Resummations of self energy graphs and KAM theory

G. Gentile (Roma3), G.G. (I.H.E.S.)

Communications in Mathematical Physics, **227**, 421–460, 2002.

Hamiltoniana per un sistema di rotatori

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\underline{A}^2 + \underline{B}^2) + \varepsilon f(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \\ \underline{A} &= (A_1, \ldots, A_r), \qquad \underline{B} = (B_1, \ldots, B_{n-r}) \\ \underline{\alpha} &= (a_1, \ldots, a_r), \qquad \underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-r}) \end{aligned}$$

ove f è un polinomio trigonometrico pari di grado N.

Moti non perturbati

$$\underline{A} = \underline{\omega}, \qquad \underline{B} = \underline{0}, \qquad |\underline{\omega} \cdot \underline{\nu}| > \frac{1}{C|\underline{\nu}|^\tau}$$

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0 + \underline{\omega} t, \qquad \underline{\beta} = \underline{\beta}_0$$

$r = n \longleftrightarrow$ *tori massimali* o *tori KAM*

Ci sono moti dello "stesso tipo" in presenza d'interazione ?? *i.e.*

$$\begin{aligned} &\underline{A} = \underline{\omega} + \underline{H}(\underline{\psi}), \qquad \underline{B} = \underline{K}(\underline{\psi}) \\ &\underline{\alpha} = \underline{\psi} + \underline{h}(\underline{\psi}), \qquad \underline{\beta} = \underline{\beta}_0 + \underline{k}(\underline{\psi}) \qquad \text{con} \\ &\underline{\psi} \Rightarrow \underline{\psi} + \underline{\omega} t \qquad \text{è una soluzione?} \end{aligned}$$

Deve essere (*se e solo se*):

$$\begin{aligned} (\underline{\omega} \cdot \underline{\partial}_{\underline{\psi}})^2 \underline{h}(\underline{\psi}) &= -\varepsilon \underline{\partial}_{\underline{\alpha}} f(\underline{\psi} + \underline{h}(\underline{\psi}), \underline{\beta}_0 + \underline{k}(\underline{\psi})) \\ (\underline{\omega} \cdot \underline{\partial}_{\underline{\psi}})^2 \underline{k}(\underline{\psi}) &= -\varepsilon \underline{\partial}_{\underline{\beta}} f(\underline{\psi} + \underline{h}(\underline{\psi}), \underline{\beta}_0 + \underline{k}(\underline{\psi})) \end{aligned}$$

e $\underline{\beta}_0$ deve essere un estremo per la media su $\underline{\alpha}$: $\overline{f}(\underline{\beta}) = \int f(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \frac{d\,\underline{\alpha}}{(2\pi)^r}$:

$$(\underline{\omega} \cdot \underline{\partial}_{\underline{\psi}})^2 \underline{k}^1(\underline{\psi}) = -\underline{\partial}_{\underline{\beta}} f(\underline{\psi}, \underline{\beta}_0) \;\Rightarrow\; \underline{0} = \underline{\partial}_{\underline{\beta}} \overline{f}(\underline{\beta}_0)$$

Tori massimali: r=n. Serie di Lindstedt, Newcomb, Poincaré:

Sia dato un albero ϑ con p nodi $v_0, \ldots, v_{p-1}$ e radice r.
Si associ ad ogni nodo v un "*momento*" $\underline{\nu}_v \in \mathcal{Z}^r$ per $f_{\underline{\nu}_v} \neq 0$. Il momento della radice sarà un vettore unitario $\underline{n}$; e si definisca una *corrente* fluente in una linea uscente da nodo v

$$\underline{\nu}(v) \stackrel{def}{=} \sum_{w<v} \underline{\nu}_w \qquad \text{che } \textbf{supponiamo} \neq \underline{0}$$

Si noti che $0 < |\underline{\nu}_v| \leq N \Rightarrow |\underline{\omega} \cdot \underline{\nu}_v| > c > 0$ (se $\underline{\omega}$ è "diofantino")

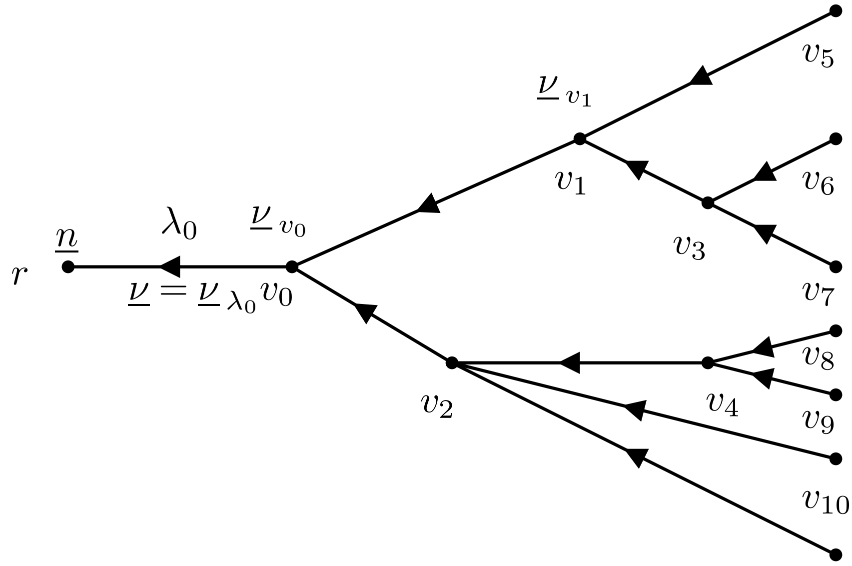


Fig. 1: Un albero ϑ con $m_{v_0} = 2, m_{v_1} = 2, m_{v_2} = 3, m_{v_3} = 2, m_{v_4} = 2$ e $k = 12$, e alcune decorazioni. Sono indicati esplicitamente solo due indici di momento e uno di corrente; gli indici che numerano le linee (perchè sono distinte) non sono indicati. Le frecce rappresentano l'ordine parziale definito dall'albero.

Si definisce il **valore** di un albero ϑ a rami distinti

$$\mathrm{Val}(\vartheta) = \frac{1}{p!} \Big(\prod_{\text{linee}\lambda=(v'v)\in\vartheta} \frac{\underline{\nu}_{v'} \cdot \underline{\nu}_v}{(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu}(v))^2} \Big) \Big(\prod_{v\in\vartheta} f_{\underline{\nu}_v} \Big)$$

contando gli alberi a meno di equivalenza per *cerniere*.

$$\underline{h}^{(p)}_{\underline{\nu}} \cdot \underline{n} = \sum_{\substack{\vartheta \\ \text{root current}=\underline{\nu}}} \mathrm{Val}(\vartheta)$$

La stima di Siegel–Bryuno–Pöschel

Si dice che $\lambda = (v'v)$ ha **scala** $n = 0, -1, -2, \ldots$ se $2^{n-1} < |\underline{\omega} \cdot \underline{\nu}(v)| \leq 2^n$

$$|\frac{\underline{\nu}_{v'} \cdot \underline{\nu}_v}{(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu}(v))^2}| \leq N^2 2^{-2n} \qquad \text{if} \qquad 2^{n-1} < |\underline{\omega} \cdot \underline{\nu}(v)| \leq 2^n$$

$$|\mathrm{Val}(\vartheta)| \leq \frac{1}{p!} N^{2p} F^p \prod_{n=-\infty}^{0} 2^{-2n\mathcal{N}_n}$$

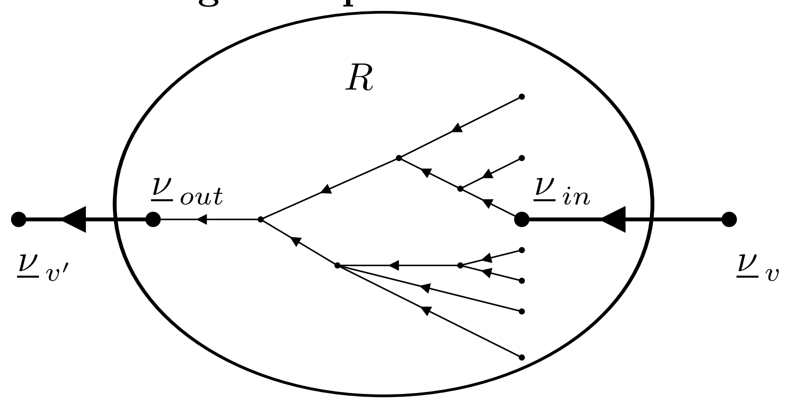
$$\mathcal{N}_n \stackrel{def}{=} \text{nunero delle linee di scala}\, n$$

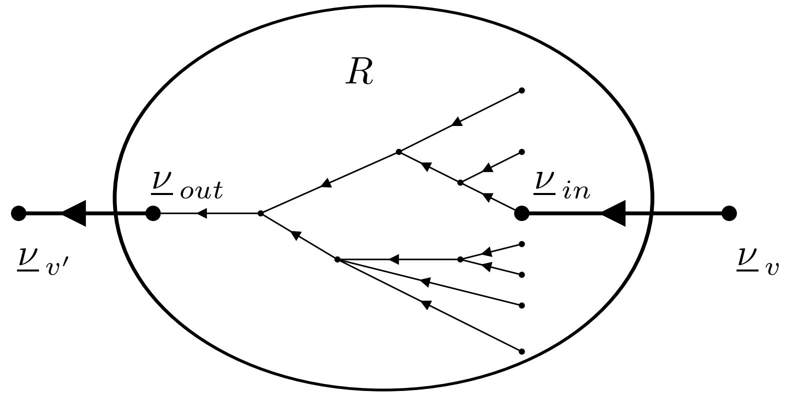
Se $\underline{\nu}(v) \neq \underline{\nu}(w)$ per tutti i $v > w$ allora $\mathcal{N}_n$ è "piccolo" $\mathcal{N}_n \leq aN2^{n/\tau}p$ per qualche $a > 0$.
Si devono consumare $2^{-n/\tau}N^{-1}$ nodi con momento $\leq N$ per raggiungere una linea $v'v$ tale che $\underline{\omega} \cdot \underline{\nu}(v) \sim 2^{-n}$, *i.e.* $\underline{\nu}(v) = O(2^{-n/\tau})$. Per trovarne un'altra della stessa scala ce ne vogliono altrettante: dunque $\mathcal{N}_n = O(p2^{n/\tau}N)$.

$$\sum_{\vartheta\ con\ p\ nodi} |\mathrm{Val}(\vartheta)| \leq \frac{1}{p!} p! 4^p N^{2p} F^p (\prod_{n=-\infty}^{0} 2^{-2naN2^{n/\tau}p}) =$$

$$= \frac{1}{p!} p! 4^p N^{2p} F^p (2^{-2aN\sum_{n=-\infty}^{0} n2^{n/\tau}})^p = B^p$$

Un grafico di auto-energia semplice





Questo è un *sottografico di autoenergia* se la linea entrante e quella uscente hanno la stessa corrente $\underline{\nu}$ di scala n e tutte le linee interne hanno scala $m \geq n+3$ ed il loro numero è $< a2^{-n/\tau}$, *i.e.* non troppo grande, **e** $\sum_{w\in R} \underline{\nu}_w = \underline{0}$ e tutte le linee del sottografico hanno correnti differenti (*i.e.* nessun sotto-sottografico di autoenergia! → "semplice").

Risommazioni dei grafici di autoenergia semplici

Il contributo al valore di un albero da parte di un sottografico di autoenergia R inserito sulla linea $v'v$ è

$$\frac{\underline{\nu}_{v'} \cdot \underline{\nu}_{out}}{(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2}\Big(\prod_{\lambda=(w'w)\in R} \frac{\underline{\nu}_{w'} \cdot \underline{\nu}_w}{(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu}(\lambda))^2}\Big)\frac{\underline{\nu}_{in} \cdot \underline{\nu}_v}{(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2}\,\underline{\nu}_{v'} \cdot \frac{M_R(\underline{\nu})}{(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2}\,\underline{\nu}_v$$

Definiamo $M(\underline{\nu}) = \sum_R \varepsilon^{|R|} M_R(\underline{\nu})$. Si possono inserire $m = 0, 1, 2, \ldots$ sottografici di autoenergia su ogni linea di un albero che non ha alcun tale sottografico

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2}\,\underline{\nu}_{v'} \cdot \Big(\frac{M(\underline{\nu})}{(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2}\Big)^m \cdot \underline{\nu}_v =$$

$$= \underline{\nu}_{v'} \cdot \frac{1}{(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2 - M(\underline{\nu})} \cdot \underline{\nu}_v$$

che è una somma *convergente* per la stima di Siegel–Bryuno–Pöschel.

Cancellazioni

Questo non è abbastanza perchè $(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2 - M(\underline{\nu})$ si può annullare!! Tuttavia si dimostra che

$$M(\underline{\nu}) = (\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2 \, m^1_\varepsilon(\underline{\nu})$$

ed il propagatore diviene $(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^{-2}\,(1+m^1_\varepsilon(\underline{\nu}))^{-1} \stackrel{def}{=} (\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^{-2}\,\underline{\nu}_{v'} G^{(1)}(\underline{\nu})\,\underline{\nu}_v$, *i.e.* abbiamo **eliminato** i sottografici di autoenergia privo di ulteriori

---

Eliminazione dei grafici sovrapposti

Si definisca $m^2_\varepsilon(\underline{\nu})$ allo "stesso modo": considerando tutti gli alberi con al più sottografici semplici di autoenergia e si definisca il loro valore come nel caso precedente ma facendo uso dei nuovi propagatori. Poi si iteri indeinitamente: si verifica che $G^{(k)}_\varepsilon(\underline{\nu})$ converge ad un limite $G^{(\infty)}_\varepsilon(\underline{\nu})$. L'equazione del toro invariante è quidi ottenuta considerando tutti i grafici senza autoenergie e calcolandoli con il propagatore

$$(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^{-2}\,\underline{\nu}_{v'} \cdot (1 + m^\infty_\varepsilon(\underline{\nu}))^{-1} \cdot \underline{\nu}_v \stackrel{def}{=} (\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^{-2}\,\underline{\nu}_{v'} G^{(\infty)}(\underline{\nu})\,\underline{\nu}_v$$

che, per la stima di Siegel–Bryuno–Pöschel non presenta problemi di convergenza e di fatto fornisce un lgoritmo di calcolo per valutare la somma delle serie LNP.

Tori di dimensione inferiore

Se $f(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \sum_{\underline{\nu},\underline{\mu}} e^{i\underline{\nu}\cdot\underline{\alpha} + i\underline{\mu}\cdot\underline{\beta}} f_{\underline{\nu},\underline{\mu}}$ le regole di Feynman subiscono cambiamenti minori. Dopo risommazione dei sottografici di autoenergia (definiti allo stesso modo) il propagatore è una matrice ($n\times n$ come prima) che ha la forma

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} & \begin{pmatrix} (r\times r) & (r\times(n-r)) \\ (r\times r) & ((n-r)\times(n-r)) \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} (\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2(1+O(\varepsilon^2)) & i(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})b\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ -i(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})b\varepsilon + O(\varepsilon^2) & (\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2 - \varepsilon\,\underline{\partial}_{\underline{\beta}}\overline{f}(\underline{\beta}_0) + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

ove gli $\alpha \times \alpha$ elementi tengono conto delle cancellazioni.

Tuttavia i $\beta \times \beta$ elementi possono annullarsi su o vicino all'insieme di infiniti punti ε per cui $(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2 - \varepsilon \underline{\partial}_{\underline{\beta}} \overline{f}(\underline{\beta}_0) = 0$.

Se $\varepsilon > 0$ e $\underline{\beta}_0$ è un punto di *massimo* non c'è alcun autovalore 0 e di fatto gli autovalori sono limitati dal basso da $(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2$. Quindi si ricade nella stessa situazione incontrata nel caso dei tori massimali. La convergenza avviene nel dominio D_γ $(\gamma > 0)$ degli ε complessi ove $(\underline{\omega} \cdot \underline{\nu})^2 - \varepsilon \underline{\partial}_{\underline{\beta}} \overline{f}(\underline{\beta}_0) \geq \gamma\, \underline{\omega} \cdot \underline{\nu}^2$. Tal dominio ha la forma

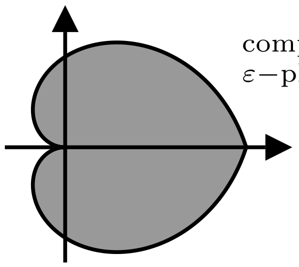


Fig.3: Dominio di analiticità D_0 per i tori invarianti di dimensione più bassa. La cuspide all'origine è di second'ordine. La figura si riferisce al caso iperbolico.

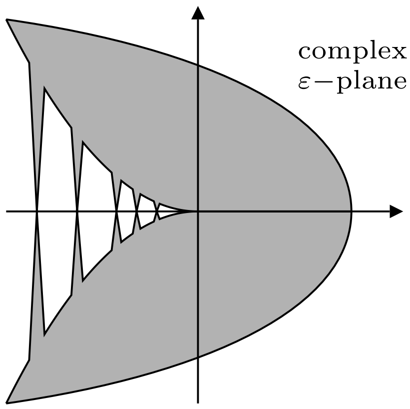


Fig.4: Il dominio D_0 della Figura 3 può essere esteso? la congettura suppone che il dominio possa forse essere rappresentato (nei pressi dell'origine) come in figura: raggiunge l'asse reale in cuspidi che sono I_{ε_0} e corrispondono nel piano ε complesso, ai tori ellittici che sono continuazioni analitiche dei tori iperbolici. La continuazione analitica potrebbe essere continua attraversando l'assse reale nei punti di I_{ε_0}. Le cuspidi sarebbero almeno quadratiche.

Cenni bibliografici

Tori di dimensione bassa

S.M. Graff: *On the conservation for hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems*, J. Differential Equations **15** (1974), 1–69.

V.K. Mel'nikov: *On some cases of conservation of conditionally periodic motions under a small change of the Hamiltonian function*, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 1592–1596; *A family of conditionally periodic solutions of a Hamiltonian systems*, Soviet Math. Dokl. **9** (1968), 882–886.

J. Moser: *Convergent series expansions for quasi periodic motions*, Math. Ann. **169** (1967), 136–176.

Eliasson, L.H.: *Absolutely convergent series expansions for quasi-periodic motions*, Math. Phys. Electronic J., `<http:// mpej.unige.ch>`, **2** (1996), Paper 4

A. Jorba, R. Llave, M. Zou: *Lindstedt series for lower dimensional tori*, in *Hamiltonian systems with more than two degrees of freedom* (S'Agaró, 1995), 151–167, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Vol. 533, Ed. C. Simó, Kluwer Academic Publishers, 1999.

La stima di Siegel-Bryuno-Pöschel

A.D. Bryuno: *Analytic form of differential equations. I, II. (Russian)*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **25** (1971), 119–262; ibid. **26** (1972), 199–239.

J. Pöschel: Invariant manifolds of complex analytic mappings near fixed points, in *Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories*, Les Houches, Session XLIII (1984), Vol. II, 949–964, Ed. K. Osterwalder & R. Stora, North Holland, Amsterdam, 1986.

Metodi grafici

L. Chierchia, C. Falcolini: *Compensations in small divisor problems*, Comm. Math. Phys. **175** (1996), 135–160.

G. Gallavotti: *Twistless KAM tori*, Comm. Math. Phys. **164** nd (1994), no. 1, 145–156. *Twistless KAM tori, quasiflat homoclinic intersections,* *and other cancellations in the perturbation series of certain completely integrable Hamiltonian systems. A review*, Rev. Math. Phys. **6** (1994), no. 3, 343–411.

Lavori più recenti

J. Bricmont, A. Kupiainen, A. Schenkel: *Renormalization group for the Melnikov problem for PDE's*, Comm. Math. Phys. **221** (2001), no. 1, 101–140.
J. Xu, J. You: *Persistence of Lower Dimensional Tori Under the First Melnikov's Non-resonance Condition*, Nanjing University Preprint, 1–21, 2001, J. Math. Pures Appl., in press.
Xiaoping Yuan: *Construction of quasi-periodic breathers via KAM techniques* Comm. Math. Phys., in press.