ è degenera 2 volte in $\mathbf{8}$; uno $(0, 0)$ completa il tripletto di isospin, l'altro valore individua uno stato di singoletto di isospin ($\mathbf{SU}(3) \supset \mathbf{SU}(2)$, quindi $\Rightarrow |F^2, C_2; T, T_3, Y\rangle$).

★ ★ Metodo grafico per ottenere gli autovalori che individuano le rappresentazioni irriducibili del prodotto tensoriale $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} + \bar{\mathbf{3}}$: il baricentro del triangolo che rappresenta la rapp. $\mathbf{3}$, va sovrapposto sui 3 vertici del triangolo, che rappresenta la rapp. $\mathbf{3}$.



N.B. $T_3 = 0$ e $Y = 2/3$ e $T_3 = \pm 1/2$ e $Y = -1/3$ sono degeneri 2 volte.

★★ Per l'espressione esplicita dei vettori base delle rapp. irr. di dimensionalità $n > 3$ si ricorrerà anche questa volta alle proprietà di permutazione degli indici del tensore base della rappresentazione riducibile: $\psi_{j_1 j_2 j_3 \dots j_q}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_p}$, composto da \mathbf{p} autostati di $\mathbf{3}$ (indici in alto) e \mathbf{q} autostati di $\bar{\mathbf{3}}$ (indici in basso). Utilizzeremo sempre il metodo grafico dei Tableaux di Young, basato sulle proprietà di \mathbf{S}_n . Infine, considerando le proprietà di ortonormalità si ottengono i Clebsch-Gordan per $\mathbf{SU}(3)$.

Alcuni esempi. Se ho il prodotto di due rappresentazioni dovrò ricorrere alle rapp. irr. del gruppo \mathbf{S}_2

$$\star \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6}_S + \bar{\mathbf{3}}_A \quad \bar{\mathbf{3}}_A \otimes \bar{\mathbf{3}}_A = \mathbf{3} + \bar{\mathbf{6}}_A$$

La dimensionalità delle rapp. è legata al fatto che questa volta $i_1 i_2 i_3 \dots i_n = 1, 2, 3$. Da notare che $\bar{\mathbf{3}}$ è antisimmetrica, cioè $\bar{\mathbf{3}}_A$, poiché le proprietà di trasformazioni degli stati dell'antitripletto, sotto l'azione dei generatori del gruppo, sono le stesse di uno stato antisimmetrico per lo scambio di **due** indici ($\psi_i(\bar{\mathbf{3}}) = \epsilon_{ijk} \psi^j \psi^k$)

Per i mesoni

$$\star \quad \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}_A = \mathbf{1}_A + \mathbf{8}_{MA}$$

avendo usato le rapp. irr. di \mathbf{S}_3 , come indica la presenza dello stato a simmetria mista. Notare che lo stato base del singoletto, $\mathbf{1}_A$, è antisimmetrico rispetto ai **tre** indici degli stati che provengono uno dal tripletto e due dall'antitripletto ($\psi(\mathbf{1}) = \epsilon_{ijk} \psi^i \psi^j \psi^k$), mentre per gli otto stati $\mathbf{8}_{MA}$ solo due indici hanno la proprietà di essere antisimmetrici.

Inoltre

$$\star \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{6}_S = \mathbf{8}_{MS} + \mathbf{10}_S$$

Per i barioni

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = [\bar{\mathbf{3}}_A + \mathbf{6}_S] \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1}_A + \mathbf{8}_{MA} + \mathbf{8}_{MS} + \mathbf{10}_S$$

Il problema matematico è stato schematizzato, ora inizia il problema fisico: nell'insieme degli adroni osservati, possiamo individuare una struttura di multipletti come quella data da $SU(3)$ di sapore, che ci segnalerebbe una simmetria dell'Hamiltoniana forte?

Se l'Hamiltoniana forte avesse la simmetria per $SU(3)$ di sapore, gli stati di un dato multipletto avrebbero la stessa massa e gli stessi autovalori dei due operatori di Casimir, ma sarebbero distinti da T_3 e di Y . Questo insieme di valori corrisponde a qualche adrone osservato sperimentalmente? Si ha una esatta degenerazione del multipletto o soltanto approssimata? Come ispirazione, ricordiamo l'analogia con il doppietto di isospin, suggerito dalle masse quasi uguali del protone e del neutrone. Ovviamente, per completare l'insieme dei numeri quantici, bisogna tener conto anche del momento angolare totale ($SU_F(3) \otimes SU(2) \rightarrow SU(6)$) e della parità.

L'analisi qui accennata, ha portato negli anni '60 a catalogare gli adroni per mezzo dei multipletti di $SU(3)$. Questa simmetria approssimata ($m_u \sim m_d \neq m_s$) degli adroni, che si manifesta in masse quasi uguali per gli adroni assegnati ad uno stesso multipletto, viene indicata come **$SU(3)$ di Sapore**. Dal punto di vista fenomenologico **$SU(3)$ di Sapore** ha avuto un notevole successo nella fisica adronica, con l'identificazione di multipletti di dimensionalità 8 e 10; inoltre la ricerca di stati mesonici e barionici appartenenti a ulteriori multipletti è molto attiva.

Ha pavimentato la strada per fare il passo successivo, che è stato la scoperta del gruppo di simmetria esatto ($m_r = m_b = m_g$ per ogni sapore) delle interazioni forti che si indica con **$SU(3)$ di Colore**.

Il Gruppo di Poincaré

Il gruppo di Poincaré riveste un ruolo fondamentale nella classificazione degli stati di singola particella (cioè senza considerare le possibili simmetrie interne a parte lo spin) in Meccanica Quantistica Relativistica.

Infatti, alcune delle rappresentazioni irriducibili unitarie (o trivialmente unidimensionali o necessariamente infinito dimensionali, poichè il gruppo è non compatto) sono utilizzate per rappresentare quello che si è osservato in natura, finora: i) particelle massive con spin intero o semintero (rapp. infinito dimensionali), ii) particelle con massa nulla ed elicità h (rapp. unidimensionali, ma con possibile estensione a $\pm h$ se la parità è conservata).

Per definire il gruppo di Poincaré, \mathcal{P} , o gruppo di Lorentz inhomogeneo, dobbiamo introdurre i) il gruppo delle **traslazioni nello spazio quadridimensionale di Minkowski** (gruppo non compatto), e ii) il **gruppo di Lorentz omogeneo**, $\mathbf{O}(\mathbf{3}, \mathbf{1})$ (gruppo non compatto). Questo gruppo è una generalizzazione del gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n)$ (compatto) che, ricordiamo, trasforma i vettori di uno spazio euclideo \mathbf{R}^n , lasciando **invariato il prodotto scalare**, cioè

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots x_n y_n = \vec{x}' \cdot \vec{y}'$$

con i) $y' = Ay$, $x' = Ax$ e ii) $A \in \mathbf{O}(n)$ una matrice $n \times n$. Ricordiamo che la matrice A può avere $\det = +1$, ed allora si parlerà di rotazioni proprie e si avrà il gruppo $\mathbf{SO}(n)$ (connesso alla identità), oppure avere $\det = -1$, e in questo caso si avrà il sottogruppo che contiene le inversioni.

La non compattezza di $\mathbf{O}(\mathbf{3}, \mathbf{1})$ è generata dal fatto che il tensore metrico contiene sia segni positivi che negativi (quindi $x_4 \rightarrow i x_4$, $\cos(\phi) \rightarrow \cosh(\omega)$ e $\sin(\phi) \rightarrow \sinh(\omega)$ con $\phi \in [0, 2\pi]$ e $-\infty < \omega < \infty$).

Il prodotto scalare tra due quadri-vettori dello spazio di Minkowski, x^μ e y^μ , è definito per mezzo del tensore metrico $g^{\mu\nu}$ ($g^{\mu\mu} \equiv \{1, -1, -1, -1\}$), come segue

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

L'insieme delle matrici Λ , di dimensioni 4×4 , che lasciano **invariato il precedente prodotto scalare**, cioè

$$x \cdot y = x' \cdot y'$$

con $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, $y'^\mu = \Lambda^\mu_\nu y^\nu$, è detto **gruppo di Lorentz omogeneo**.

Si indica con **$\mathbf{O}(\mathbf{3}, \mathbf{1})$** , dove i due indici ci ricordano il numero di segni di un tipo o dell'altro, presenti nel tensore metrico (le proprietà gruppali si dimostrano a partire dalla legge di composizione del gruppo: il prodotto matriciale righe \times colonne).

L'invarianza del prodotto scalare porta alla seguente proprietà delle matrici Λ , ovvia generalizzazione di quanto succede per **$\mathbf{O}(\mathbf{3})$** ($O^T O = I$),

$$\Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\lambda = g_{\rho\lambda}.$$

Simbolicamente $\Lambda^T g \Lambda = g$.

Anche per il gruppo di Lorentz possiamo distinguere due casi: i) il sottogruppo delle rotazioni proprie, con $\det = +1$ che si indica con **$\mathbf{SO}(\mathbf{3}, \mathbf{1})$** e ii) il sottogruppo delle inversioni spazio-temporali con $\det = -1$.

Una ulteriore decomposizione di ciascun sottogruppo è legata al valore di Λ^0_0 : i) $\Lambda^0_0 \geq 1$ oppure ii) $\Lambda^0_0 \leq -1$.

Combinando i due valori del $\det = \pm 1$ e i due intervalli per Λ^0_0 si ottengono **quattro sottogruppi**, che possono essere messi in collegamento per mezzo dell'inversione spaziale, l'**inversione temporale**, o dal prodotto delle due.

Soltanto il sottogruppo di $\mathbf{SO}(3, 1)$, con $\det = +1$ e $\Lambda^0_0 \geq 1$, è connesso con continuità alla identità. Sarà sufficiente studiare questo sottogruppo, che si indica come **gruppo delle trasformazioni proprie ortocrone di Lorentz**, o a volte, più brevemente gruppo di Lorentz proprio (gruppo di Lie non compatto). **La non compattezza del gruppo proprio di Lorentz, che ha 6 parametri, è dovuto al fatto che 3 parametri possono variare nell'intervallo $[-\infty, +\infty]$. In dettaglio**

nello spazio di Minkowski, posso

- trasformare soltanto le componenti spaziali di x^μ , lasciando invariata la componente temporale x^0 . Allora avremo **le familiari rotazioni proprie tridimensionali**, che formano un gruppo compatto a tre parametri, con i ben noti generatori, L^j , che verificano le regole di commutazione di $\mathbf{SU}(2)$ (se si usa la notazione controvariante $L^1 = L_x, L^2 = L_y$ e $L^3 = L_z$)
- coinvolgere nelle trasformazioni anche la componente x^0 , ed avere **trasformazioni di riferimento inerziale (boosts)**. Queste trasformazioni dipendono dalla velocità di un sistema di riferimento rispetto all'altro ($\vec{\beta} = \vec{v}/c$), e quindi dipendono da tre parametri. Quando scriviamo i boosts nella forma esponenziale, (cioè quella tipica dei gruppi di Lie), otteniamo una forma che ricorda quella delle rotazioni, ma con le funzioni iperboliche **$\cosh(\alpha_i)$ e $\sinh(\alpha_i)$** al posto di \cos e \sin (formalmente $t \rightarrow i t$). Questo permette di ottenere i tre parametri, α_i che intervengono nell'esponenziale in funzione delle componenti di $\vec{\beta}$. Si ha

$$\tanh \alpha_i = \beta_i.$$

Poichè $\beta_i \in [-1, +1]$, allora $\alpha_i \in [-\infty, +\infty]$. In letteratura i generatori dei boosts, si indicano con K^i .

Gli elementi del gruppo si possono scrivere nel modo seguente

$$\Lambda(\vec{\phi}, \vec{\alpha}) = \exp \left[-i\vec{\phi} \cdot \vec{L} - i\vec{\alpha} \cdot \vec{K} \right]$$

★ I sei generatori del gruppo proprio di Lorentz, ottenuti dallo sviluppo infinitesimale delle Λ , soddisfano le seguenti regole di commutazione (ottenute dalle proprietà di composizione delle Λ)

$$\begin{aligned} [K^i, K^j] &= -i\epsilon^{ijn} L^n & [L^i, K^j] &= i\epsilon^{ijn} K^n \\ [L^i, L^j] &= i\epsilon^{ijn} L^n \end{aligned}$$

Il segno negativo nel primo commutatore è legato alla metrica dello spazio di Minkowski. Opportune combinazioni lineari di boosts e rotazioni portano ad individuare due subalgebre di $\mathbf{SU}(2)$, e quindi l'algebra del gruppo di Lorentz proprio diventa l'algebra di $\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$.

Al posto di \vec{L} e \vec{K} si può introdurre un generatore tensoriale antisimmetrico $M^{\mu\nu}$ (6 componenti indipendenti), dato da

$$M^{0i} = K^i = -M^{i0} \qquad M^{ij} = \epsilon^{ijk} L^k$$

Anche per i parametri si potrà introdurre un tensore antisimmetrico, $\omega^{\mu\nu}$ (se simmetrico $M_{asym} \cdot \omega_{sym} = 0$). Quindi

$$\vec{\phi} \cdot \vec{L} + \vec{\alpha} \cdot \vec{K} = \omega \cdot M/2 = \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}/2 \text{ (forma covariante !)}$$

Il gruppo di Poincaré, \mathcal{P} , o gruppo inomogeneo di Lorentz, è il prodotto semi-diretto del gruppo di Lorentz omogeneo $\mathbf{O}(3, 1)$ e il gruppo abeliano delle traslazioni $\mathbf{T}(a)$ (a^μ è il valore della traslazione spazio-temporale: $x'^\mu = \mathbf{T}(a)x^\mu = x^\mu + a^\mu$), cioè

$$\mathcal{P} \equiv \mathbf{O}(3, 1) \otimes \mathbf{T}(a).$$

Il gruppo è non compatto !! Inoltre contiene un sottogruppo abeliano ($\mathbf{T}(a)$), quindi non è semi-semplice.

★ Il gruppo proprio di Poincaré è costituito da infiniti elementi dati dal prodotto $t(a) \Lambda(\vec{\phi}, \vec{\alpha})$, con $t(a) \in \mathbf{T}(a)$ e $\Lambda(\vec{\phi}, \vec{\alpha}) \in$ gruppo proprio di Lorentz. Gli elementi di $\mathbf{T}(a)$ sono $t(a) = \exp[-ia \cdot P]$ con P^μ i generatori delle traslazioni.

Un elemento del gruppo proprio di Poincarè trasforma il vettore x^μ in

$$x'^\mu = a^\mu + \Lambda^\mu_\nu(\vec{\phi}, \vec{\alpha})x^\nu$$

Se consideriamo variazioni infinitesime, possiamo ottenere la rappresentazione di P^μ e di $M^{\mu\nu}$ che agiscono su vettori dello spazio di Minkowski (dati μ e ν , $M^{\mu\nu}$ è una matrice 4×4 , e in totale avrò 6 matrici 4×4 indipendenti, cfr. con la discussione dei 3 generatori di $\mathbf{SO}(3)$).

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \left[\mathbb{I} - ia \cdot P + i\frac{1}{2}\omega \cdot M \right]^\mu_\nu x^\nu = \\ &\sim [\mathbb{I} - ia \cdot P]^\mu_\rho [\mathbb{I} + i\omega \cdot M]^\rho_\nu x^\nu \end{aligned}$$

Ricapitolando, i generatori del gruppo proprio di Poincarè sono 10: $M^{\mu\nu}$ e P^μ , e verificano la seguente algebra

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [M^{\mu\nu}, P^\lambda] &= i (g^{\nu\lambda} P^\mu - g^{\mu\lambda} P^\nu) \\ [M^{\mu\nu}, M^{\lambda\sigma}] &= i (g^{\mu\sigma} M^{\nu\lambda} + g^{\nu\lambda} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\lambda} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\lambda}) \end{aligned}$$

I due operatori di Casimir, che permettono di identificare le rappresentazioni irriducibili del gruppo proprio di Poincarè sono

$$C_1 = P \cdot P = [P^0]^2 - \vec{P} \cdot \vec{P} \quad C_2 = W \cdot W = [W^0]^2 - \vec{W} \cdot \vec{W}$$

dove W^μ è il quadri-vettore di Pauli-Lubanski definito da

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} P_\nu M_{\sigma\rho}.$$

Da notare che $P \cdot W = 0$ data l'antisimmetria del tensore $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ ($\epsilon^{0123} = +1$). Questo vincolo comporta che solo tre componenti di W^μ sono indipendenti. In particolare si ottiene $W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J}$ e $\vec{W} = P^0 \vec{J} - \vec{P} \times \vec{K}$ con $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ (se consideriamo anche rotazioni intrinseche, $M^{\nu\sigma} \rightarrow M^{\nu\sigma} + S^{\nu\sigma}$).

Rappresentazioni irriducibili del gruppo proprio di Poincaré

La non compattezza del gruppo proprio di Poincaré (conseguenza della non compattezza sia del gruppo proprio di Lorentz sia del gruppo delle traslazioni) conduce al relevantissimo fatto che **le rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali non sono unitarie** (a parte il caso triviale di dimensione **1**).

Per le applicazioni fisiche, ci interessano le rappresentazioni irriducibili unitarie (se $x^\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} x'^\mu$ cosa succede a $\psi(x) \xrightarrow{?} \psi'(x')$, v. **SO(3)**). Infatti, se ci chiediamo cosa succede alla funzione d'onda del sistema, quando le coordinate del sistema cambiano sotto l'azione di un elemento del gruppo proprio di Poincaré, possiamo trovare una risposta seguendo il famoso teorema di Wigner che permette di immergere la Meccanica Quantistica in un ambito relativistico. Wigner dimostrò che

Un teoria quantistica formulata su uno spazio di Hilbert mantiene invariate le probabilità in ogni sistema di riferimento inerziale, se e solo se la corrispondenza tra stati in differenti sistemi inerziali si realizza attraverso trasformazioni unitarie del gruppo di Poincaré.

In particolare la rappresentazione infinito dimensionale di P^μ e $M^{\mu\nu}$, a cui abbiamo aggiunto un possibile termine che si applica a variabili non spazio-temporali (p.e. lo spin per particelle massive o il vettore di polarizzazione nel caso del fotone) è

$$P^\mu = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad M^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu + S^{\mu\nu} \quad (1)$$

con $[P^\mu, x^\nu] = i g^{\mu\nu}$. La trasformazione infinitesima per la fdo è $\psi \rightarrow \psi' = [1 - ia \cdot P + i \frac{1}{2} \omega \cdot M] \psi$

- Per particelle massive ($p^2 > 0$ e $p^0 > 0$), nel sistema di quiete ($p^0 = m$ e $\vec{p} = \vec{0}$)

$$W^0 |m, \vec{0}; jj_z\rangle = \vec{P} \cdot \vec{J} |m, \vec{0}; jj_z\rangle = 0$$

$$W^3 |m, \vec{0}; jj_z\rangle = m J^3 |m, \vec{0}; jj_z\rangle = m j_z |m, \vec{0}; jj_z\rangle$$

Gli autovalori, w^2 , di $(-W \cdot W/m^2)$ sono dati da $w^2 = j(j+1)$, cioè gli autovalori dello spin totale.

- Per particelle con massa nulla ($p^0 = \pm|\vec{p}|$), per le quali non esiste un sistema di quiete (in ogni sistema di rif. hanno sempre velocità c) l'algebra del gruppo si semplifica drasticamente: diventa quella del gruppo euclideo \mathbf{E}_2 , che contiene sia le traslazioni che le rotazioni nel piano (tre parametri!). Per semplicità, assumiamo che gli autovalori $p_x = p_y = 0$ e necessariamente $p_z = \pm p_0 \neq 0$, allora ($W^0 = \vec{J} \cdot \vec{P} = J^3 P^3$ e $W^3 = P^0 J^3$)

$$W^0 |p^\mu h\rangle = \vec{J} \cdot \vec{P} |p^\mu h\rangle = \pm W^3 |p^\mu h\rangle =$$

$$= \pm p_0 J^3 |p^\mu h\rangle = \pm p_0 h |p^\mu h\rangle$$

$$\text{quindi } \rightarrow \vec{J} \cdot \hat{P} |p^\mu h\rangle = h |p^\mu h\rangle$$

La rapp. unitaria di interesse fisico è due volte degenere ($\pm h$ con $h = 0, 1/2, 1, \dots$). La variabile h si chiama elicità ed è invariante per tutte le trasformazioni di Lorentz (al contrario, nel caso con $m^2 \neq 0$ j_z può cambiare). N.B. i) non si parla di spin per particelle con $p^2 = 0$, ii) le particelle con $p^2 = 0$, che consideriamo nelle applicazioni, hanno $p^0 = +|\vec{p}| > 0$

In generale, le **rappresentazioni unitarie irriducibili (RUI)** del gruppo di Poincarè si possono identificare attraverso gli autovalori dei due operatori di Casimir del gruppo, P^2 e W^2 . Gli stati di singola particella possono essere generati a partire da

P^2	<i>dim. RUI</i>	<i>dettagli</i>
> 0	$\infty, m, \vec{0}, j, j_z\rangle$	$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ visto con $p^0 > 0$
$= 0$	$1, h\rangle$	$h = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots$ visti con $p^0 > 0$
$= 0$	$\infty, c h\rangle$	$c > 0, h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ non visto,
< 0	∞	w^2 continuo o <i>discont.</i> non visto tachioni(?)

Commenti: i) a parte dobbiamo considerare il caso che corrisponde al vuoto: $p^0 = |\vec{p}| = 0$; ii) per convenzione consideriamo particelle con **energia positiva** ($p^0 > 0$); iii) per $m = 0$, stati con $h = \pm s$ appartengono allo stesso multipletto **se includiamo anche la parità** (quando è conservata, p.e. caso elettromagnetico); iv) per i **processi virtuali** i quadri-vettori con $P^2 < 0$ giocano un ruolo importante.

Negli anni '60, il successo ottenuto con $SU(3)$ di Sapore nella classificazione di mesoni e barioni, stimolò il tentativo di combinare le simmetrie interne ($SU(3) \otimes SU(2) \rightarrow SU(6)$) con il gruppo di Poincarè. In particolare le simmetrie considerate fino a quel momento tenevano nettamente distinti i multipletti con spin semintero (**fermioni**) dai multipletti con spin intero (**bosoni**). Il tentativo di unificazione si scontrò con un famoso teorema, la cui versione più completa è dovuta a **Coleman e Mandula**, che dimostrava come necessaria conseguenza di una non triviale composizione del gruppo di Poincarè e del gruppo di simmetrie interne (spin, sapore ...) la trivialità della matrice di scattering (cioè *matrice S* =identità).

Una strada per sfuggire al teorema di Coleman e Mandula, e quindi costruire una teoria che godesse delle simmetrie sia spazio-temporali che interne ed avesse una matrice di scattering non triviale, fu trovata facendo convivere sia regole di commutazione che di anticommutazione, e costruendo delle **superalgebre** (algebre di Lie graduate). Questa possibilità ha condotto alla nascita delle teorie supersimmetriche, anche se l'evoluzione storica non seguì vie così dirette.

Alcuni Riferimenti Bibliografici

- 1) Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, **Gauge Theory of elementary particles**. Oxford University Press (1984). In particolare il capitolo IV, per una introduzione generale.
- 2) W. Greiner, B. Müller, **Quantum Mechanics, Symmetries**, Second Edition, Springer Verlag Berlin Heidelberg (1994).
- 3) S. Haywood, **Symmetries and Conservation Laws in Particle Physics**, Imperial College Press (2011).
- 4) H. J. Lipkin, **Lie Groups for Pedestrians**. Dover Publications (2002).
- 5) Fl. Stancu, **Group Theory in Subnuclear Physics**, Oxford University Press, (1997).
- 6) Wu-Ki Tung, **Group Theory in Physics**, World Scientific, Singapore (2003).
- 7) J. F. Cornwell, **Group Theory in Physics**, Academic Press, London (1984).
- 8) J.J. De Swart, Rev. Mod. Phys. **35**, 916 (1963), Per ulteriori dettagli su **SU(3)**.
- 9) S. Weinberg, **The Quantum Theory of Fields**, Vol. 1, cap. II, Cambridge University Press (1995), per una ampia illustrazione del gruppo di Poincaré in Meccanica Quantistica Relativistica.