Renormalisation et Mécanique Classique

Renormalisation (group): cancellations qui curent problèmes apparemment singuliers sont (facilement) exhibées en décomposant les singularités “*en échelles*”, i.e. comme sommes des termes réguliers de tailles contrôlées.

Illustration intéressante est l’analyse du problème KAM. D’abord un cas banal (*problème à une échelle*)

$$h_j(\underline{\psi}) = \varepsilon\partial_j f(\underline{\psi} + \underline{h}(\underline{\psi})) \qquad \underline{\psi} = (\psi_1,\psi_2) \in T^2$$
$$f(\underline{\alpha}) = \sum_{|\underline{\nu}|\le N} e^{i\underline{\nu}\cdot\underline{\alpha}} f_{\underline{\nu}}, \qquad f_{\underline{\nu}} = f_{-\underline{\nu}}$$

Ensuite le problème KAM

$$(\underline{\omega}\cdot\underline{\partial})^2 h_j(\underline{\psi}) = \varepsilon\partial_j f(\underline{\psi} + \underline{h}(\underline{\psi})) \qquad j = 1,2$$
$$\underline{\omega} = (\omega_1,\omega_2) \in R^2, \qquad |\underline{\omega}\cdot\underline{\nu}| \ge \frac{1}{C|\underline{\nu}|^\tau}, \quad C,\tau > 0$$

(exemple: $\underline{\omega} = (1,\sqrt{2})$).

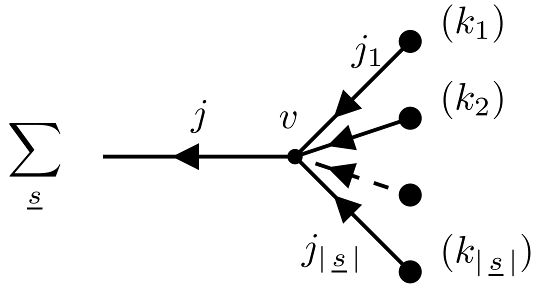
Solution pérturbative: $\underline{h}(\underline{\psi}) = \varepsilon\,\underline{h}^{(1)}(\underline{\psi}) + \varepsilon^2\,\underline{h}^{(2)}(\underline{\psi}) + \ldots \Longrightarrow$

$$\underline{h}^{(k)}(\underline{\psi}) = \Big[\sum_{\underline{s}\ge 0} \frac{1}{\underline{s}!}\,\underline{\partial}_{\underline{\psi}}\,\underline{\partial}^{\underline{s}}_{\underline{\psi}} f(\underline{\psi})\,\underline{h}^{\underline{s}}\Big]^{(k-1)} =$$
$$= \sum_{\underline{s}\ge 0} \frac{1}{\underline{s}!} \sum_{\sum k_{ij}=k-1} \underline{\partial}_{\underline{\psi}}\,\underline{\partial}^{\underline{s}}_{\underline{\psi}} f(\underline{\psi}) \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{s_i} \underline{h}^{(k_{ij})}$$

Compliquée! Caractéristique de la méthode: usage des symboles graphiques (au lieu que “algébriques”). Représentons $h_j^{(k)}$ comme

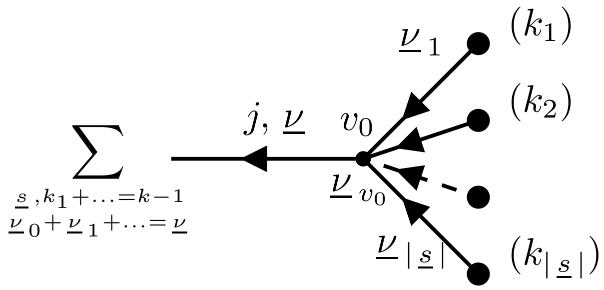
1Représ.de $\underline{h}^{(k)}$: label $j = 1,\ldots,\ell$ indique la j-me composante de $\underline{h}^{(k)}$.

On récrit que $h_j^{(k)}$ est, si $k-1=k_1+\ldots+k_{|\underline{s}|}$,



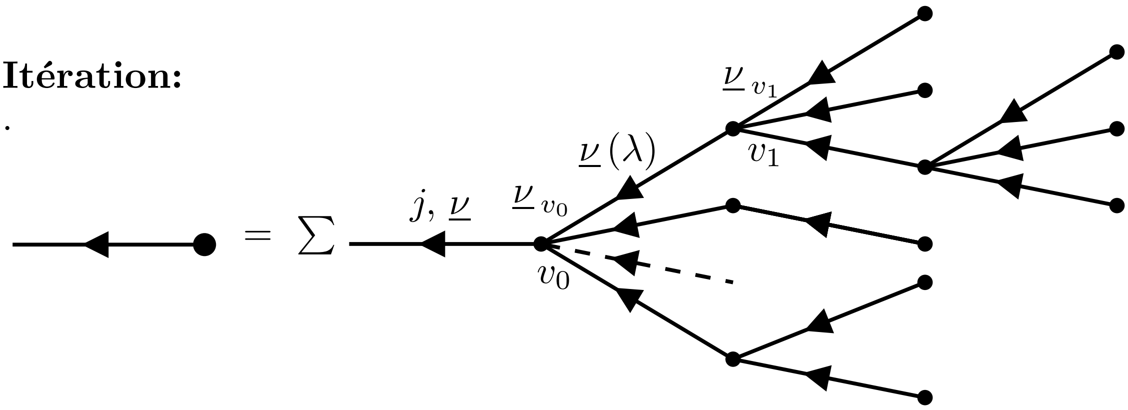
2:La *racine* marquée j. *Noeud* $v \to \partial_{\underline{\psi}}\, \partial^{\underline{s}}_{\underline{\psi}}$. Indexes j_i muets: on le supprimera.

Puisque $\underline{h}\,(\,\underline{\psi}\,)$ est périodique on en calcule la T.d.F. $\underline{h}_{\,\underline{\nu}}$: graphiquement



Itération:

.



Moments entrants $\underline{\nu}_{\,n}$ dans chaque noeud.
Courants sur une ligne générique$\lambda = v_0v_1$: $\underline{\nu}\,(\lambda) = \sum_{w\le v_1} \underline{\nu}_{\,v}$ (le courant est conservé à chaque noeud.

Valeur:

$$\mathrm{Val}(\vartheta) = \frac{1}{k!} \prod_{\lambda=(v'v)} (i\,\underline{\nu}_{\,v'} \cdot i\,\underline{\nu}_{\,v}) \prod_v f_{\underline{\nu}_{\,v}}$$

Nombre des arbres $\le k! 2^{2k}$. Chaque valeur est bornée banalement

$$|\mathrm{Val}(\vartheta)| \le \frac{1}{k!} N^{2k-1} F^k \qquad \Longrightarrow \text{ convergence si } |\varepsilon| < \varepsilon_0 < \tfrac{1}{2^2 N^2 F}$$

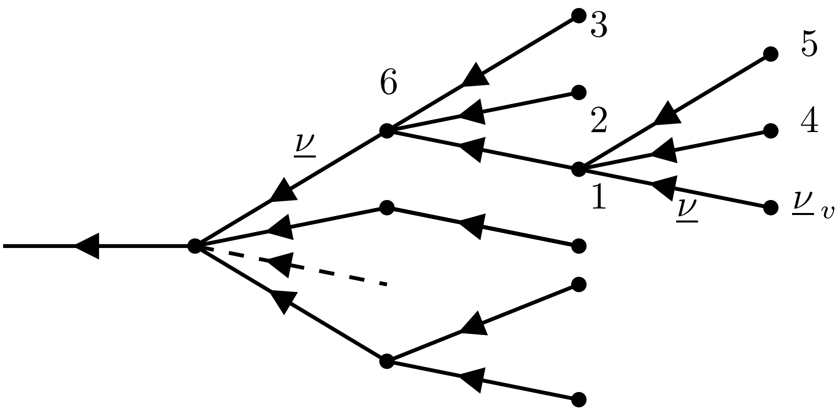
Cancellations

(1) Si $\underline{\nu} = \underline{0}$ alors la *somme* des toutes valeurs est $\underline{0}$! On le voit car si on somme les valeurs des arbres obtenus détachant la ligne racine du noeud v_0 et la rattachant aux autres noeuds w la valeur ne change que par le facteur du *propagateur* de la racine qui est égale a $\underline{\nu}_{wj}$ et donc la somme de toutes valeurs est prop. a $\sum_w \underline{\nu}_{wj} \equiv \underline{\nu} = 0$

(2) Même argument dit que on peut ignorer les arbres qui ont une ligne intérieure avec courant $\underline{=}0$: c'est la cancellation trouvée par Lindstedt, Newcomb (cas particuliers) et Poincaré (cas général)

(3) Si il y a deux lignes comparables qui ont le *même courant* $\underline{\nu}$

.



cela signifie que $\sum_{i=1}^{6} \underline{\nu}_i = \underline{0}$: et si on détache la ligne au de-part de v e on la rattache aux noeuds $j = 1, \ldots, 6$ on change seulement le propagateur de la ligne jv qui prend tour à tour les valeurs $\underline{\nu}_j \cdot \underline{\nu}_v$ dont la somme vaut $\underline{0}$. Donc on pourrait exclure aussi les graphes ou deux lignes comparables ont le même courant? NON: *cancellations en superposition.*

Même représentation! Mais nouveau propagateur. *Valeur*: écartant les graphes ou, sur au moins une ligne, à courant nul (Poincaré),

$$\mathrm{Val}(\vartheta) = \frac{1}{k!} \prod_{\lambda\equiv(v'v)\in\vartheta} \frac{-\underline{\nu}_v \cdot \underline{\nu}'_v}{(\underline{\omega}_0 \cdot \underline{\nu}(\lambda))^2} \prod_{v\in\vartheta} f_{\underline{\nu}_v}$$

ou la racine est à interpréter: $\frac{i(\underline{\nu}_{v_0})_j}{(\underline{\omega}_0\cdot\underline{\nu})^2}$.

Tout moment de noeud $\underline{\nu}_v$ borné, *mais les courants* $\underline{\nu}(\lambda)$ *peuvent être aussi grandes que* $k\,N$*:* $\Longrightarrow$ *grand propagateurs* ou *petits diviseurs* (bien que non nuls) seront possibles.

Y a t'il un problème? Oui: car la valeur du seul graphe ϑ_0

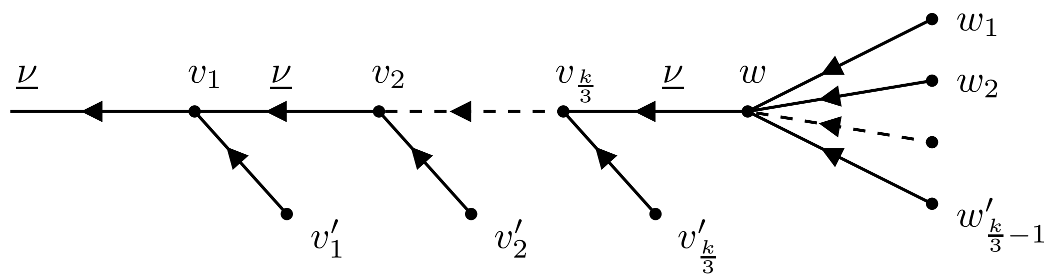


Fig.4 Un graphe (*peigne*) résonant si $\underline{\nu}_{v_j} = -\underline{\nu}_{v'_j} = \underline{\nu}_0$: a une valeur trop grande.

est facilement calculée et donne $k!\mathrm{Val}(\vartheta_0 \ge \mathit{const}(k!)^a$ $(a = \tau/3)$.

Faut utiliser les cancellations du cas banal. En fait *si certains graphes sont mis à coté* alors $\Longrightarrow$ borne facile. En effet si $N_n =$, est le nombre de propagateurs *de échelle* n cet à dire

$$2^{n-1} < C|\underline{\omega} \cdot \underline{\nu}| \le 2^n \qquad n = 0, -1, -2, \ldots$$

la valeur est bornée banalement par

$$\frac{1}{k!} N^{2k-1} F^k C^{2k} \prod_{n=-\infty}^{1} 2^{-2nN_n}$$

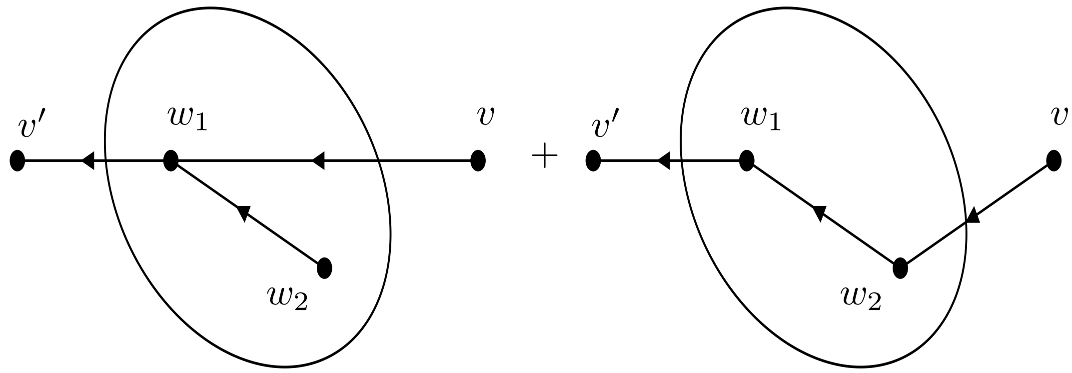
D'autre coté pour produire un propagateur d'échelle n il faut que $|\underline{\nu}| > 2^{-n/\tau}$ et donc la ligne en question est precedée de au moins $2^{-n/\tau}/N$ ligne du graphe.

Une fois que une telle "résonance" c'est produite et $C\,\underline{\omega}\cdot\underline{\nu}(\lambda)\simeq 2^n$ *il semble que on devrait "attendre" encore autant de lignes* $(2^{-n/\tau}/N)$ *pour pouvoir reconstruir un propagateur de la même taille.* La conclusion serait que si on n'a à disposition que k lignes (Siegel,Pöschel)

$$N_n < const\frac{k}{2^{-n/\tau}} \qquad \Longrightarrow \qquad \prod_{n=-\infty}^{1} 2^{-2n\,c\,2^{n/\tau}\;k} = M^k$$

Le graphe "à peigne" fait voir l'erreur: entre deux propagateurs égaux il peut n'y avoir qu'*une seule ligne*: donc il faut faire voir que si entre deux lignes de égal propagateur il y a peux de lignes "intermédiaires" alors on peut collectionner plusieurs graphes dont la somme peut être bornée en ne comptant le propagateurs repetés qu'une seule fois.

Le mécanisme est simple



La cancellation simple

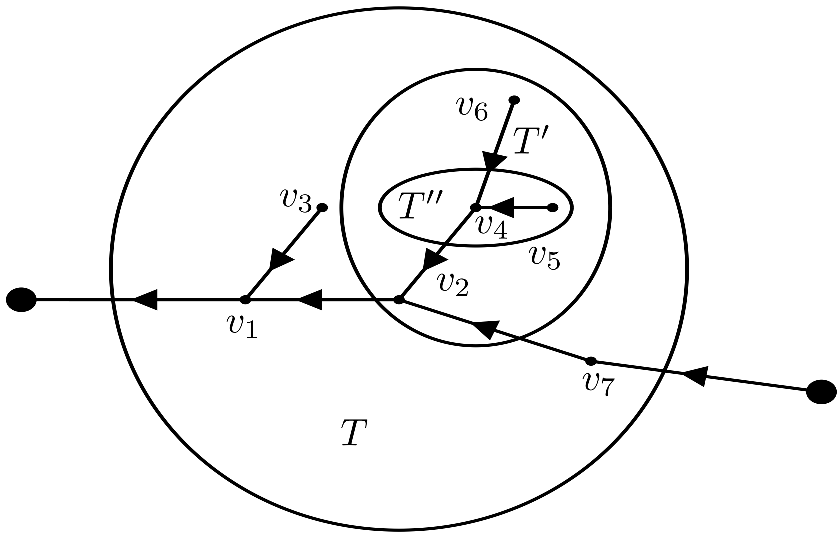
Si dans un graphe on obtient la situation de la figure avec $\underline{\nu}_{w_1}=-\underline{\nu}_{w_2}$. On détache de w_1 la ligne qui entre et on l'attache a w_2: cela revient a changer le signe (à cause de la partie vectorielle du propagateur $\underline{\nu}_{w_1}\cdot\underline{\nu}_v$, qui devient $\underline{\nu}_{w_2}\cdot\underline{\nu}_v=-\underline{\nu}_{w_1}\cdot\underline{\nu}_v$) mais le courant sur $w_w w_2$ change de $\underline{\nu}_{w_2}$ à $\underline{\nu}_{w_2}+\underline{\nu}$ et $(\underline{\omega}\cdot\underline{\nu}_{w_2})$ change à $(\underline{\omega}\cdot\underline{\nu}_{w_2}+\underline{\omega}\cdot\underline{\nu})\stackrel{def}{=}(\underline{\omega}\cdot\underline{\nu}_{w_2}+\delta)$ et donc sommant les deux termes et ceux obtenus échangeant le signe de $\underline{\nu}_w$ on trouve 4 termes

$$\Big(\frac{1}{(\underline{\omega}\cdot\underline{\nu}_{w_2})^2}-\frac{1}{(\underline{\omega}\cdot\underline{\nu}_{w_2}+\delta)^2}+\frac{1}{(-\underline{\omega}\cdot\underline{\nu}_{w_2})^2}-\frac{1}{(-\underline{\omega}\cdot\underline{\nu}_{w_2}+\delta)^2}\Big)$$

qui est nulle à ordre 2 si $\delta=0$. Si $\delta\ll\underline{\omega}\cdot\underline{\nu}_{w_2}$ (seul cas intéressant) alors on borne la quantité par $const\,\delta^2$ qui "*enlève un deux des petits diviseurs.*

Pour une chaîne de m propagateurs en résonance on repète l'operations et ont somme 4^m graphes $\Longrightarrow$ borne prop. à δ^{2m}; ils compensent les produit des propagateurs ($\delta^{2(m+1)}$): des m diviseurs n'en reste que 1!

Il faut éviter les superpositions des cancellations. Donné un graphe on définit les "clusters"de propagateurs de échelle n:



Exemple de 3 clusters (encerclés pour aider l'oeil)

Un cluster est formé de lignes, connexes, à échelle $\geq n$ dont une au moins de échelle $n \Longrightarrow$ structure hiérarchique.

• Si somme des moments à l'intérieur d'un cluster est nulle et
• si une seule ligne entre dans le cluster (toujours une seule sort)
• si le nombre des lignes internes n'est pas grand de ordre $2^{-n/\tau}$ (c'est à dire si la présence du cluster ne permettrait pas de utiliser la borne valide dans le cas de absence de clusters d'auto-énergie)

on le déclare un *cluster d'auto-énergie*.

Il n'y aura pas de conflits dans les cancellations si dans l'operation de détachement et rattachement des lignes qui entrent dans un graphe de auto-énergie *les échelles des lignes du graphe ne changent pas: cela est vérifié.*

Alors pour chaque diagramme de auto-énergie on produira avec la resommations indiquée un facteur de la môme taille de deux diviseurs égaux relatif à la ligne qui entre et a celle qui sort. Donc on peut procéder comme si le sou-graphe d'auto-énergie ne produisait pas un diviseur de trop et la borne de Siegel-Pöschel reste valide.